# تمارين في المتتاليات العددية

## التمرين رقم 1

الحل موجود في الصفحة 4

$(v_n)$ متتاليّة حسابيّة حيث : $v_4 = 5$ و $v_8 = 7$ .

1/ عيّن أساس المتتاليّة $(v_n)$ و حدّها الأوّل $v_0$ .

2/ أحسب $v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ عيّن العدد الطبيعي $n$ حتّى يكون $v_n = 50$ .

3/ أحسب المجموع : $S = v_6 + v_7 + v_8 + \cdots + v_{94}$ .

## التمرين رقم 2

الحل موجود في الصفحة 4

$(v_n)$ متتاليّة حسابيّة حدّها الأوّل $v_1$ و $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 \end{cases}$ .

1/ عيّن الحدود $v_1, v_2, v_3$ للمتتاليّة و أساسها .

2/ أحسب الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ .

3/ عبّر بدلالة $n$ عن المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ .

4/عيّن العدد الطبيعي $n$ حتّى يكون $S_n = -10$ .

## التمرين رقم 3

الحل موجود في الصفحة 4

$(u_n)$ متتاليّة حسابيّة حدّها الأوّل $u_1$ .

1/ أحسب حدّها الثاني علما أنّ : $u_1 + u_3 = 12$ .

2/ أحسب الحد الرابع $u_4$ علما أنّ : $u_3 + u_4 + u_5 = 30$ .

3/ عيّن أساس المتتاليّة $(u_n)$ و حدّها الأوّل $u_1$ .

4/ أكتب الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ عيّن $n$ حتّى يكون $u_n = 32$ .

5/ أحسب $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ بدلالة $n$ .

## التمرين رقم 4

الحل موجود في الصفحة 4

$(u_n)$ متتاليّة حسابيّة حدّها الأوّل $u_0 = 2$ و $u_2 + u_5 = 25$ .

1/ عيّن أساس المتتاليّة الحسابيّة $(u_n)$ .

2/ أكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ .

3/ أحسب قيمة الحد الذي رتبته 11 .

4/ أحسب المجموع $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$ .

## التمرين رقم 5

الحل موجود في الصفحة 4

$(u_n)$ متتاليّة حسابيّة حيث : $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$ .

1/ عيّن الحد الأوّل $u_0$ و الأساس $r$ للمتتاليّة $(u_n)$ .

2/ أكتب $u_n$ بدلالة $n$ .

3/ أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ .

4/ عيّن العدد الطبيعي $n$ حتّى يكون $S_n = 78$ .

## التمرين رقم 6

الحل موجود في الصفحة 5

$(u_n)$ متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n +$ .1

1/ أحسب $u_0, u_1, u_2$ .

2/ بيّن أنّ $(u_n)$ حسابيّة يطلب تعيين أساسها ، ثمّ عيّن إتجاه تغيّر $(u_n)$ .

3/ تحقق أنّ 2008 حد من حدود المتتاليّة $(u_n)$ ، ما رتبته؟ .

4/ أحسب المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$ .

## التمرين رقم 7

الحل موجود في الصفحة 5

$(u_n)$ متتاليّة عدديّة معرّفة بحدّها الأوّل $u_1 = 7$ و من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = 2u_n + 1$ .

1/ أحسب $u_2, u_3, u_4$ .

2/ من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ غير معدوم $n$ نعرّف المتتاليّة $(v_n)$ كما يلي : $v_n = u_n + 1$ .

أ) بيّن أنّ $(v_n)$ هندسيّة يطلب أساسها و حدّها الأوّل $v_1$ .

ب) أكتب عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

ج) نضع $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$ ، أحسب $S_n$ بدلالة $n$ .

د) عيّن $n$ علما أنّ : $S_n = 1016$ .

## التمرين رقم 8

الحل موجود في الصفحة 5

$(u_n)$ متتاليّة حسابيّة معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأوّل $u_1 = 2$ و بالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$ .

1/ أ) أحسب الأساس $r$ للمتتاليّة $(u_n)$ .

ب) أحسب الحد العاشر .

2/ أكتب عبارة $u_n$ بدلالة $n$ .

3/ بيّن أنّ العدد 2008– هو حد من حدود المتتالية $(u_n)$ محددا رتبته .

4/ أحسب المجموع $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{671}$ .

## التمرين رقم 9

الحل موجود في الصفحة 5

$(u_n)$ متتالية هندسيّة معرّفة على $\mathbb{N}$ و أساسها موجب .

1/ عيّن أساس هذه المتتالية و حدّها الأوّل $u_0$ إذا علمت أنّ : $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$ .

2/ تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $u_n = 18 \times 2^n$ .

3/ أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، ثمّ استنتج قيمة $n$ حتى يكون $S_n = 1134$ .

## التمرين رقم 10

الحل موجود في الصفحة 5

I) $(u_n)$ متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالحدين $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$ .

1/ عيّن الأساس $r$ و الحد الأوّل $u_0$.

2/ أكتب $u_n$ بدلالة $n$ .

3/ بيّن أنّ 6028 حد من حدود المتتالية $(u_n)$ .

II) $(v_n)$ المتتالية المعرّفة بـ : $v_n = 2 \times 8^n$ .

1/ بيّن أنّ $(v_n)$ هندسيّة يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل $v_0$ .

2/ أحسب المجموع $S_n$ حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ بدلالة $n$ .

## التمرين رقم 11

الحل موجود في الصفحة 6

$(u_n)$ متتالية حسابيّة متزايدة ، أساسها $r$ و حدّها الأوّل $u_1$ و $u_3 = 7$ .

1/ أ) أحسب بدلالة $r$ الجدئين $T_1$ و $T_2$ حيث : $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$ .

ب) عيّن الأساس $r$ بحيث : $T_2 - T_1 = 27$ .

2/ نضع : $r = 3$ .

أ) أكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ .

ب) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ .

• بيّن أنّ : $S_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$ .

ج) جد العدد الطبيعي $n$ بحيث : $S_n = 145$ .

3/ أ) أكت الحد $u_{n+5}$ بدلالة العدد الطبيعي $n$ .

ب) تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $\dfrac{u_{n+5}}{n} = 3 + \dfrac{13}{n}$ .

ج) استنتج الأعداد الطبيعيّة $n$ التي يكون من أجلها العدد $\dfrac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا .

## التمرين رقم 12

الحل موجود في الصفحة 6

$(u_n)$ متتالية حسابيّة حدّها الأوّل $u_0$ و أساسها $r = 5$ بحيث : $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$ .

1/ أحسب $u_0$ .

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $u_n = 5n + 1$ .

3/ عيّن العدد الطبيعي $n$ بحيث : $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$ .

4/ أحسب المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}$ .

5/ المتتالية $(v_n)$ معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2u_n + 1$

أ) أدرس إتجاه تغيّر $(v_n)$ .

ب) أحسب المجموع $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{2013}$ .

## التمرين رقم 13

الحل موجود في الصفحة 6

$(u_n)$ متتالية حسابيّة حدّها الأوّل $u_1$ و أساسها $r$ حيث : $u_2 = \dfrac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$ .

1/ أ) بيّن أنّ : $u_1 + u_3 = 1$ .

ب) عيّن الحد الأوّل $u_1$ و استنتج أنّ : $r = -\dfrac{5}{2}$ .

2/ أكتب $u_n$ بدلالة $n$ .

3/ أ) أحسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ .

ب) عيّن العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها : $S_n = -\dfrac{657}{2}$ .

4/ $n$ عدد طبيعي غير معدوم ، نضع : $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$ .

أ) تحقق أنّه لكلّ عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$ .

ب) باستعمال البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عددطبيعي

غير معدوم : $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$ .

## التمرين رقم 14

الحل موجود في الصفحة 7

$a, b, c$ ثلاث حدود متتابعة من متتاليّة حسابيّة متزايدة أساسها $r$ حيث $a+b+c=9$ .

1/ أ) أحسب $b$ ، ثمّ $a$، و $c$ بدلالة $r$ .

ب) علما أنّ : $a \times c = -16$ ، أحسب $r$ ثمّ استنتج $a$ و $c$ .

2/ $(u_n)$ متتاليّة حسابيّة حدّها الأوّل $u_0 = -2$ و أساسها $r = 5$ .

أ) أكتب $u_n$ بدلالة $n$ .

ب) أحسب $u_{15}$ ثمّ استنتج المجموع : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$ .

3/ $(v_n)$ متتاليّة معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $8v_n - u_n = 0$

أحسب المجموع : $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$ .

## التمرين رقم 15

الحل موجود في الصفحة 7

$(U_n)$ متتاليّة هندسيّة حدودها موجبة تماما ، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث $U_1 = 20$ و $U_3 = 320$ .

1/ بيّن أنّ أساس المتتاليّة $(U_n)$ هو 4 و حدّها الأوّل هو $U_0 = 5$ .

2/ أكتب عبارة الحد العام $U_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ استنتج قيمة حدّها السابع .

3/ أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي $n$ المجموع : $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ .

ب) استنتج قيمة المجموع $S' = U_0 + U_1 + \cdots + U_6$ .

## التمرين رقم 16

الحل موجود في الصفحة 7

$(u_n)$ متتاليّة هندسيّة حدها الأوّل $u_0$ و أساسها $q$ حيث : $u_0 = 2$ و $q = 3$ .

1/أحسب $u_1$ و $u_2$ .

2/ أكتب $u_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ استنتج $u_5$ .

3/ عيّن إتجاه تغيّر $(u_n)$ .

4/ أ) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ .

ب) استنتج قيمة المجموع $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$ .

5/ أ) عيّن باقي القسمة الإقليديّة على 5 لكل من الأعداد 3 ، $3^2$ ؛ $3^3$ و $3^4$ .

ب) استنتج أنّه من أجل كلّ $k$ من $\mathbb{N}$ ؛ $3^{4k} \equiv 1[5]$ .

6/ عيّن الأعداد الطبيعيّة $n$ التي يكون من أجلها $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5 .

## التمرين رقم 17

الحل موجود في الصفحة 7

$(u_n)$ متتاليّةعدديّة معرفة بحدّها الأوّل $u_1 = 7$ و من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = 2u_n + 1$ .

1/ أحسب $u_2, u_3, u_4$ .

2/ من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ غير معدوم ، نعرّف المتتاليّة $(v_n)$ حيث $v_n = u_n + 1$ .

أ) أثبت أنّ $(v_n)$ هندسيّة يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

ج) نضع : $S_n = v_1 + v_1 + \cdots + v_n$ ، أحسب $S_n$ بدلالة $n$ .

د) عيّن $n$ علما أنّ : $S_n = 1016$ .

## التمرين رقم 18

الحل موجود في الصفحة 8

أ) $(u_n)$ متتاليّة هندسيّة أساسها 3 و حدّها الأوّل $u_0$ بحيث : $u_0 + u_3 = 28$ .

1. أحسب $u_0$ ، ثمّ أكتب $u_n$ بدلالة $n$ .

2. أحسب المجموع $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$ .

ب) $(v_n)$ متتاليّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 1 - 5n$ .

1. بيّن أنّ $(v_n)$ حسابيّة يطلب تعيين أساسها ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّرها .

2. أحسب المجموع $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$ .

ج) نعتبر المتتاليّة$(k_n)$ المعرفّة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $k_n = 1 + 3^n - 5n$ .

– تحقق أنّ : $k_n = u_n + v_n$ ؛ ثمّ استنتج قيمة المجموع $S_3 = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$ .

## التمرين رقم 19

الحل موجود في الصفحة 8

$(u_n)$ متتاليّة هنسّيّة حدّها الأوّل $v_0 = 2$ و أساسها 3 .

1/ أ) عبّر عن $v_n$ بدلالة $n$ .

ب) أحسب الفرق $v_{n+1} - v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر $(v_n)$ .

2/ نضع من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ غير معدوم ،
$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ .
أ) أحسب $S_n$ بدلالة $n$ .
ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي $n$ بحيث : $S_n = 80$ .
ج) أثبت بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ؛ $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 .

## حل التمرين رقم 1 للعودة إلى التمرين 1

1/ $(v_n)$ حسابيّة ، إذن : $v_n = v_p + (n-p) \times r$
حيث $r$ أساس المتتالية $(v_n)$ مع $p < n$ ، و عليه
$v_8 = v_4 + 4r$ أي : $7 = 5 + 4r$ أي $r = \frac{1}{2}$ .
لدينا $v_4 = v_0 + 4r$ و منه $5 = v_0 + 4 \times \frac{1}{2}$ و منه $v_0 = 3$ .
2/ $v_n = v_0 + nr$ و منه $v_n = 3 + \frac{n}{2}$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ .
$v_n = 50$ معناه $3 + \frac{n}{2} = 50$ و منه $\frac{n}{2} = 47$ و منه $n = 94$ .
3/ $S = \frac{94-6+1}{2}\left(v_6 + v_{94}\right)$ أي $S = \frac{89}{2}\left(3 + \frac{6}{2} + 50\right)$ و منه : $S = 28 \times 89$ أي $S = 2492$

## حل التمرين رقم 2 للعودة إلى التمرين 2

1/ بتطبيق خاصية الوسط الحسابي $2v_2 = v_1 + v_3$ نجد $3v_2 = \frac{3}{2}$ أي : $v_2 = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} & \cdots(1) \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 & \cdots(2) \end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف بين (1) و (2) نجد : $2v_1 + 5v_2 = \frac{17}{2}$ ، و بالطرح طرفا لطرف نجد : $2v_3 - 3v_2 = -\frac{11}{2}$
و منه $v_1 = \frac{17-5}{2}$ أي $v_1 = 3$ .
$2v_3 = \frac{-11+3}{2}$ أي : $v_3 = -2$ .
ومنه : $r = v_2 - v_1$ . $r = -\frac{5}{2}$
2/ $v_n = u_1 + (n-1) \times r$ أي $v_n = \frac{11}{2} - \frac{5n}{2}$ .

3/ $S_n = \frac{17n - 5n^2}{4}$ أي $S_n = \frac{n}{2}\left(v_1 + v_n\right)$ .
$\frac{17n - 5n^2}{4} = -10$ أي : $S_n = -10$ ؛ أي $5n^2 - 17n - 40 = 0$
حلولها هي $5, -\frac{8}{5}$ و منه $n = 5$

## حل التمرين رقم 3 للعودة إلى التمرين 3

1/ نطبق خاصيّة الوسط الحسابي : $2u_2 = u_1 + u_3$
نجد $2u_2 = 12$ أي : $u_2 = 6$ .
2/ حسب خاصيّة الوسط الحسابي نكتب : $2u_4 = u_3 + u_5$ و منه $3u_4 = 30$ و منه $u_4 = 10$ .
3/ لدينا $u_4 = u_2 + 2r$ و منه $10 = 6 + 2r$ و منه $2r = 4$ و منه $r = 2$ .
لدينا $u_2 = u_1 + r$ و منه $6 = u_1 + 2$ و منه $u_1 = 4$ .
4/ $u_n = u_1 + (n-1)r$ و منه $u_n = 4 + (n-1) \times 2$
و منه : $u_n = 2 + 2n$ .
$u_n = 32$ معناه $2 + 2n = 32$ و منه $2n = 30$ أي : $n = 15$ .
5/ $S_n = \frac{n}{2}\left(u_1 + u_n\right)$ و منه : $S_n = \frac{n}{2}(4 + 2 + 2n)$ أي $S_n = \frac{n}{2}(6 + 2n)$ و منه : $S_n = \frac{n}{2}(3 + n)$ .

## حل التمرين رقم 4 للعودة إلى التمرين 4

1/ لدينا $u_2 = u_0 + 2r$ و $u_5 = u_0 + 5r$ و منه
$u_2 + u_5 = 2u_0 + 7r$ أي $u_2 + u_5 = 4 + 7r$ لكن $u_2 + u_5 = 25$ و منه $4 + 7r = 25$ ومنه $7r = 21$
أي $r = 3$ .
2/ $u_n = u_0 + nr$ أي $u_n = 2 + 3n$ .
3/ الحد الذي رتبته 11 هو $u_{10}$ حيث $u_{10} = 2 + 3 \times 10$
أي $u_{10} = 32$ .
4/ $S = \frac{10}{2}(u_1 + u_{10})$ و أي $S = 5(32)$ أي $S = 160$ .

## حل التمرين رقم 5 للعودة إلى التمرين 5

1/ لدينا $u_3 = u_0 + 3r$ و $u_2 = u_0 + 2r$ ، $u_5 = u_0 + 5r$
إذن : $2u_0 + 3r = 18$ و $2u_0 + 7r = 34$ .

$\begin{cases} 2u_0 + 3r = 18 \\ 2u_0 + 7r = 34 \end{cases}$ .

بالطرح طرفا لطرف بين المعادلتين السابقتين نجد $4r = 16$ أي $r = 4$ .

نعوض في إحدى المعادلتين السابقتين نجد

$2u_0 + 12 = 18$ أي $2u_0 = 6$ أي $u_0 = 3$ .

2/ $u_n = u_0 + nr$ أي $u_n = 3 + 4n$ .

3/ $S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$ أي $S_n = \frac{n+1}{2}(3 + 3 + 4n)$ أي $S_n = \frac{n+1}{2}(6 + 4n)$ أي $S_n = (n+1)(3+2n)$ .

4/ $S_n = 78$ أي $(n+1)(3+2n) = 78$ أي $2n^2 + 5n - 75 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانيّة حلولها هي $5, -\frac{15}{2}$ و منه $n = 5$ .

## حل التمرين رقم 6 ⟸ للعودة إلى التمرين 6

1/ $u_0 = 1$ ، $u_1 = 4$ ، $u_2 = 7$ .

2/ $u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$ و منه :

$u_{n+1} - u_n = 3n + 4 - 3n - 1$ أي $u_{n+1} - u_n = 3$

من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، اذن $(u_n)$ حسابيّة أساسها $r = 3$ ، بما أنّ $r > 0$ إذن فهي متزايدة تماما .

3/ نحل المعادلة : $u_n = 2008$ أي $3n + 1 = 2008$ و منه $n = \frac{2007}{3}$ إذن $n = 669$ و منه $u_{669} = 2008$

رتبته 670 .

4/ $S = \frac{670}{2}(u_0 + u_{669})$ أي $S = 335(2009)$ أي

$S = 673015$

## حل التمرين رقم 7 ⟸ للعودة إلى التمرين 7

1/ $u_2 = 15$ ، $u_3 = 31$ ، $u_4 = 63$ .

2/ $v_n = u_n + 1$ .

أ) $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1$ أي $v_{n+1} = 2u_n + 2$ و منه $v_{n+1} = 2(u_n + 1)$ و منه $v_{n+1} = 2v_n$ و منه $(v_n)$ هندسيّة أساسها $q = 2$ و حدّها الأوّل $v_1 = u_1 + 1$ أي $v_1 = 8$ .

ب) $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ أي $v_n = 8 \times 2^{n-1}$ .

$u_n = v_n - 1$ و منه $u_n = 8 \times 2^{n-1} - 1$ .

ج) $S_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ و منه $S_n = 8 \times \frac{1 - 2^n}{-1}$ أي $S_n = -8(1 - 2^n)$ أي $S_n = 8 \times 2^n - 8$

د) $S_n = 1016$ إذن $8 \times 2^n = 1024$ أي $2^n = 128$ و منه $2^n = 2^7$ و منه $n = 7$ .

## حل التمرين رقم 8 ⟸ للعودة إلى التمرين 8

1/ أ) $u_2 = u_1 + r$ و $u_5 = u_1 + 4r$ ، لدينا $u_2 - 2u_5 = 19$ و منه $u_1 + r - 2(u_1 + 4r) = 19$ و منه $-7r = 21$ و منه $-2 - 7r = 19$ و منه $r = -3$ .

ب) $u_{10} = u_1 + 9r$ و منه $u_{10} = 2 + -27$ و منه $u_{10} = -25$ .

2/ $u_n = u_1 + (n-1)r$ و منه $u_n = 2 - 3n - 3$ و منه $u_n = 5 - 3n$ .

3/ نحل المعادلة : $u_n = -2008$ و منه $5 - 3n = -2008$ و منه : $n = \frac{-2013}{3}$ و منه $n = 671$ أي $u_{671} = -2008$ ، رتبته 671 .

4/ $S = \frac{671}{2}(u_1 + u_{671})$ و منه $S = 335.5 \times (-2006)$ و منه $S = -673013$ .

## حل التمرين رقم 9 ⟸ للعودة إلى التمرين 9

1/ نطبق خاصيّة الوسط الهندسي : أي $u_5 = u_3 \times q^2$ و منه $576 = 144 \times q^2$ و منه $q^2 = \frac{576}{144}$ أي $q^2 = 4$ و منه $u_3 = u_0 \times q^3$ أي $144 = u_0 \times 2^3$ و منه $\boxed{q = 2}$ ، و منه $u_0 = \frac{144}{8}$ و منه $\boxed{u_0 = 18}$ .

2/ $u_n = u_0 \times q^n$ و منه $\boxed{u_n = 18 \times 2^n}$ .

3/ $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ أي $S_n = 18 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$ ومنه $\boxed{S_n = 18 \times 2^{n+1} - 18}$ .

$S_n = 1234$ معناه $18 \times 2^{n+1} - 18 = 1134$ ومنه $18 \times 2^{n+1} = 1152$ و منه $2^{n+1} = 64$ و منه $2^{n+1} = 2^6$ و عليه $n + 1 = 6$ إذن $\boxed{n = 5}$ .

## حل التمرين رقم 10 ⟸ للعودة إلى التمرين 10

I) 1/ لدينا $u_n = u_p + (n-p)r$ مع $p < n$ و منه $u_{15} = u_{10} + 5r$ و منه $46 = 31 + 5r$ و منه $15 = 5r$ و منه $\boxed{r = 3}$ .

و منه $u_0 = 31 - 30$ و منه $u_{10} = u_0 + 10r$ و منه $\boxed{u_0 = 1}$ .

2/ $u_n = u_0 + nr$ و منه $\boxed{u_n = 1 + 3n}$ .

3/ نحل المعادلة : $u_n = 6028$ أي $1 + 3n = 6028$ و منه $3n = 6027$ و منه $n = 2009$ و منه $\boxed{U_{2009} = 6028}$ ؛ رتبته هي 2010 .

II) 1/ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2\times 8^{n+1}}{2\times 8^n} = 8$ و منه $v_{n+1} = 2\times 8^{n+1}$ و منه $(v_n)$ هندسيّة أساسها $q = 8$ و حدّها الأوّل $v_0 = 2$ .

2/ $S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ و منه $S_n = 2\times\frac{1-8^{n+1}}{-7}$ و منه $\boxed{S_n = -\frac{2}{7}\left(1-8^{n+1}\right)}$ .

## حل التمرين رقم 11 للعودة إلى التمرين 11

1/ أ) $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$ ، $u_3 = 7$ ، لدينا $u_3 = u_1 + 2r$ و $u_5 = u_3 + 2r$ و $u_2 = u_1 + r$ و $u_4 = u_3 + r$ و منه $u_1 = u_3 - 2r$ و $u_5 = u_3 + 2r$ أي $u_1 = 7 - 2r$ و $u_5 = 7 + 2r$ و منه $\boxed{T_1 = (7-2r)(7+2r)}$ ، و $u_2 = 7 - r$ و $u_4 = 7 + r$ و منه $\boxed{T_2 = (7-r)(7+r)}$ .

ب) لدينا $T_2 - T_1 = 27$ و منه $(7-r)(7+r) - (7+2r)(7-2r) = 27$ و منه $49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27$ و منه $3r^2 = 27$ و منه $r^2 = 9$ و منه $r = 3$ أو $r = -3$ ، بما أنّ $(u_n)$ متزايدة فإنّ $\boxed{r = 3}$ .

2/ $u_n = u_1 + (n-1)r$ ، و منه $u_3 = u_1 + 2r$ و منه $u_1 = 7 - 2\times 3$ و منه $u_1 = 1$ .

$u_n = 1 + 3n - 3$ أي : $\boxed{u_n = 3n - 2}$ .

ب) $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ و منه $S_n = \frac{n}{2}(1 + 3n - 2)$ أي $\boxed{S_n = \frac{n(3n-1)}{2}}$ أي $\boxed{S_n = \frac{3n^2 - n}{2}}$ .

ج) $S_n = 145$ و منه $3n^2 - n = 290$ أي $3n^2 - n - 290 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانيّة حلولها هي $10; -\frac{29}{3}$ و منه $\boxed{n = 10}$ .

3/ أ) $u_{n+5} = 3(n+5) - 2 = 3n + 13$ .

ب) $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n+13}{n}$ و منه $\boxed{\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}}$ .

ج) $\frac{u_{n+5}}{n}$ عدد طبيعي معناه $n$ يقسم 13 أي $n$ هو أحد قواسم 13 و منه $\boxed{n = 1}$ أو $\boxed{n = 13}$ .

## حل التمرين رقم 12 للعودة إلى التمرين 12

1/ لدينا $u_1 = u_0 + r$ و $u_2 = u_0 + 2r$ ، $u_3 = u_0 + 3r$ و لدينا $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$ و منه $u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r = 34$ و منه $4u_0 + 6r = 34$ و منه $4u_0 = 34 - 6r$ أي $4u_0 = 34 - 6\times 3$ و منه $u_1 = 1$ .

$u_n = 1 + 3n - 3$ أي : $\boxed{u_n = 3n - 2}$ .

ب) $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ و منه $S_n = \frac{n}{2}(1 + 3n - 2)$ أي $\boxed{S_n = \frac{n(3n-1)}{2}}$ أي $\boxed{S_n = \frac{3n^2 - n}{2}}$ .

ج) $S_n = 145$ و منه $3n^2 - n = 290$ أي $3n^2 - n - 290 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانيّة حلولها $10; -\frac{29}{3}$ و منه $\boxed{n = 10}$ .

3/ أ) $u_{n+5} = 3(n+5) - 2 = 3n + 13$ .

ب) $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n+13}{n}$ و منه $\boxed{\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}}$ .

ج) $\frac{u_{n+5}}{n}$ عدد طبيعي معناه $n$ يقسم 13 أي $n$ هو أحد قواسم 13 و منه $\boxed{n = 1}$ أو $\boxed{n = 13}$ .

$30 - 34$ و منه $\boxed{u_0 = 1}$ .

2/ $u_n = u_0 + nr$ و منه $\boxed{u_n = 1 + 5n}$ .

3/ $u_{n+1} = 5n + 6$ و منه $u_{n+1} + u_n - 8n$ لكن $10n + 7 - 8n$ أي $u_{n+1} + u_n - 8n = 2n + 7$ و منه $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$ و منه $2n + 7 = 4033$ و منه $2n = 4026$ و منه $\boxed{n = 2013}$ .

4/ $S = \frac{2014}{2}(u_0 + u_{2013})$ و منه $S = 1007(1 + 10066)$ ومنه $\boxed{S = 10137469}$ .

5/ أ) $v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} + 1 - (2u_n + 1)$ أي $\boxed{v_{n+1} - v_n = 2(u_{n+1} - u_n)}$ ، إذن إتجاه تغيّر $(v_n)$ هو نفسه إتجاه تغيّر $(u_n)$ ، لكن $(u_n)$ متزايدة تماما لأنّ $r > 0$ و منه $(v_n)$ متزايدة تماما .

ب) $S' = v_0 + v_1 + \cdots v_{2013}$ و منه

$S' = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \cdots (2v_{2103} + 1)$

$S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{2013مرة}}$

$S' = 2S + 2013$ و منه $\boxed{S' = 20276951}$ .

## حل التمرين رقم 13 للعودة إلى التمرين 13

1/ أ) بتطبيق خاصية الوسط الحسابي نجد $2u_2 = u_1 + u_3$ و منه $u_1 + u_3 = 2\times\frac{1}{2}$ و منه $\boxed{u_1 + u_3 = 1}$ .

ب) لدينا $\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \\ u_1 + u_3 = 1 \end{cases}$ بالجمع طرفا لطرف بين المعادلتين السابقتين نجد $2u_1 = 6$ و منه $\boxed{u_1 = 3}$ ، لدينا $u_2 = u_1 + r$ و منه $r = u_2 - u_1$ و $r = \frac{1}{2} - 3$ و منه $\boxed{r = -\frac{5}{2}}$ .

2/ $u_n = u_1 + (n-1)r$ و منه $u_n = 3 - \frac{5}{2}n + \frac{5}{2}$ و منه $\boxed{u_n = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}n}$ .

3/ أ) $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ و منه $S_n = \frac{n}{2}\left(\frac{17}{2} - \frac{5}{2}n\right)$ و منه $\boxed{S_n = \frac{n(17-5n)}{4}}$ .

ب) $S_n = -\frac{657}{2}$ و منه $\frac{n(17-5n)}{4} = -\frac{657}{2}$ و منه $\frac{17n - 5n^2}{2} = -657$ و منه $17n - 5n^2 = -1314$ أي $5n^2 - 17n - 1314 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانيّة حلولها $18, -\frac{73}{5}$ و منه $\boxed{n = 18}$ .

4/ أ) بالتشر نجد $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$ .

ب) نضع : $P(n) : T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$ .

◁ من أجل $n=1$ لدينا $T_1=u_1$ أي $T_1=3$ و $3=\frac{1}{6}1(1+1)(14-5)$ و منه $P(1)$ صحيحة .

◁ نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم و نثبت صحة $P(n+1)$ .

$P(n)$ صحيحة معناه $T_n=\frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$ ،

لدينا $T_{n+1}=T_n+(n+1)u_{n+1}$

## حل التمرين رقم 14 للعودة إلى التمرين 14

1/ أ) حسب خاصيّة الوسط الحسابي نكتب $2b=a+c$ و منه $3b=a+b+c$ لكن $a+b+c=9$ و منه $3b=9$ و منه $\boxed{b=3}$ .

$a=b-r$ و $c=b+r$ ومنه $\boxed{a=3-r\ ،\ c=3+r}$ .

ب) لدينا $a\times c=-16$ و منه $(3-r)(3+r)=-16$ و منه $9-r^2=-16$ و منه $r^2=25$ و منه $r=5$ ، $r=-5$ لكن $(u_n)$ متزايدة إذن $\boxed{r=5}$ .

$a=3-r$ و منه $\boxed{a=-2}$ و $\boxed{c=8}$ .

2/ أ) $u_n=u_0+nr$ و منه $\boxed{u_n-2+5n}$ .

ب) $u_{15}=-2+5\times 15$ أي $\boxed{u_{15}=73}$ .

$S=\frac{16}{2}(u_0+u_{15})$ و منه $S=8\times(-2+73)$ و منه $S=8\times 71$ و منه $\boxed{S=568}$ .

3/ لدينا $8v_n-u_n=0$ و منه $v_n=\frac{1}{8}u_n$ و منه $S'=\frac{1}{8}u_0+\frac{1}{8}u_1+\cdots+\frac{1}{8}u_{15}$ و منه $S'=\frac{1}{8}S$ إذن $\boxed{S'=71}$ .

## حل التمرين رقم 15 للعودة إلى التمرين 15

1/ لدينا $U_n=U_p\times q^{n-p}$ مع $p<n$ و منه $U_3=U_1\times q^2$ و منه $320=20\times q^2$ و منه $q^2=16$ و منه $q=4$ أو $q=-4$ لكن المتتالية $(U_n)$ حدودها موجبة إذن $\boxed{q=4}$ ($q$ هو الأساس ) .

$U_1=U_0\times q$ و منه $20=U_0\times 4$ و منه $\boxed{U_0=5}$ .

2/ $U_n=U_0\times q^n$ و منه $\boxed{U_n=5\times 4^n}$ ، الحد السّابع هو $U_6$ حيث $U_6=5\times 4^6$ أي $\boxed{U_6=20480}$ .

3/ أ) $S=U_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ و منه $S=5\times\frac{1-4^{n+1}}{1-4}$ و منه : $\boxed{S=-\frac{5}{3}\left(1-4^{n+1}\right)}$ .

ب) $S'=-\frac{5}{3}\left(1-4^{6+1}\right)$ أي $S'=-\frac{5}{3}\left(1-4^7\right)$ و منه $S'=S'=-\frac{5}{3}\left(1-16384\right)$ أي $\boxed{S'=27305}$ .

## حل التمرين رقم 16 للعودة إلى التمرين 16

1/ $U_1=U_0\times q$ و منه $U_1=2\times 3$ و منه $\boxed{U_1=6}$ ،

$U_2=U_1\times q$ و منه $U_2=6\times 3$ و منه $\boxed{U_2=18}$ .

2/ $U_n=U_0\times q^n$ أي $\boxed{U_n=2\times 3^n}$ و منه $U_5=2\times 3^5$ أي $\boxed{U_5=486}$ .

3/ $U_{n+1}-U_n=2\times 3^{n+1}-2\times 3^n$ أي

$U_{n+1}-U_n=2\times 3^n(3-1)$ أي $\boxed{U_{n+1}-U_n=4\times 3^n}$ و منه $U_{n+1}-U_n>0$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ و منه $(U_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ .

4/ أ) $S_n=U_0\times\frac{1-q^n}{1-q}$ أي $S_n=2\times\frac{1-3^n}{-1}$ أي $\boxed{S_n=2\times 3^n-2}$ .

ب) $2+6+\cdots+486=U_0+U_1+\cdots U_5=S_6$ و منه

$2+6+\cdots+486=2\times 3^6-2$ أي

$\boxed{2+6+\cdots+486=1456}$ .

5/ أ) $3\equiv 3[5]$ ، $3^2\equiv 4[5]$ ، $3^3\equiv 2[5]$ ، $3^4\equiv 1[5]$ .

ب) $3^{4k}=(3^4)^k$ و بما أنّ $3^4\equiv 1[5]$ فإن $(3^4)^k\equiv 1^k[5]$ أي $(3^4)^k\equiv 1[5]$ و منه $\boxed{3^{4k}\equiv 1[5]}$ من أجل كلّ عدد طبيعي $k$ .

6/ $3^n-1$ قابل للقسمة على 3 معناه : $3^n-1\equiv 0[5]$ أي $3^n\equiv 1[5]$ و منه $\boxed{n=4k}$ ، حيث $k$ عدد طبيعي .

و منه قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $3^n-1$ قابل للقسمة على 5 هي $\boxed{n=4k\quad ,k\in\mathbb{N}}$ .

## حل التمرين رقم 17 للعودة إلى التمرين 17

1/ $u_2=2\times 7+1=15$ ، $u_3=2\times 15+1=31$ ،

$u_4=2\times 31+1=63$ .

2/ أ) $v_n=u_n+1$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}+1$ و منه :

$v_{n+1}=2u_n+1+1$ و منه : $v_{n+1}=2u_n+2$ و منه $\boxed{v_{n+1}=2u_n+2}$ و منه $v_{n+1}=2v_n$ و منه $(v_n)$ هندسيّة أساسها $q=2$ و حدّها الأوّل $v_1=u_1+1$ أي $v_1=8$ .

ب) $v_n=v_1\times q^{n-1}$ و منه $\boxed{v_n=8\times 2^{n-1}}$ ،

لدينا $v_n=u_n+1$ و منه $u_n=v_n-1$ و منه

$\boxed{u_n = 8 \times 2^{n-1} - 1}$ .

ج) $S_n = v_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S_n = 8 \times \dfrac{1-2^n}{1-2}$ و منه $\boxed{S_n = 8 \times 2^n - 8}$ .

د) $S_n = 1016$ و منه $8 \times 2^n = 1024$ و منه $2^n = 128$ أي $2^n = 2^7$ و منه $\boxed{n = 7}$ .

## حل التمرين رقم 18 للعودة إلى التمرين 18

أ) 1. لدينا $q = 3$ و $u_3 = u_0 \times q^3$ و $u_0 + u_3 = 28$ و منه $u_0 + u_0 \times 3^3 = 28$ و منه $u_0(1 + 3^3) = 28$ و منه $u_0 \times 28 = 28$ و منه $\boxed{u_0 = 1}$ .

$u_n = u_0 \times q^n$ و منه $\boxed{u_n = 3^n}$ .

2. $S_1 = u_0 \times \dfrac{1-q^{10}}{1-q}$ و منه $S_1 = \dfrac{3^{10}-1}{2}$ أي $\boxed{S_1 = 29524}$ .

ب) 1. $v_n = 1 - 5n$ ، $v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$ و منه $v_{n+1} = -4 - 5n$ و منه $\boxed{v_{n+1} - v_n = -5}$ .

و منه $(v_n)$ هندسيّة أساسها $-5$ و حدّها الأوّل $v_0 = 1$ ، بما أنّ $r < 0$ إذن المتتاليّة $(v_n)$ متناقصة تماما .

2. $S_2 = \dfrac{10}{2}(v_0 + v_9)$ و منه $S_2 = 5(2 - 45)$ أي $\boxed{S_2 = -215}$ .

ج) $k_n = 3^n + 1 - 5n$ و منه $\boxed{k_n = u_n + v_n}$ .

$S_3 = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots (u_9 + v_9)$ و منه $S_3 = S_1 + S_2$ و منه $S_3 = 29524 - 215$ أي $\boxed{29309}$ .

## حل التمرين رقم 19 للعودة إلى التمرين 19

1/ أ) $v_n = v_0 \times q^n$ و منه $\boxed{2 \times 3^n}$ .

ب) $v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$ و منه $\boxed{v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n}$ و منه $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه $(v_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ .

2/ أ) $S_n = v_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ أي $S_n = 2 \times \dfrac{1-3^n}{-2}$ أي $\boxed{S_n = 3^n - 1}$ .

ب) $S_n = 80$ إذن $3^n - 1 = 80$ أي $3^n = 81$ أي $3^n = 3^4$ و منه $\boxed{n = 4}$ .

ج) نضع : $P(n)$ : $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 .

من أجل $n = 0$ لدينا $3^0 - 1 = 0$ و 0 يقبل القسمة على 2 إذن $P(0)$ صحيحة .

نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ و نثبت صحة $P(n+1)$ .

$P(n)$ صحيحة معناه $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 أي يوجد عدد طبيعي $\ell$ بحيث $3^n - 1 = 2\ell$ ، لدينا

$3^{n+1} - 1 = 3^{n+1} - 3 + 2$ أي $3^{n+1} - 1 = 3 \times \underbrace{3^n - 1}_{=2\ell} + 2$ أي $3^{n+1} - 1 = 6\ell + 2$ أي

$3^{n+1} - 1 = 2\underbrace{(3\ell + 1)}_{=k}$ و منه $\boxed{3^{n+1} - 1 = 2k}$

حيث $k$ عدد طبيعي و منه $3^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 2 إذن $P(n+1)$ صحيحة و عليه $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ .