تقويم تشخيصي للمكتسبات

1) هل العدد 4347 يقبل القسمة على 3 وعلى 9؟

2) إذا كان عددا يقبل القسمة على 3 وعلى 9 فهل يقبل القسمة على 27؟

3) هل العدد 11^4-2^4 يقبل القسمة على 117

4) بدون استعمال الآلة الحاسبة وبدون حساب اشرح لماذا 23375427 لا يقبل القسمة على 11372

5) a ، b عددان طبيعيان حيث: $a=bq+r$ و $0\le r<b$ كيف تسمى عملية ايجاد الثنائية $(q;r)$ وكيف يسمى كل عدد من الأعداد الربعة؟

6) باقي قسمة عدد طبيعي على 15 هو 7 . ما هي الأعداد الطبيعية التي يمكن اضافتها للمقسوم دون أن يتغير حاصل القسمة؟

7) أ) عين مجموعة قواسم العدد 210 ومجموعة قواسم العدد 165 ما هو أكبر قاسم مشترك للعدين 210 ، 165

ب) باستعمال خوارزمية اقليدس عين $PGCD(210,165)$

جـ) هل العددان 18 و 33 أوليان فيما بينهما؟ وهلالعددان 99 و 1821 أوليان فيما بينهما؟

د) إذا كان a ، b أوليين فيما بينهما فهل $2a$ ، $3b$ أوليان فيما بينهما؟

8) 1) ضغط عمر ثلاث مرات على نفس الرقم في شاشة حاسبة

بين ان العدد الناتج يقبل القسمة على 111، هل هو مضاعف للعدد 37؟

2) ضغط عمر هذه المرة أولا على رقم a وفي المرة الثانية على b ثم كرر هذه العملية مرتين فحصل على عدد نكتبه $\overline{ababab}$.

أ) بين أن $\overline{ababab}=101010a+10101b$

ب) استنتج أن $\overline{ababab}$ يقبل القسمة على 37

جـ) هل $\overline{ababab}$ مضاعف لـ 273 ؟ ؛ لـ 3367؟

9) نريد اجراء القسمة الاقليدية لـ $3n+2$ على $n+3$ حيث n عدد طبيعي.

أ) بين لماذا لا يمكن ان يكون حاصل القسمة $q\ge 3$

ب) من اجل $n\ge 4$ بين أن حاصل القسمة $q=2$ و الباقي $r=n-4$

جـ) ادرس الحالات $0\le n\le 3$

10) اجب بصحيح او خطأ

1) العدد 119 أولي

2) إذا كان a عدد أولي و $a\ne b$ فإن a ، b أوليان فيما بينهما

3) جداء (مجموع)عددين اوليين هو عدد أولي

4) أي عددين أوليين مختلفين هما عددان أوليان فيما بينهما

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم 01

المذكرة رقم: 01

المستوى : 3 رياضي و 3 تقني.

المادة: رياضيات

ميدان التعلم: تحليل

السنة الدراسية: 2025/2024

المحور : القسمة في $\mathbb{Z}$.

المدة: 01 سا

المحتوى المعرفي : قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ (1).

ثانوية: .... ـباتنة -

الكفاءات المستهدفة : إثبات أن عدد صحيح يقسم عددا صحيحا آخر

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات

مرحلة الاستكشاف والتشخيص

1. التهيئة النفسية :" ا –:"

05 د

يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

نشــاط مقترح

نشاط مقترح : عين كل الثنائيات من الأعداد الصحيحة $a;b$ بحيث $a,b\in\mathbb{Z}$: $a\times b=6$

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

15 د

الأعداد الطبيعية و الاعداد الصحيحة

تعريف: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b=ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف لـ a

أمثلة: $32=8\times4$ و منه $4|32$

$10=(-5)\times(-2)$ و منه $(-5)|10$

$(-55)=(-11)\times5$ و منه $5|(-55)$

$(-45)=(-9)\times5$ و منه $(-9)|(-45)$

ملاحظة: - في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $-a$ نفس القواسم.

- كل عدد صحيح a يقسم 0 لأن: $0=a\times0$ ؛ 0 لا يقسم أي عدد صحيح غير معدوم .

1 ، 1- يقسمان أي عدد صحيح b ؛ كل عدد صحيح غير معدوم b يقبل عددا منتهيا من القواسم.

خواص

خاصية1: a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

البرهان :

لدينا $a\backslash b$ و $b\backslash c$ معناه $b=ka$ و $c=k'b$ ومنه $c=(k'k)a$ وبما أن k و k' عددين صحيحين فإن $k'k$ عدد صحيح وبالتالي $a\backslash c$.

خاصية2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

اذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb

البرهان :

لدينا $a\backslash b$ معناه $b=ka$ و حيث k عدد صحيح فإنه يوجد عدد صحيح m بحيث $mb=mka=(km)a$ وبالتالي $a\backslash mb$.

خاصية3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb

البرهان :

لدينا $a\backslash b$ و معناه $b=ka$ و حيث k عدد صحيح فإنه يوجد عدد صحيح m بحيث $mb=mka=k(ma)$ وبالتالي $ma\backslash mb$.

خاصية4: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n ، a يقسم $mb+nc$

وبصفة خاصة a يقسم $b+c$ و $b-c$.

البرهان :

لدينا $a\backslash b$ و $a\backslash c$ معناه يقسم mb و nc حسب الخاصية 2 يوجد عددين صحيحين k و k' بحيث

$mb+nc=ka+k'a=(k'+k)a$ وبالتالي $a\backslash mb+nc$.

خاصية5: إذا كان a يقسم b و b يقسم a فإن $a=b$ أو $a=-b$

خاصية 6: كان a/b و $a/b\mp c$ فإن a/c .

خاصية 7: إذا كان a/b فإن $|a|\le|b|$.

تمارين تطبيقية:

1) بين أن مجموع ثلاثة أعداد صحيحة متتابعة يقبل القسمة على 3

2) عين قيم العدد الصحيح n بحيث: أ) n قاسم للعدد $n+8$

ب) $n-1$ قاسم للعدد $n+10$

3) أ- كيف نختار العدد الطبيعي n حتىيكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا طبيعيا،

ب- كيف نختار $n\in\mathbb{Z}$ حتىيكون $\frac{3n+8}{n+4}$ عددا صحيحا.

جـ- عين قيم العدد الطبيعي بحيث: $n+1/n^2+1$ ؛ $n+10/n^3+100$

4) k عدد طبيعي، $a=9k+2$ ، $b=12k+1$ اثبت أن القواسم المشتركة الممكنة بين a ، b هي 1، 5

5) أ- عين مجموعة قواسم العدد 56 في $\mathbb{Z}$ ثم حدد كل الأعداد الصحيحة x، y بحيث: $(2x+1)y=56$

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $x^2-y^2=15$

05 د

مرحلة التقويم وإعادة الاستثمار

الوسائل التعليمية	**الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.**
المراجع	**الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة .-**

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم

المذكرة رقم: 02

المستوى : 3 رياضي+ 3 تقني. **المادة:** رياضيات

ميدان التعلم: تحليل **السنة الدراسية:** 2025/2024

المحور : القسمة في $\mathbb{Z}$. **المدة:** 02 سا

المحتوى المعرفي : القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ (2) . **ثانوية:** .... ـباتنة -

◈ **الكفاءات المستهدفة :** ✍ إثبات أن عدد صحيح يقسم عددا صحيحا آخر

◈ **استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين**

ملاحظات و توجيهات	المدة	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المراحل
يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ الأعداد الطبيعية و الاعداد الصحيحة	05 د 15 د	**2. التهيئة النفسية** نشـــاط مقترح 1 – ا ": **نشاط تمهيدي :** نعتبر العددين الصحيحين a و b حيث : $a=47$ و $b=4$ - عين العددين الصحيحين q و r **حيث** : $a=b\times q+r$ و $0\le r\prec b$. **1– القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$** **مبرهنة:** a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة q,r من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0\le r<b$ **ملاحظة:** تسمى عملية البحث عن الثنائية q,r بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b **امثلة:** $37=5\times7+2$ **ملاحظة:** يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b . ونحصل على $a=bq+r$ و $0\le r<\|b\|$. **2– حصر عدد بين مضاعفين متعاقبين لعدد صحيح :** تمهيد : لدينا : $25=3\times7+4$ معناه قسمة 25 على 3 هو 7 والباقي هو 4 لدينا : $0\le4\prec7$ أي $0+3\times7\le4+3\times7\prec7+3\times7$ أي $0+7\times3\le4+7\times3\prec7+7\times3$ أي $7\times3\le25\prec7\times4$ إذن العددين 7×3 و 7×4 مضاعفان متعاقبان للعدد 7 . **مبرهنة:** **من أجل كل عدد صحيح** a **ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم** b. **توجد ثنائية وحيدة** q,r **من الأعداد الصحيحةحيث:** $a=bq+r$ و $bq\le a<b\ q+1$. **مثال:** $a=725$ و $b=91$ تعيين باقي قسمة العدد a على العدد b، ثم ا حصر العدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b .	مرحلة الاستكشاف و التشخيص مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم

الحل : لدينا : $725 = 91\times7+88$

إذن : 7 هو حاصل القسمة و 88 هو باقيها و $91\times7 \leq 725 \prec 91\times8$

أي : $637 \leq 725 \prec 728$

05 د

تمرين(1): عين حصرا للعدد a بين مضاعفين متتابعين للعدد الطبيعي b حيث:

$b = 16; a = 2007$

تمرين(2): عين الأعداد الصحيحة a و b حيث أن : $4a^2 - b^2 = 15$.

يشارك التلاميذ في صياغة التعريف

3- القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ D_a إلى مجموعة قواسم العدد a .

05 د

أمثلة: مجموعة قواسم 6 هي $D_6 = \ 1;2;3;6$.

مجموعة قواسم 0 هي N^* و مجموعة قواسم 1 هي $\{1\}$

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب . $D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b . يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b . و نرمز له بـ $PGCD\ a;b$

ملاحظات: 1. $PGCD\ a;a = a$ و $PGCD\ 1;a = 1$

2. $PGCD\ 0;a = a$ (a غير معدوم) .

3. مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

05 د

مثال: مجموعة قواسم 12 هي $D_{12} = \ 1;2;3;4;6;12$.

مجموعة قواسم 18 هي $D_{18} = \ 1;2;3;6;9;18$.

نلاحظ أن : $D_{12} \cap D_{18} = \{1;2;3;6\}$

إذن : $PGCD(12;18) = 6$

مثال تطبيقي: عين $PGCD(18;30)$

نشاط مقترح 01: ليكن n عددا صحيحا. ليكن العددان الصحيحان $a = 5n-2$ و $b = 2n+3$.

أثبت أن كل قاسما مشتركا للعددين a و b يقسم العدد 19.

نشاط مقترح (2): a عدد صحيح . باقي قسمة a على 12 هو 5 .

1. ما هو باقي قسمة العدد a على 4 ؟
2. ما هو باقي قسمة العدد a على 3 ؟
3. ما هي القيم الممكنة لباقي قسمة العدد a على 15 ؟

3. خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

خاصية1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$. r باقي قسمة a على b

. $PGCD\ a;b = PGCD\ b;r$

البرهان :

نضع $PGCD(a;b) = d$ و $PGCD(b;r) = d'$.

نعلم أن $a = bq + r$ حيث q عدد طبيعي ومنه $r = a - bq$.

d يقسم b وبالتالي d يقسم bq و d يقسم a إذن d يقسم $a-bq$ أي d يقسم r .

d' يقسم b وبالتالي d' يقسم bq و d' يقسم r إذن d' يقسم $bq+r$ أي d' يقسم a

ومنه d' قاسم مشترك للعددين a و b .

إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r .

وبالتالي $d=d'$ أي $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$:

مثال تطبيقي: تعيين $PGCD(128;30)$

لدينا $128=30\times 4+8$ ولدينا $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$ ومنه $PGCD(128;30)=PGCD(30;8)$. يكفي تعيين أكبر عنصر من المجموعة $D_{30}\cap D_8$

خوارزمية إقليدس

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و حيث $a>b$. بقسمة a على b نحصل على $a=bq_1+r_1$ و $0\leq r_1<b$

حيث q_1 و r_1 عددان طبيعيان .

- إذا كان $r_1=0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a;b)=b$.
- إذا كان $r_1\neq 0$ فإن $PGCD(a;b)=PGCD(b;r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b=r_1q_2+r_2$ و $0\leq r_2<r_1$ حيث q_2 و r_2 عددان طبيعيان .
- إذا كان $r_2=0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a;b)=PGCD(b;r_1)=r_1$.
- إذا كان $r_2\neq 0$ فإن $PGCD(a;b)=PGCD(b;r_1)=PGCD(r_1,r_2)$. نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1=r_2q_3+r_3$ و $0\leq r_3<r_2$ حيث q_3 و r_3 عددان طبيعيان .
- نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما . ونسمي r_n آخر باقي غير معدوم وعليه:

$PGCD(a;b)=PGCD(b;r_1)=PGCD(r_1;r_2)=...=PGCD(r_n;0)=r_n$.

هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين تسمى **خوارزمية إقليدس**.

خاصية2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

مثال تطبيقي(1): باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD(163;932)$

مثال تطبيقي(2) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b في كل حالة

1. $a=2520$ و $b=360$ **2.** $a=691$ و $b=2007$

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.
المراجع	الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة -.

المذكرة رقم: 03

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم

المستوى : 3 رياضي+ 3تقني. المـادة: ريـاضيات

ميدان التعلم: تحليل السنة الدراسية: 2025/2024

المـــــــحور : القسمة في $\mathbb{Z}$. المـدة: 02 سا

المـــحتوى المعــرفي : القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ (3). ثانوية: .... ـباتنة -

◈ الكـفـاءات المستهـدفة : استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف و التشخيص	**1- التهيئة النفسية** 1 – 1 **نشاط مقترح :** 1. باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD(150;108)$ ثم عين مجموعة القواسم المشتركة بين العددين 150 و 108 2. أوجد ثنائية $x;y$ من الأعداد الصحيحة بحيث : $150x+108y=6$.	05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم	**خاصية3:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين . k عدد طبيعي غير معدوم. $PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$. **البرهان :** نضع $PGCD(a;b)=d$ و $PGCD(b;r)=d'$. d يقسم a وبالتالي kd يقسم ka و d يقسم b إذن d يقسم $a-bq$ أي d يقسم r. d يقسم b وبالتالي kd يقسم kb وبالتالي kd قاسم مشترك للعددين ka و kb. إذن kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d' ومنه $d'=k'(kd)$ حيث k' عدد طبيعي • d' يقسم ka و kb . ومنه $k'kd$ يقسم ka و kb. وبالتالي $k'd$ يقسم a و b وبالتالي $k'd$ يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b وبالتالي $k'=1$ ومنه $d'=kd$. • إذن : $PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$. **مثال :** $PGCD(308;84)=7\times PGCD(44;12)=7\times 4=28$ **تعريف:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين. يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 **خاصية4:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b. نضع $a=da'$ و $b=db'$. يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما . **البرهان :** a و b عددان طبيعيان غير معدومين و d قاسمهما المشترك الأكبر. • نضع $a=da'$ و $b=db'$ فيكون. $d=PGCD(a;b)=PGCD(da';db')=d\times PGCD(a';b')$. • عكسيا نعتبر : $PGCD(a';b')=1$ وعليه : $PGCD(a;b)=d\times PGCD(a';b')=d$ **تمرين(1):** عين كل الثنائيات $a;b$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :		

يشارك التلاميذ في صياغة التعريف	05 د ⏳	$\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD\ (a;b)=9 \end{cases}$ **تمرين(2):** عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث : $\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD\ (a;b)=6 \end{cases}$ **تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين :** **تعريف:** a و b عددان صحيحان غير معدومين. القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث $d=PGCD\ (\|a\|;\|b\|)$.	
	05 د ⏳	**خاصية:** a و b عددان صحيحان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم. $PGCD\ (ka;kb)=\|k\|PGCD\ (a;b)$ **ملاحظة:** a و b عددان صحيحان غير معدومين. إذا كان b يقسم a فإن $PGCD\ (a;b)=\|b\|$ **مثال:** تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين -250 و -100 **الحل:** لدينا : $PGCD\ (-250;-100)=PGCD\ (250;100)$ يمكن الملاحظة أن $250=50\times5$ و $100=50\times2$ فيكون $PGCD\ (250;100)=50\times PGCD\ (5;2)$ بما أن: $PGCD\ (5;2)=1$. فإن : $PGCD\ (250;100)=50\times1$ و منه $PGCD\ (-250;-100)=50$	
	05 د ⏳	**تمرين تطبيقي 01 :** عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث : $\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD\ (a;b)=9 \end{cases}$ **حل التمرين التطبيقي01 :** نضع $a=9a'$ و $b=9b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما . $a+b=72$ تعني $9a'+9b'=72$ و منه $a'+b'=8$ الثنائيات $(a';b')$ كما هي مبينة في الجدول التالي : و منه مجموعة الثنائيات $(a;b)$ المطلوبة هي : $(45;27)$, $(27;45)$, $(63;9)$, $(9;63)$ <table><tr><td>a'</td><td>1</td><td>7</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>b'</td><td>7</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td></tr></table> **تمرين تطبيقي 02 :** عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث : $\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD\ (a;b)=6 \end{cases}$ **حل التمرين التطبيقي02 :** نضع $a=6a'$ و $b=6b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما . $a\times b=360$ تعني $6a'\times6b'=360$ و منه $a'\times b'=10$ الثنائيات $(a';b')$ كما هي مبينة في الجدول التالي ومنه مجموعة الثنائيات $(a;b)$ المطلوبة هي : $(30;12)$, $(12;30)$, $(60;6)$, $(6;60)$ <table><tr><td>a'</td><td>1</td><td>10</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>b'</td><td>10</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td></tr></table>	
		الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.	الوسائل التعليمية
		الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة .-	المراجع

المذكرة رقم:04

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 رياضي+3تقني.

المادة: ريـاضيات

ميدان التعلم: تحليل

السنة الدراسية: 2025/2024

المـــــــحور : القسمة في $\mathbb{Z}$.

المدة: 01 سا

المــــحتوى المعــرفي : القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ (4).

ثانوية: .... ـباتنة ـ

الكفاءات المستهـدفة : حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف والتشخيص مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم	**التهيئة النفسية** :" ا – 1 **تقويم تشخيصي:** **تمرين (1):** عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث : $\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$ **تمرين(2):** احسب $PGCD(-1720;-3200)$ ثم استنتج $PGCD(-8600;-16000)$ **ملاحظة:** a و b عددان صحيحان غير معدومين. إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a;b)=\|b\|$ **تمرين(3):** n عدد طبيعي . لتكن الأعداد $a=3n^2+12n+20$ ، $b=n+2$ و $c=3n+5$ نريد تعيين باقي قسمة a على b و باقي قسمة a على c . **1.** اثبت ان b يقسم $3n^2+12n+12$ – استنتج ان b يقسم a اذا وفقط اذا كان b يقسم **8** – ما هو باقي قسمة a على b في كل حالة من الحالات الاخرى **2.** تأكد ان $a=(3n+5)(n+2)+n+10$ ما هو باقي قسمة a على c	05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة .-		

المذكرة رقم:05

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم

المستوى : 3 رياضي و 3 تقني.
المادة: رياضيات

ميدان التعلم: تحليل
السنة الدراسية: 2025/2024

المحور : الموافقات في $\mathbb{Z}$.
المدة: 01 سا

المحتوى المعرفي : الموافقات في $\mathbb{Z}$ (1)
ثانوية: .... ـباتنة -

الكفاءات المستهدفة : معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
	التهيئة النفسية نشاط تمهيدي : عين باقي قسمة كل من العددين 128 و 86 . ماذا تلاحظ ؟	05 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
مرحلة الاستكشاف والتشخيص	**نشاط2(ص66)** :" ١ – 1 يقوم طفل بقفزات وفق محور حيث في كل قفزة يقطع 5 وحدات (الوحدة 10 cm) . نسمي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية الأعداد الطبيعية المكونة من الأعداد التي يتوقف فيها الطفل بعد n قفزة علما أنه ينطلق من الوحدة الثانية . 1– عين u_n بدلالة n . 2– ما هو الفرق بين حدين متتابعين من المتتالية u_n ؟ 3– ما هي طبيعة المتتالية u_n ؟ 4– الفرق بين حدين من المتتالية u_n هو مضاعف أي عدد طبيعي ؟ 5– ما هو باقي قسمة حد كيفي من المتتالية u_n على العدد 5 ؟	05 د	
مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم	**الموافقات في $\mathbb{Z}$** 1.تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n . و نرمز $a\equiv b\ \ n$ و نقرأ a يوافق b بترديد n . أمثلة: $7\equiv 1\ \ 3$, $15\equiv 7\ \ 4$ ملاحظات: 1. من أجل كل عدد صحيح x ، $x\equiv 0\ \ 1$, 2. ترميز آخر $a\equiv b\ \ n$. 2.مبرهنة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n ، إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـ n . نتيجة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـ n . تمرين(1): أذكر الصحيحة و الخاطئة من الموافقات التالية: 1) $-32\equiv 18\ \ 10$ ؛ 3) $478\equiv 32\ \ 5$ ؛ 4) $58\equiv -5\ \ 7$ 5) $63^{2}\equiv 14\ \ 5$ ؛ 6) $48^{3}\equiv 36\ \ 7$ 3.خواص: خاصية1: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $n\geq 2$. كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n ، بترديد n. **البرهان:** n عدد صحيح و r باقي قمته على n حيث : $0\leq r\prec n$ و نعلم ان $a=nq+r$ حيث q عدد صحيح ومنه : $a-r=nq$ وبالتالي : $a-r$ مضاعف لـ n: مثال : باقي قسمة 45 على 6 هو 3 إذن : $45\equiv 3\ \ 6$.	05 د 05 د 05 د	
الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة -		

المذكرة رقم:06

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم

المستوى : 3 رياضي+3تقني.
ميدان التعلم: تحليل
المـــــــحور : الموافقات .
المـــــحتوى المعــرفي : الموافقات في $\mathbb{Z}$ (2)

المـادة: ريـاضيات
السنة الدراسية: 2025/2024
المـدة: 01 سا
ثانوية: .... –باتنة -

الكـفاءات المستهـدفة : معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
مرحلة الاستكشاف والتشخيص	(انظر أدناه)	05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

1. التهيئة النفسية تقويم تشخيصي

الموافقات في $\mathbb{Z}$ (تابع)

خاصية2: n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a\equiv a\ n$.

البرهان : a عدد صحيح و a و a لهما نفس باقي في القسمة الاقليدية على n أي : $a\equiv a\ n$

مثال : $3\equiv 3\ 10$ و $-3\equiv -3\ 10$

خاصية 3: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان .
إذا كان $a\equiv b\ n$ فإن $b\equiv a\ n$.

البرهان :
a و b عددان صحيحان. ولدينا $a\equiv b\ n$ معناه $a-b=kn$ مع k عدد صحيح ومنه $b-a=-kn$ بما أن $-k$ عدد صحيح فإن: $b\equiv a\ n$:

مثال : $17\equiv 2\ 5$ أي $2\equiv 17\ 5$.

خاصية 4: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة.
إذا كان ($a\equiv b\ n$ و $b\equiv c\ n$) فإن $a\equiv c\ n$.

البرهان :
n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة.
لدينا $a\equiv b\ n$ و $b\equiv c\ n$ معناه : $a-b=kn$ و $b-c=k'n$ مع k و k' عددان صحيحان منه
بالجمع طرف لطرف نجد : $a-c=(k'+k)n$ وبما أن $k'+k$ عدد صحيح فإن $a\equiv c\ n$.

مثال : $21\equiv 11\ 5$ و $11\equiv 1\ 5$ إذن $21\equiv 1\ 5$.

خاصية 5: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:
إذا كان ($a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$) فإن $a+c\equiv b+d\ n$.

البرهان : لدينا n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة و $a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$ معناه
$a-b=kn$ و $c-d=k'n$ مع k و k' عددان صحيحان منه بالجمع طرف لطرف نجد :
$(a+c)-(b+d)=(k'+k)n$ وبما أن $k'+k$ عدد صحيح فإن $a+c\equiv b+d\ n$.

مثال : $17\equiv 2\ 5$ و $21\equiv 11\ 5$ وعليه $21+17\equiv 11+2\ 5$.

خاصية 6: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:
إذا كان ($a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$) فإن $ac\equiv bd\ n$.

البرهان :
لدينا n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة: و $a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$ معناه
$a-b=kn$ و $c-d=k'n$ مع k و k' عددان صحيحان ومنه :

$$ac-bd=ac-ad+ad-bd$$

$$ac-bd=a(c-d)+d(a-b)=ak'n+dkn=(ak'+dk)n$$

مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم	بما أن $ak' + dk$ عدد صحيح فإن $ac \equiv bd \ n$. مثال : $13 \equiv 3 \ 5$ و $7 \equiv 2 \ 5$ وعليه $13\times 7 \equiv 3\times 2 \ 5$. خاصية 7: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان. من أجل كل عدد صحيح k ، إذا كان $a \equiv b \ n$ فإن $ka \equiv kb \ n$ البرهان : n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان. من أجل كل عدد صحيح k ، لدينا $a \equiv b \ n$ ولدينا $k \equiv k \ n$ بتطبيق الخاصية 6 نجد $ka \equiv kb \ n$. مثال : $11 \equiv 1 \ 2$ وعليه $11\times 3 \equiv 1\times 3 \ 2$. خاصية 8: n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان. إذا كان $a \equiv b \ n$ فإن $a^p \equiv b^p \ n$. البرهان : n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان.حيث $a \equiv b \ n$ نبرهن أن $a^p \equiv b^p \ n$ باستعمال البرهان بالتراجع : من أجل $p=1$ لدينا $a \equiv b \ n$ إذن العلاقة محققة أي صحيحة . نفرض أن $a^k \equiv b^k \ n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $k \geq 1$. بتطبيق الخاصية 7: $a^k \times a \equiv b^k \times b \ n$ أي $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \ n$. إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p إذا كان $a \equiv b \ n$ فإن $a^p \equiv b^p \ n$. مثال : . $7 \equiv 1 \ 2$ وعليه $7^2 \equiv 1^2 \ 2$. --- تمرين (1): عين باقي قسمة **1428−** على **137**. تمرين (2): 1) عين المجموعة E مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث : $x - 2 \equiv -5 \ 9$. 2) عين المجموعة E' مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث : $3x \equiv 5 \ 7$.	05 د 05 د 05 د 05 د	يشارك التلاميذ في صياغة التعريف
الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	**الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة -.**		

المذكرة رقم: 07

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم

المستوى : : 3 رياضي+3 تقني.
المادة: رياضيات

ميدان التعلم: تحليل
السنة الدراسية: 2025/2024

المحور : الموافقات .
المدة: 01 سا

المحتوى المعرفي : الموافقات في $\mathbb{Z}$ (3)
ثانوية: .... ـباتنة -

الكفاءات المستهدفة : معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>الأنشطة المرافقة لكل مرحلة</th><th>المدة</th><th>ملاحظات و توجيهات</th></tr>
<tr><td>مرحلة بناء و ترسيخ المفاهيم</td><td>

1. التهيئة النفسية

تقويم تشخيصي

الموافقات في $\mathbb{Z}$(تابع)

تمرين: n عدد طبيعي غير معدوم.

1. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7
2. استنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^{2010} على7
- برهن أنه من أجل كل عدد n ، $3^{n+6}-3^n$ يقبل القسمة على 7
- استنتج أن 3^{n+6} و 3^n لهما نفس الباقي لقسمتهما على 7
- استنتج أنه من أجل كل عدد n ، العددان 3^n و 7 أوليان فيما بينهما
3. ليكن $U_n=1+3+3^2+...+3^{n-1}$ مع $n\geq 2$
- بين أنه إذا كان U_n يقبل القسمة على 7 فإن 3^n-1 يقبل القسمة على7
- عكسيا ، بين أنه إذا كان 3^n-1 يقبل القسمة على 7 فإن U_n يقبل القسمة على
- استنتج قيم n التي يكون من أجلها U_n يقبل القسمة على7

</td><td>05 د
15 د</td><td>يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ</td></tr>
<tr><td>الوسائل التعليمية</td><td>الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>المراجع</td><td>الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة -.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

المذكرة رقم: 08 — مذكرة رقم — الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 رياضي+ 3تقني. — المـادة: ريـاضيات

ميدان التعلم: تحليل — السنة الدراسية: 2025/2024

المـــــــحور : الموافقات في $\mathbb{Z}$. — المـدة: 01 سا

المـــحتوى المعـرفي : التعداد (4) — ثانوية: .... -باتنة -

الكفـاءات المستهـدفة : نشر عدد طبيعي وفق أساس , الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β.

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات

1. التهيئة النفسية 1 – 1 :"

05 د

نشاط 3(ص 67)

عالميا ، يستعمل نظام التعداد العشري ، حيث يتركب العدد من الأرقام العشر 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ،5 ، 6 ، 7 ، 8 و9 و هذا يسمى النظام ذي الأساس 10 .في الحضارات القديمة استعمل مختلف نظم التعداد ، استعمل البابليون الأساس 60 ؛ الرومانيون الأساس 12 ؛ أمركا الوسطى الأساس 20 إلى آخره ... الآن يستعمل في الحاسوب النظام الثنائي (ذي الأساس 2) .

لكتابة عدد في النظام ذي الأساس 6 يجب استعمال 6 أرقام وهي من 0 إلى 5 .

15 د

يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

1. عين الأعداد a ، b ، c و d بحيث يكون $3959 = a\times10^3 + b\times10^2 + c\times10 + d$.

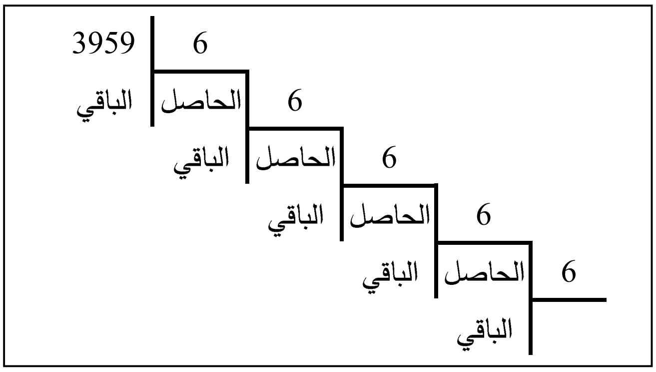
2. أحسب العدد N حيث $N = 3\times6^4 + 0\times6^3 + 1\times6^2 + 5\times6^1 + 5\times6^0$.

الأرقام 3 ، 0 ، 1 ، 5 ، 5 تشكل عددا وهو الكتابة للعدد N في النظام ذي الأساس 6 ونرمز بـ : $N = \overline{30155}$.

3. أنجز القسمات التالية :

شكل العدد المكون من البواقي المحصل عليها .

ماذا تلاحظ ؟



مناقشة النشـــاط

مبرهنة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل

$$a = q x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث $0 < q < x$ و $0 \le r_\alpha < x$ مع $\alpha \in \{0;1;2;\ldots\ldots;n-1\}$.

البرهان: a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي العدد الطبيعي x غير المعدوم و الأكبر تماما من 1 .

ليكن r_0 باقي قسمة a على x . لدينا $a = c_0x + r_0$ حيث c_0 عدد صحيح و $0 \le r_0 < x$.

* إذا كان $c_0 < x$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_0 \geq x$ توجد ثنائية وحيدة $c_1 ; r_1$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_0 = c_1 x + r_1$ مع $0 \leq r_1 < x$ و $0 < c_1 < c_0$.

* إذا كان $c_1 < x$ لدينا $a = c_1 x^2 + r_1 x + r_0$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_1 \geq x$ توجد ثنائية وحيدة $c_2 ; r_2$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_1 = c_2 x + r_2$ مع $0 \leq r_2 < x$ و $0 < c_2 < c_1$.

* نواصل حتى يصبح حاصل القسمة q على x أصغر تماما من x .

نحصل تباعا على ما يلي :

1 ... $a = c_0 x + r_0$ مع $0 \leq r_0 < x$ و $0 < c_0 < a$.

2 ... $c_0 = c_1 x + r_1$ مع $0 \leq r_1 < x$ و $0 < c_1 < c_0$.

3 ... $c_1 = c_2 x + r_2$ مع $0 \leq r_2 < x$ و $0 < c_2 < c_1$.

....

$n-1$ ... $c_{n-3} = c_{n-2} x + r_{n-2}$ مع $0 \leq r_{n-2} < x$ و $0 < c_{n-2} < c_{n-3}$.

n ... $c_{n-2} = c_{n-1} x + r_{n-1}$ مع $0 \leq r_{n-1} < x$ و $0 < c_{n-1} < c_{n-2}$.

نضرب المساواة 1 ، 2 ، 3 ، ... ، $n-1$ ، n في 1 ، x ، x^2 ، ... ، x^{n-2} ، x^{n-1} على الترتيب و بجمع النتائج المحصل عليها طرف بطرف نحصل على :

$a = q x^n + r_{n-1} x^{n-1} + r_{n-2} x^{n-2} + ... + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$ (مع وضع $c_{n-1} = q$) و منه المبرهنة محققة.

مثال : $x = 2$ و $a = 29$.

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

إذن : $q = 1$, $n = 4$, $r_0 = 1$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1$.

2.التعداد ذو الأساس x

قاعدة: x عدد طبيعي أكبر تماما من 1. a عدد طبيعي

يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين :

1) إذا كان $a < x$ فإن a يمثل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $a \geq x$ فإنه من المبرهنة السابقة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$a = q x^n + r_{n-1} x^{n-1} + r_{n-2} x^{n-2} + ... + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$ حيث $0 < q < x$ و

$0 \leq r_\alpha < x$ مع $\alpha \in \{0;1;2;.....;n-1\}$ يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{q r_{n-1} r_{n-2} ... r_1 r_0}$

الكتابة $a = \overline{q r_{n-1} r_{n-2} ... r_1 r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x .

إذا كان $x = 10$ ، نكتب : $a = q r_{n-1} r_{n-2} ... r_1 r_0$ (a مكتوب في النظام العشري)

4- الانتقال من نظام أساسه α الى نظام أساسه β.

طريقة :

N عدد طبيعي مكتوب في نظام أساسه α لكتابته في نظام أساسه β.

- نحول N من نظام أساسه α الى النظام العشري .
- نحول N من النظام العشري الى النظام الذي أساسه β.

تمرين 01: a عدد طبيعي يكتب $\overline{365}$ في النظام ذي الأساس 7 . أكتب a في النظام العشري

الحل:

$a=3\times7^2+6\times7+5=194$ و منه a يكتب 194 في النظام العشري .

تمرين 2: a عدد طبيعي يكتب 2517 في النظام العشري . أكتب a في النظام ذي الأساس 8.

الحل:

$$2517=314\times8+5=39\times8^2+2\times8+5$$
$$2517=4\times8^3+7\times8^2+2\times8+7$$

و منه a يكتب $\overline{4727}$ في النظام ذي الأساس 8 .

تمرين 3: a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}$ في النظام ذي الأساس 8.

1) أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين.

- بالمرور عبر النظام العشري .
- مباشرة

2) أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

الحل:

1) • $a=6\times8^2+4\times8+3=419$ و منه a يكتب 419 في النظام العشري .

$419=209\times2+1=104\times2^2+1\times2+1$.

$419=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

• $a=6\times8^2+4\times8+3$

$a=3\times2\times8^2+2^2\times8+3$.

$a=3\times2^7+2^5+2+1$.

$a=(2+1)\times2^7+2^5+2+1$

ومنه $a=2^8+2^7+2^5+2+1$

$a=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

2) $a=6\times8^2+4\times8+3$

$$a=6\times2^2\times4^2+4\times2\times4+3$$
$$a=6\times4^3+2\times4^2+3$$
$$a=\ 2+4\ \ 4^3+2\times4^2+3$$
$$a=4^4+2\times4^3+2\times4^2+3$$

$a=1\times4^4+2\times4^3+2\times4^2+0\times4+3$.

إذن a يكتب $\overline{12204}$ في النظام ذي الأساس 4.

تمرين تطبيقي a عدد طبيعي يكتب $\overline{365}$ في النظام ذي الأساس **6** . أكتب a في النظام العشري

الوسائل التعليمية	**الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.**
المراجع	**الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة -.**

المذكرة رقم:09 | **مذكرة رقم** | **الأستاذ: بن حولة عثمان**

المستوى : 3 رياضي+3 تقني. — **المادة:** رياضيات

ميدان التعلم: تحليل — **السنة الدراسية:** 2025/2024

المـــــــحور : الموافقات في $\mathbb{Z}$. — **المدة:** 01 سا

المـــــحتوى المعـرفي : التعداد (4). — **ثانوية:** .... ـباتنة -

الكفاءات المستهـدفة : نشر عدد طبيعي وفق أساس , الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β.

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
	2. التهيئة النفسية تقويم تشخيصي " 1 – 1 ": **نشـــاط مقترح** **نشاط مقترح :** (1) a عدد طبيعي يكتب $\overline{365}$ في النظام ذي الأساس **6** . أكتب a في النظام العشري (2) a عدد طبيعي يكتب 7512 في النظام العشري. أكتب a في النظام ذي الأساس 7. (3) a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}$ في النظام ذي الأساس 8 . **1)** أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين: ● بالمرورعبر النظام العشري. ● مباشرة . **2)** أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة . اعمال موجهة (ص74) قابلية القسمة N عدد طبيعي يكتب $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_2\, a_1\, a_0}$ في النظام العشري a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... ، a_{n-1} أعداد طبيعية أصغر تماما من 10 و a_n عدد طبيعي غير معدوم أصغر تماما من 10 . نريد تعيين شروط قابلية القسمة على كل من الأعداد 10, 2, 9, 4, 11 **1** باستعمال الترديد $10\equiv 0\ [10]$، أثبت أن $N\equiv a_0\ [10]$ استنتج شروط قابلية القسمة على 10 ● من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 10: 25810 ، 4328367 ، 851α (ناقش تبعا لقيم الرقم الطبيعي α) . **2** ●باستعمال الترديد $10\equiv 0\ [2]$، أثبت أن $N\equiv a_0\ [2]$ استنتج شروط قابلية القسمة على 2 ● من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 2: 37891 ، 7318964 ، 378488 . **3** ● باستعمال الترديد $10\equiv 1\ [9]$، أثبت أن $N\equiv (a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1+a_0)\ [9]$. ● استنتج شروط قابلية القسمة على 9 . ● من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 9: 25881 ، 275841 ، 624599 ، 8129736 ، 54756α (ناقش تبعا لقيم الرقم الطبيعي α) . **4** ● عين تبعا لقيم العدد الطبيعي p باقي قسمة 10^p على 4 استنتج أن $N\equiv 10a_1+a_0\ [4]$ ● ما هي كتابة $10a_1+a_0$ في النظام العشري ؟ * استنتج شروط قابلية القسمة على 4 . ● من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 4: 38924 ، 74820 ، 85930. ● **بنفس الطريقة استنتج شروط قابلية القسمة على** 16 . **5** ● باستعمال الترديد $10\equiv -1\ [11]$ أثبت أن: $N\equiv (-1)^n a_n+(-1)^n a_{n-1}+...+a_2-a_1+a_0\ [11]$ *استنتج شروط قابلية القسمة على 11 ● من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 11: 3658721 ، 287392358 ، 51829941 ، 7345591 .	05 د 15 د 30 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ يشارك التلاميذ في صياغة التعريف
الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة -.		

المذكرة رقم:10

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 رياضي و 3 تقني رياضي .

المادة: ريـاضيات

ميدان التعلم: تحليل

السنة الدراسية: 2025/2024

المـــــــحور : الموافقات .

المـدة: 01 سا

المــــحتوى المعــرفي : التعداد (4).

ثانوية: ....ـباتنة -

الكفاءات المستهـدفة : حل مسائل تستخدم فيها الموافقات

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
	3. التهيئة النفسية :" ا – 1 اعمال موجهة (ص75) تقويم تشخيصي **حل معادلة من الشكل** $ax+by=c$ **1. دراسة مثال** نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $x;y$: 1 ... $5x-8y=3$. ● تأكد أن $7;4$ حل للمعادلة . ● أثبت أنه إذا كان $x;y$ حلا للمعادلة 1 فإن $5x\equiv 3\ 8$. ● عين الأعداد الصحيحة x حيث : $5x\equiv 3\ 8$. ● أثبت أن كل حلول المعادلة 1 هي من الشكل $8k+7;5k+4$ حيث k عدد صحيح. **2. دراسة الحالة العامة .** نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $x;y$: $ax+by=c$.حيث a ، b ، و c أعداد طبيعية . ● أثبت أن المعادلة تقبل حلول إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما أو c يقبل القسمة على $PGCD\ a;b$. ● أثبت أنه إذا كان $x;y$ حلا للمعادلة فإن $ax\equiv c\ b$. ● أثبت أنه إذا كان $x;y$ حلا للمعادلة فإن $by\equiv c\ a$. **3. تطبيق .** ● حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $x;y$: $7x+12y=5$. ● حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $x;y$: $20x-45y=5$. ● حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $x;y$: $6x-8y=9$.	05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة .-		

المذكرة رقم:11

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم

المستوى : 3 رياضي و تقني رياضي .

المـادة: ريـاضيات

ميدان التعلم: تحليل

السنة الدراسية: 2025/2024

المـــــــحور : القسمة في $\mathbb{Z}$ القسمة في $\mathbb{Z}$.

المـدة:01 سـا

المـــحتوى المعــرفي : الأعداد الأولية

ثانوية: .

الكفـاءات المستهـدفة : التعرف على أولية عدد طبيعي .

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
	4.التهيئة النفسية :" ا - 1 **نشـــاط مقترح** 1) من بين الأعداد الآتية، ما هي الأعداد الأولية:101، 2023، 371075، 641 ، 333927 . 2) حلل الى جداء عوامل أولية الأعداد الآتية: أ) 72 ب) $24\times36\times42$ جـ) $2^3\times3^5\times7\times15\times42^3$ 3) أ- عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين $A=2\times3^3$ و $B=2\times3\times11$ ب- في كل حالة اذكر ان كان العدد مضاعف مشترك للعددين A و B . 4) 2^3 2) $2^2\times3^2\times11$ 3) $2^2\times3\times5$ 4) $2\times3^3\times11$ **مناقشة النشـــاط** **1- الأعداد الأولية .** **تعريف :** القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه . **ملاحظات و نتائج:** • 0 غير أولي لأنه يقبل ما لانهاية من القواسم . • 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو 1 . • 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد . • 2 ، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 هي الأعداد أولية الأصغر من 25 . **خواص .** **خاصية1:** كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $n\geq2$ يقبل على الأقل قاسما أوليا . **البرهان:** ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 . • إذا كان n أوليا فإن n يقسم n والخاصية محققة . • إذا كان n غير أولي فإن n يقبل على الأقل قاسما يختلف عن 1 وعن n . ليكن p أصغر قاسم للعدد n	05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

يختلف عن 1 وعن n. نفرض p غير أولي و منه يوجد عدد طبيعي d يقسم p حيث $1<d<p$ ، و بالتالي d

يقسم n وهذا تناقض (لأن $d<p$ و p أصغر قاسم للعدد n) و منه p عدد أولي والخاصية محققة .

خاصية2: كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 $n\geq 2$ يقبل قاسما أوليا a حيث $a\leq\sqrt{n}$.

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا غير أولي أكبر تماما من 1 .

n يقبل قاسما d يختلف عن 1 وعن n ومنه $n=d\times d'$ حيث d' عدد طبيعي غيرمعدوم $d'\geq 2$ (لأن إذا كان $d'=1$ فإن $d=n$ و هذا تناقض)

نفرض $d\leq d'$ و منه $d^2\leq d\times d'$ أي $d^2\leq n$ و بالتالي $d\leq\sqrt{n}$.

من الخاصية 1: d يقبل على الأقل قاسما أولياً a وهو كذلك قاسم أولي للعدد n .

بما أن لدينا $a\leq d$ و $d\leq\sqrt{n}$ نستنتج أن $a\leq\sqrt{n}$.

خاصية3: مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

البرهان: نستعمل البرهان بالخلف .

نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن p أكبر عدد من مجموعة الأعداد الأولية نسمي N جداء كل الأعداد الأولية من 2 إلى p . $N=2\times3\times5\times7\times...\times p$.

ليكن N' العدد الطبيعي حيث أن: $N'=N+1$. باقي قسمة N' على 2 ، 3 ، 5 ، ...أو p تعطي الباقي دوما 1 . إذن N' غير قابل للقسمة على 2 ، 3 ، 5 ، ...أو p .

إذا كان N' أوليا فإن $N'>p$ و هذا تناقض . إذا كان N' غير أولي فإن N' يقبل قاسما أوليا أكبر من p (الخاصية 1) و هذا تناقض .

إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

تمرين 01: في كل حالة من الحالات الآتية أذكر إن كان العدد أوليا أم لا .

1) 349 ؛ **2)** 341 ؛ **3)** 841

الحل:

1) $\sqrt{349}\approx 18{,}68$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{349}$ هي 2 ، 3، 5، 7، 11، 13، 17

349 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 و 5 ثم $349=7\times49+6$ و $349=11\times31+8$

و $349=13\times26+11$ و $349=17\times20+9$

إذن 349 لا يقبل القسمة على 7، 11، 13 و 17 و منه 349 عدد أولي .

2) $\sqrt{341}\approx 18{,}46$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{341}$ هي 2 ، 3، 5، 7، 11، 13، 17 .

341 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 و 5 ثم $341=7\times48+5$ و $341=11\times31$

إذن 341 يقبل القسمة على 11 و منه 341 غير أولي .

3) $\sqrt{841}=29$ بما أن $\sqrt{841}$ عدد طبيعي فإن 841 غير أولي .

تمرين 02: n عدد طبيعي أكبر تماما من 3 :

ليكن العدد الطبيعي $a=n^2-2n-8$

هل توجد قيم للعدد n يكون من أجلها a عددا أوليا ؟

الحل: a ينعدم من أجل -2 و 4 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ لدينا $a = (n+2)(n-4)$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $n+2 \geq 2$. ثم من جل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 5 ، $n-4 \geq 2$

إذن من أجل $n \geq 6$: a هو جداء العددين $n+2$ و $n-4$ الأكبر تماما من 1 و منه a غير أولي .

تبقى دراسة الحالتين $n=4$ و $n=5$.

- إذا كان $n=4$ ، فإن $a=0$ و منه a غير أولي .
- إذا كان $n=5$ ، فإن $a=7$ و منه a عدد أولي .

إذن a عدد أولي إذا و فقط إذا كان $a=7$

2− تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية.

مبرهنة: كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية .

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

n غير أولي فإن n يقبل القسمة على عدد أولي p_1 $p_1 \geq 2$ على الأقل و منه :

$n = p_1 \times n_1$ حيث $1 < n_1 < n$.

- إذا كان n_1 أوليا فإن المبرهنة محققة.
- إذا كان n_1 غير أولي فإن n_1 يقبل القسمة على عدد أولي p_2 $p_2 \geq 2$ على الأقل و منه :

$n_1 = p_2 \times n_2$ حيث $1 < n_2 < n_1$. و منه $n = p_1 \times p_2 \times n_2$.

نواصل العملية بنفس الطريقة حتى الحصول على $n_i = 1$ (i عدد طبيعي) .

الأعداد n_1 ، n_2 ، ... ، n_i متتالية متناقصة من أعداد طبيعية .

ونحصل على $n = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$ (k عدد طبيعي) و هو تحليل n إلى جداء عوامل أولية. يمكن للأعداد p_1 ، p_2 ، ... ، p_k أن تتكرر في التحليل .وعليه نتحصل على

$n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$

حيث d_1 ، d_2 ، ... ، d_k أعداد طبيعية . نقول أن n محلل إلى جداء عوامل أولية .

ملاحظة : نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية

خاصية: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1.

يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل a.

البرهان: n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 تحليله إلى جداء عوامل أولية

$n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$

- إذا كان l قاسما للعدد n فإن $n = l \times l'$ حيث l' عدد طبيعي. إذن كل قاسم أولي للعدد l هو قاسم أولي للعدد n

و بالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد l يختلف عن العوامل الأولية الموجودة في تحليل n ، و كل عامل أولي في

تحليل l موجود في تحليل n بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل n.

إذن قواسم العدد n هي الأعداد الطبيعية من الشكل $p_1^{d'_1}\times p_2^{d'_2}\times\ldots\times p_k^{d'_k}$ حيث :

$0\le d'_1\le d_1$ ؛ $0\le d'_2\le d_2$ ؛ … ؛ $0\le d'_k\le d_k$.

- عكسيا ليكن l عددا طبيعيا مكتوبا على الشكل $p_1^{d'_1}\times p_2^{d'_2}\times\ldots\times p_k^{d'_k}$.

يمكننا أن نكتب

$$n=l\ \ p_1^{d_1-d'_1}\times p_2^{d_2-d'_2}\times\ldots\times p_k^{d_k-d'_k}$$

لأن

$$p_1^{d_1}\times p_2^{d_2}\times\ldots\times p_k^{d_k}=p_1^{d'_1}\times p_2^{d'_2}\times\ldots\times p_k^{d'_k}\ \ p_1^{d_1-d'_1}\times p_2^{d_2-d'_2}\times\ldots\times p_k^{d_k-d'_k}$$

و منه l يقسم n .

تمرين: **1) حلل العدد 9604 إلى جداء عوامل أولية .**

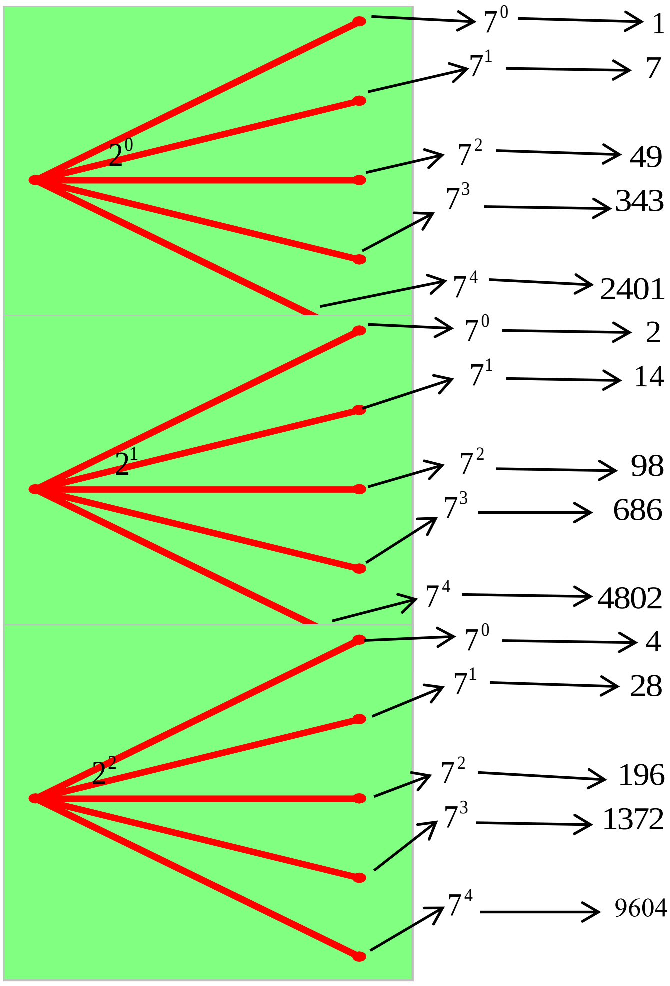
2) عين مجموعة قواسم العدد 9604 .

الحل: 1) $9604=2^2\times 7^4$

9604	2
4802	2
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

العدد 9604 يقبل 15 قاسم

2) لتكن D_{9604} مجموعة قواسم 9604. لإيجاد المجموعة D_{9604} يمكن استعمال الشجرة الآتية .



$$D_{9604}=\{1;2;4;7;14;28;49;98;196;343;686;1372;2401;4802;9604\}$$

المضاعف المشترك الأصغر لعددين.

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمزِ بـ M_a إلى مجموعة مضاعفات العدد a .

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6 = \{0;6;12;18;24;...\}$.

ملاحظة: المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0 .

1. تعريف :

a و b عددان طبيعيان غير معدومين . M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b

يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b . و نرمز له $PPCM(a;b)$.

ملاحظات: $PPCM(a;a) = a$ و $PPCM(1;a) = a$

مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة المضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما .

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6 = \{0;6;12;18;24;30;36;42;48;...\}$.

مجموعة مضاعفات 8 هي $M_8 = \{0;8;16;24;32;40;48;...\}$.

$M_6 \cap M_8 = \{24;48;72;96;...\}$ إذن $PPCM(6;8) = 24$

2. تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين

تعريف:

a و b عددان صحيحان غير معدومين.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m = PPCM(|a|;|b|)$.

خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين

خاصية: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.

$PPCM(ka;kb) = |k| PPCM(a;b)$.

البرهان: a و b عددان صحيحان غير معدومين. نضع $m = PPCM(a;b)$. و منه يوجد عددان صحيحان p و p' حيث $m = p \times a$ و $m = p' \times b$ و منه $km = kp \times a$ و $km = kp' \times b$ و بالتالي $|k|m$ مضاعف مشترك موجب تماما للعددين ka و kb و منه: $(1) \ ...$ $PPCM(ka;kb) \leq |k| PPCM(a;b)$.

نضع $M = PPCM(ka;kb)$ و منه يوجد عددين صحيحين d و d' حيث $M = dk \times a$ و $M = d'k \times b$

ومنه a يقسم $\frac{M}{k}$ و b يقسم $\frac{M}{k}$. ومنه $\frac{M}{|k|}$ هو مضاعف مشترك موجب تماما للعددين a و b

و بالتالي $PPCM(a;b) \leq \frac{M}{|k|}$. و منه : $(2) \ ...$ $|k| PPCM(a;b) \leq PPCM(ka;kb)$.

من 1 و 2 نستنتج أن $PPCM(ka;kb)=|k|PPCM(a;b)$.

تمرين 1: عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 18 .

الحل: نسمي M_{12} مجموعة مضاعفات 12 و M_{18} مجموعة مضاعفات 18. المجموعتان غير منتهيتين .

$M_{12}=\{0;12;24;36;48;60;72;84;96;108;...\}$ و

$M_{18}=\{0;18;36;54;72;90;108;126;144;...\}$.

$M_{12}\cap M_{18}=\{0;36;72;108;144;180;...\}$ ، أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_{12}\cap M_{18}$ هو 36

إذن $PPCM(12;18)=36$.

تمرين 2: عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث $PPCM(56;a)=280$.

الحل:

$56=2^3\times 7$ و $280=2^3\times 5\times 7$.

بما أن $PPCM(56;a)=280$ فإن a يقسم 280 .

إذن تحليل a إلى جداء عوامل أولية من الشكل : $2^\alpha\times 5^\beta\times 7^\gamma$ حيث $0\le\alpha\le 3$ ، $0\le\beta\le 1$ ، $0\le\gamma\le 1$.

زيادة على هذا a لا يقسم 56 و إلا $PPCM(56;a)=56$. ومنه $\beta=1$.

إذن القيم الممكنة للعدد a هي :

$a=2^0\times 5\times 7^0=5$ ؛ $a=2^1\times 5\times 7^0=10$

$a=2^0\times 5\times 7^1=35$ ؛ $a=2^1\times 5\times 7^1=70$

$a=2^2\times 5\times 7^1=140$ ؛ $a=2^2\times 5\times 7^0=20$

$a=2^3\times 5\times 7^0=40$ ؛ $a=2^3\times 5\times 7^1=280$

تمرين 3: n عدد طبيعي غير معدوم .

a و b عددان طبيعيان حيث أن : $a=3^n(11^{n+2}-11^n)$ و $b=11^n(3^{n+1}-3^n)$.

عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

الحل:

$a=3^n\times 11^n\times(11^2-1)=3^n\times 11^n\times 120$.

$b=11^n\times 3^n\times(3-1)=3^n\times 11^n\times 2$.

$PPCM(a;b)=PPCM(3^n\times 11^n\times 120;3^n\times 11^n\times 2)$.

$PPCM(a;b)=3^n\times 11^n PPCM(120;2)$. و $PPCM(120;2)=120$.

إذن $PPCM(a;b)=3^n\times 11^n\times 120$.أي $PPCM(a;b)=2^3\times 3^{n+1}\times 5\times 11^n$.

الوسائل التعليمية	**الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.**
المراجع	**الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة -.**

المذكرة رقم: 12

الأستاذ: بن حولة عثمان

مذكرة رقم

المستوى : 3 رياضي+3تقني.

المادة: رياضيات

ميدان التعلم: تحليل

السنة الدراسية: 2025/2024

المحور : القسمة في $\mathbb{Z}$.

المدة: 01سا

المحتوى المعرفي : القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ (5).

ثانوية: ...... ـباتنة -

الكفاءات المستهدفة : ✍ حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات

1. التهيئة النفسية

05 د

نشـاط مقترح 1 – 1 ":

حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

خاصية: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأصغر أس .

15 د

يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

البرهان: a و b عددان طبيعيان أكبرا من 1. p_1 ، p_2 ، ... ، p_n الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في تحليل b . نضع $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ و $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ... \times p_n^{\beta_n}$.

حيث α_1 ، α_2 ، ... ، α_n ، β_1 ، β_2 ، ... ، β_n أعداد طبيعية .

كل قاسم مشترك d للعددين a و b له تحليل على الشكل :

$d = p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times ... \times p_n^{\gamma_n}$

حيث γ_1 ، γ_2 ، ... ، γ_n أعداد طبيعية و $0 \le \gamma_1 \le \alpha_1$ و $0 \le \gamma_1 \le \beta_1$.

إذا كان δ_1 الأصغر من بين α_1 و β_1 فإن $0 \le \gamma_1 \le \delta_1$ بنفس الطريقة $0 \le \gamma_2 \le \delta_2$ ، ... ، $0 \le \gamma_n \le \delta_n$.

δ_2 الأصغر من بين α_2 و β_2 ، ... ، و δ_n الأصغر من بين α_n و β_n .

يكون d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا كان $\gamma_1 = \delta_1$ ، $\gamma_2 = \delta_2$ ، ... ، $\gamma_n = \delta_n$. إذن $PGCD(a;b) = p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times ... \times p_n^{\gamma_n}$

حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

خاصية: المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأكبر أس.

البرهان: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر من 1. p_1 ، p_2 ، … ، p_n الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في تحليل b . نضع $a=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}$ و $b=p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\times p_n^{\beta_n}$.

حيث α_1 ، α_2 ، … ، α_n ، β_1 ، β_2 ، … ، β_n أعداد طبيعية .

كل مضاعف مشترك m للعددين a و b له تحليل على الشكل :

$m=p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\times p_n^{\lambda_n}$.

حيث λ_1 ، λ_2 ، … ، λ_n أعداد طبيعية و $0\leq\alpha_1\leq\lambda_1$ و $0\leq\beta_1\leq\lambda_1$.

إذا كان ω_1 الأكبر من بين α_1 و β_1 فإن $0\leq\omega_1\leq\lambda_1$ بنفس الطريقة $0\leq\omega_2\leq\lambda_2$ ، … ، $0\leq\omega_n\leq\lambda_n$.

ω_2 الأكبر من بين α_2 و β_2 ، … ، و ω_n الأكبر من بين α_n و β_n .

يكون m هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b إذا كان $\lambda_1=\omega_1$ ، $\lambda_2=\omega_2$ ، … ، $\lambda_n=\omega_n$.

إذن $PPCM(a;b)=p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\times p_n^{\lambda_n}$

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

خاصية: جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر . بعبارة أخرى

$$PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=a\times b$$

البرهان: باستعمال نفس الترميز السابق

$$PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=p_1^{\gamma_1+\lambda_1}\times p_2^{\gamma_2+\lambda_2}\times\ldots\times p_2^{\gamma_n+\lambda_n}$$

و بما أن γ_n هو الأصغر من بين α_n و β_n و λ_n هو الأكبر من بين α_n و β_n

فإن $\gamma_n+\lambda_n=\alpha_n+\beta_n$

و منه $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=p_1^{\alpha_1+\beta_1}\times p_2^{\alpha_2+\beta_2}\times\ldots\times p_2^{\alpha_n+\beta_n}$.

$=a\times b$

تمرين 1: باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية عين القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 5600 و 28800 .

الحل:

نحلل العددين 5600 و 28840 إلى جداء عوامل أولية .

$5600=2^5\times5^2\times7$.

$28800=2^7\times3^2\times5^2$.

$PGCD(5600;28800)=2^5\times5^2=800$.

$PPCM(5600;28800)=2^7\times3^2\times5^2\times7=201600$.

تمرين 2: باستعمال العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين 4530 و 480

***عين المضاعف المشترك الأصغر لهما.**

الحل:

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد $PGCD\ 4530;480 = 30$.

$PPCM\ 4530;480 \times PGCD\ 4530;480 = 4530 \times 480$.

و منه $PPCM\ 4530;480 = \dfrac{4530 \times 480}{PGCD\ 4530;480}$.

$$PPCM\ 4530;480 = \frac{2174400}{30} = 72480$$

تمرين 3: عين كل الثنائيات $a;b$ من الأعداد الطبيعية حلول الجملة :

$$\begin{cases} a \times b = 18000 \\ PPCM\ a;b = 600 \end{cases}$$

الحل:

نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

نصع $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$ حيث a' و b' عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

و نعلم أن $PPCM\ a;b \times PGCD\ a;b = a \times b$. إذن $600 \times d = 18000$ و منه $d = 30$

الجملة تكتب $\begin{cases} d^2 a' \times b' = 18000 \\ d \times a' \times b' = 600 \end{cases}$

و نستنتج أن $a' \times b' = 20$ وبالتالي$(a' = 1$ و $b' = 20)$ أو $(a' = 4$ و $b' = 5)$ أو $(a' = 5$ و $b' = 4)$

أو $(a' = 20$ و $b' = 1)$.

الحلول هي الثنائيات $a;b = 30;600$ ، $a;b = 120;150$ ، $a;b = 150;120$ ، $a;b = 600;30$.

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.
المراجع	الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة .-

المذكرة رقم:13

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 رياضي+3تقني.

المادة: رياضيات

ميدان التعلم: تحليل

السنة الدراسية: 2025/2024

المحور : القسمة في $\mathbb{Z}$.

المدة: 01 سا

المحتوى المعرفي : القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ (5).

ثانوية: .... -

الكفاءات المستهدفة : ✍ حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
		05 د 15 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ

2. التهيئة النفسية ":" 1 - 1

مبرهنة بيزو

مبرهنة: يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث :

$$au+bv=1$$

البرهان: نفرض أنّ a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a;b)=1$ ومنه أحد العددين a أو b غير معدوم . نضع a غير معدوم .

لتكن E مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $au+bv$ حيث u و v عددان صحيحان . المجموعة E غير خالية

لأن a عنصر منها (بأخذ $u=1$ و $v=0$) كذالك $-a$ عنصر من E (بأخذ $u=-1$ و $v=0$) .أحد العددين a أو $-a$ موجب تماما .إذن المجموعة E تحتوي على عدد موجب تماما على الأقل . ليكن m أصغر هذه الأعداد الموجبة تماما ؛ يوجد إذن عددان صحيحان u_0 و v_0 حيث أن $m=au_0+bv_0$.

القسمة الإقليدية للعدد a على m تكتب $a=mq+r$ حيث q و r عددان طبيعيان و $0\leq r<m$. و منه : $r=a-mq$ و بالتالي $r=a-(au_0+bv_0)q=a(1-qu_0)+b(-qv_0)$ و منه r عنصر من المجموعة E (بأخذ $u=1-qu_0$ و $v=-qv_0$) بما أن m أصغر عنصر موجب تماما من E و $0\leq r<m$

فإن $r=0$ و منه $a=mq$ و بالتالي m يقسم a . بنفس الطريقة نثبت أن m يقسم b .

إذن $m=1$ لأن a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما. وهذا يعني وجود u_0 و v_0 حيث $au_0+bv_0=1$

عكسيا : نفرض $au+bv=1$ (a ، b ، u ، v أعداد صحيحة) نضع $d=PGCD(a;b)$. d يقسم a و b و منه d يقسم $au+bv$ و بالتالي d يقسم 1 أي $d=1$ ، و منه a و b أوليان فيما بينهما .

ملاحظة: الثنائية $(u;v)$ ليست وحيدة .مثلا من أجل $a=3$ و $b=2$. $1\times3-1\times2=1$ و $-1\times3+2\times2=1$.

خواص .

خاصية1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث :

$$au+bv=d$$

البرهان: a و b عددان صحيحان غير معدومين و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر. نضع $a=da'$ و $b=db'$ حيث a' و b' عددان صحيحان أوليان فيما بينهما . و منه وحسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث $a'u+b'v=1$. بضرب الطرفين في d، نحصل على: $da'u+db'v=d$ أي $au+bv=d$ وهو المطلوب.

خاصية2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

البرهان: ليكن p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p ، نضع $PGCD(a;p)=d$. بما أن p أولي فإن $d=1$ أو $d=p$ و d لا يقسم a إذن $d=1$ ، و منه p أولي مع a .

خاصية3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$.

البرهان: ليكن a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c ، إذن حسب مبرهنة بيزو توجد أعداد صحيحة . u ، v ، u' ، v' حيث : $au+bv=1$ و $au'+cv'=1$. نضرب طرفا بطرف نحصل على:

$a^2uu'+acuv'+abu'v+bcvv'=1$ أي

$a(auu'+cuv'+bu'v)+bc(vv')=1$ و منه و حسب مبرهنة بيزو a و bc أوليان فيما بينهما .

تمرين01: ليكن n عددا طبيعيا .

أثبت أن العددين $A=4n-3$ و $B=5n-4$ عددان أوليان فيما بينهما .

طريقة: للبرهان على **أن العددين A و B عددان أوليان فيما بينهما يمكن استعمال مبرهنة بيزو .**

الحل: نحسب العدد $5A-4B$.

$$5A-4B=5(4n-3)-4(5n-4)$$

$$5A-4B=20n-15-20n+16$$

$$5A-4B=1$$

ومنه وحسب مبرهنة بيزو A و B عددان أوليان فيما بينهما .

إيتيان بيزو 1730 − 1783

تمرين 02: عين عددين صحيحين u و v حيث أن $135u+55v=5$.

الحل:

$135=55\times2+25$ ، $55=25\times2+5$ ، $25=5\times5$. إذن $PGCD(135;55)=5$

$5=55-25\times2$.

$25=135-55\times2$.

$5=55-(135-55\times2)\times2$.

$5=135\times(-2)+55\times5$. و منه $u=-2$ و $v=5$.

تمرين 03: ليكن n عددا صحيحا .

1) أثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .

2) أثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .

3) استنتج أن $n+1$ و $6n^2+17n+12$ أوليان فيما بينهما .

الحل:

---

1) نلاحظ أن :

$(2n+3)-2(n+1)=1$ إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $2n+3$ و $n+1$ أوليان فيما بينهما .

2) نلاحظ أن :

$(3n+4)-3(n+1)=1$ إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $3n+4$ و $n+1$ أوليان فيما بينهما .

3) نلاحظ أن :

$(2n+3)(3n+4)=6n^2+17n+12$.

بما أن $n+1$ أولي مع كل من $2n+3$ و $3n+4$ فإن $n+1$ أولي مع جدائهما $6n^2+17n+12$

و هذا حسب الخاصية 3 .

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.
المراجع	الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة -.

المذكرة رقم:14

مذكرة رقم

الأستاذ: بن حولة عثمان

المستوى : 3 رياضي+3 تقني. المـادة: ريـاضيات

ميدان التعلم: تحليل السنة الدراسية: 2025/2024

المـــــــحور : القسمة في $\mathbb{Z}$. المـدة: 01 سا

المــــحتوى المعـرفي : القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ (5). ثانوية: .ـباتنة ـ

الكفاءات المستهـدفة : حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

المراحل	الأنشطة المرافقة لكل مرحلة	المدة	ملاحظات و توجيهات
	3. التهيئة النفسية :" ا - 1	05 د	يناقش النشاط من قبل التلاميذ مع توجيه من الأستاذ
		15 د	

مبرهنة غوص.

مبرهنة: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

البرهان: ليكن a و b عددين صحيحين غير معدومين أوليين فيما بينهما . إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$.

ليكن c عددا صحيحا غير معدوم حيث a يقسم الجداء bc.

نضرب طرفي المساواة $au+bv=1$ في c ، نحصل على $cau+cbv=c$.

من المعطيات a يقسم الجداء bc و منه a يقسم الجداء bcv و بما أن a يقسم الجداء acu فإن a يقسم $acu+bcv$ أي a يقسم c .

خواص .

خاصية1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .

إذا كان p يقسم الجداء ab ، فإن p يقسم a أو p يقسم b.

البرهان: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و ليكن p عددا أوليا. حيث p يقسم الجداء ab.

- إذا كان p يقسم a الخاصية محققة.
- إذا كان p لا يقسم a فإن $PGCD(a;p)=1$ لأن p عدد أولي وقاسميه هما 1 و p .

إذن a و p أوليان فيما بينهما . و بما أن p يقسم الجداء ab و هو أولي مع a و حسب مبرهنة غوص فإن p يقسم b . و منه صحة الخاصية .

خاصية2: a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc .

البرهان: لتكن a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة. حيث a مضاعف للعددين b و c .

a مضاعف للعدد b إذن يوجد عدد طبيعي d حيث $a=db$.

a مضاعف للعدد c إذن يوجد عدد طبيعي d' حيث $a=d'c$. إذن $db=d'c$.

c يقسم $d'c$ و منه c يقسم db. بما أن c أولي مع b و حسب مبرهنة غوص فإن c يقسم d. إذن يوجد عدد طبيعي d'' حيث $d=d''c$.

نعوض في $a=db$ نحصل على $a=d''cb$ و منه a مضاعف للعدد bc و منه صحة الخاصية .

مثال: العدد 116916 مضاعف لـ 3 لأن $1+1+6+9+1+6=24$ و 24 مضاعف لـ 3)

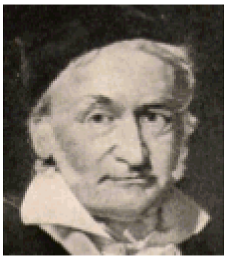
العدد 116916 مضاعف لـ 4 لأن 16 (العدد المكون من الآحاد و العشرات يقبل القسمة على 4) بما أن 3 و 4 أوليين فيما بينهما فإن 116916 مضاعف لـ 3×4 أي مضاعف لـ 12

تمرين 01: 1) عين في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $9x-16y=0$.

2) تأكد أن الثنائية $4;2$ حل للمعادلة ذات المجهول $x;y$: $9x-16y=4$.

3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $x;y$: $9x-16y=4$.

الحل:



مارك غوص $1777-1855$

1) $9x-16y=0$ و منه $9x=16y$.

16 يقسم $16y$ و بالتالي 16 يقسم $9x$

بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم x

نضع $x=16k$ حيث k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $9x=16y$ نحصل على

$9\ 16k\ =16y$ و منه $y=9k$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $16k;9k$ حيث k عدد صحيح .

2) $9\times4-16\times2=36-32=4$ و منه $4;2$ حل للمعادلة $9x-16y=4$.

3) بطرح 4 من طرفي المعادلة $9x-16y=4$ نحصل على $9x-16y-4=0$.

و نعلم أن $9\times4-16\times2=4$ إذن $9x-16y-\ 9\times4-16\times2\ =0$. و منه

$9\ x-4\ =16\ y-2$.

16 يقسم $16(y-2)$ و بالتالي 16 يقسم $9(x-4)$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $x-4$

نضع $x-4=16k$ حيث k عدد صحيح أي $x=16k+4$

بالتعويض في المساواة $9\ x-4\ =16\ y-2$ نحصل على $9\ 16k\ =16(y-2)$ ومنه

$y=9k+2$

الحلول هي الثنائيات من الشكل $16k+4;9k+2$ حيث k عدد صحيح .

تمرين محلول2: ليكن n عددا طبيعيا . أثبت أن العدد $A=n\ 5n+1\ \ 13n+1$ يقبل القسمة على 6.

طريقة: للبرهان على أن العدد A يقبل القسمة على 6 يكفي البرهان أن A يقبل القسمة على 2 و على 3 ، لأن 2 و 3 أوليان فيما بينهما.

الحل: ● نبرهن أن A يقبل القسمة على 2 .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n\equiv0\ 2$ أو $n\equiv1\ 2$.

إذا كان $n\equiv0\ 2$ فإن $A\equiv0\ 2$.

إذا كان $n\equiv1\ 2$ فإن $5n+1\ \equiv6\ 2$ و $6\equiv0\ 2$ و منه $5n+1\ \equiv0\ 2$ و بالتالي $A\equiv0\ 2$

إذن في الحالتين $A\equiv0\ 2$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A\equiv0\ 2$.

● نبرهن أن A يقبل القسمة على 3 .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n\equiv0\ 3$ أو $n\equiv1\ 3$ أو $n\equiv2\ 3$.

إذا كان $n\equiv0\ 3$ فإن $A\equiv0\ 3$.

إذا كان $n\equiv1\ 3$ فإن $5n+1\ \equiv6\ 3$ و $6\equiv0\ 3$ و منه $5n+1\ \equiv0\ 3$ و بالتالي $A\equiv0\ 3$. إذا كان $n\equiv2\ 3$ فإن $13n+1\ \equiv27\ 3$ و $27\equiv0\ 3$ و منه $13n+1\ \equiv0\ 3$

وبالتالي $A\equiv0\ 3$.

إذن في الحالات الثلاث $A\equiv0\ 2$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A\equiv0\ 3$. A يقبل القسمة على 2 وعلى 3 و بما أن 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإن A يقبل القسمة علي 6.

الوسائل التعليمية	الكتاب المدرسي – السبورة – المسطرة- كوس – أقلام - أنترنيت.		
المراجع	الكتاب المدرسي(جزء2) – القسمة في $\mathbb{Z}$ – المنهاج – الوثيقة المرافقة .-		