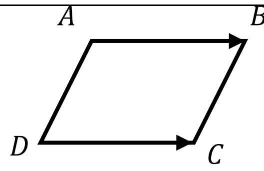
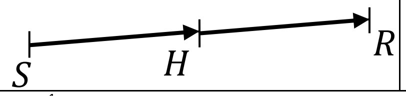
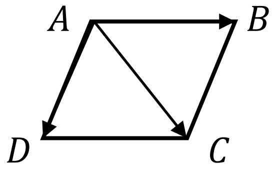
ملخص الأشعة في المُستوى الأشعة في المعلم الأستاذ هلال خالد $BEM2025$

1. إنشاء نقطة صورة نُقطة بانسحاب شُعاعه معلوم (أكتفي بذكر حالتين من ثلاث هما الأهم)

المطلوب	المقصود حسب تعريف الانسحاب	الانشاء
نعتبر A و B و D ثلاث نقط متمايزة وليست في استقامية. القول أن صورة النقطة D بالانسحاب الذي يُحول A إلى B (أي أنشئ C حيث $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$)	الرباعي ABCD متوازي أضلاع.	
نعتبر S و H نقطتان متمايزتان أنشئ R حيث $\overrightarrow{SH}=\overrightarrow{HR}$	يعني أن H منتصف [SR]	

2. إنشاء صورة نقطة بانسحاب باستعمال قاعدة متوازي اضلاع (مجموع شعاعين لهما نفس المبدأ)

المطلوب	المقصود حسب قاعدة متوازي أضلاع	الانشاء
نعتبر A و B و D ثلاث نقط متمايزة ليست في استقامية. انشئ C حيث $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$	فالرباعي ABCD متوازي أضلاع.	

3. إثبات ما تُساويه مجاميع شُعاعية علاقة شال (مجموع شعاعين نهاية الأول هي بداية الثاني)

المطلوب

مثال أثبت أن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AN}$

الاثبات دون وجود شكل هندسي مُنجز

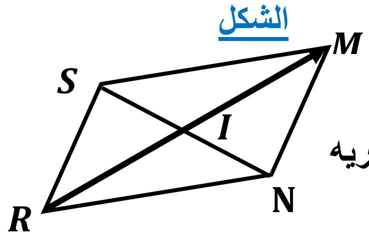
لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (حسب علاقة شال) .... (1)

و$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}$ (حسب علاقة شال) .... (2)

من (1) و(2) نستنتج أنه بالفعل $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AN}$

الشكل

الرباعي SMNR متوازي أضلاع I نقطة تقاطع قطريه



الاثبات بوجود شكل هندسي مُنجز (نوظف علاقة شال و قاعدة متوازي أضلاع وخواص متوازي اضلاع ومنتصف قطعة مُستقيم)

أثبت أن $\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{RI}-\overrightarrow{SI}$.

نعلم أن $\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{RN}$ (حسب علاقة شال)...... (1)

وأن $-\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{IS}$ و $\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IS}=\overrightarrow{RS}$........(2)

من (1) و(2) ينتج $\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{RS}$ (حسب قاعدة متوازي أضلاع)

4. حساب مُركبتي شُعاعين

في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقطتان A و B

حيث $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$. فمركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ ونكتُب $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

مثال أول (حساب مُباشر بحساب المركبتين)

نعتبر النقطتين $(5;-6)$ و$B(-1;2)$ من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

احسُب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

بعد أن نكتُب القانون الذي حفظناه، لابد أن نقوم بهذا العمل على النقطتين $A(\underset{x_A}{5}\;;\underset{y_A}{-6})$ و $B(\underset{x_B}{-1}\;;\underset{y_B}{2})$

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

وبالتعويض $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-5\\2-(-6)\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$

مثال ثان (أوظف حساب مُركبتي شُعاع في إثبات أن رباعي هو متوازي أضلاع)

نعتبر النقط $A(-2;2)$ و $B(2;3)$ و $C(2;-1)$ و $D(-2;-2)$ في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

هل الرباعي ABCD متوازي أضلاع؟

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\3-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-(-2)\\-1-(-2)\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ومنه الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

5. حساب المسافة بين نقطتين في معلم للمستوى

المسافة بين نقطتين A و B في معلم للمستوي م.م.م تُحسب بهذا القانون $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

مثال أول (حساب مباشر)

نعتبر $A(5 ; -6)$ و $B(-1 ; 2)$ نقطتان من م.م.م

احسُب المسافة بين النقطتين A و B

لدينا $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ولدينا $A(5 ; -6)$ و $B(-1 ; 2)$ حيث $x_A = 5$, $y_A = -6$ و $x_B = -1$, $y_B = 2$

وبالتعويض

$$AB = \sqrt{(-1-5)^2 + (2-(-6))^2}$$

إذن $AB = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{36 + 64} = 10$

مثال ثان (توظيفه مثلا لمعرفة أن مثلث هو متساوي ساقين)

$(O; \vec{I}, \vec{J})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

1) نعتبر هذه النقط $A(2; -1)$ و $B(-2 ; 3)$ و $(-4; -3)$ C.

2) احسب AC واستنتج نوع ABC علما أن $BC = 2\sqrt{10}$

لدينا $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

ولدينا $A(2 ; -1)$ و $C(-4 ; -3)$ حيث x_A, y_A و x_B, y_B

وبالتعويض $AC = \sqrt{(-4-2)^2 + (-3-(-1))^2}$

إذن $AC = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

نوع المثلث ABC مثلث متساوي الساقين لأنّ:

$AC = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{2^2 \times 10} = 2\sqrt{10} = BC$

6. حساب إحداثيتي منتصف قطعة مُستقيم

نعتبر نقطتان C و D من معلم متعامد ومتجانس للمُستوي حيث $C(x_C ; y_C)$ و $D(x_D ; y_D)$ ، القول أن M منتصف $[DC]$ فإحداثياها هما: $M(\frac{x_C+x_D}{2} ; \frac{y_C+y_D}{2})$.

مثال أول (حساب مُباشر لأن قطعة المُستقيم المُراد حساب منتصفها معروفة)

نعتبر C و D نقطتان من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس، حيث $C(5 ; -6)$ و $D(-1 ; 2)$

احسُب إحداثيتي النقطة M منتصف $[DC]$

لدينا $M(\frac{x_C+x_D}{2} ; \frac{y_C+y_D}{2})$

ولدينا $C(5 ; -6)$ و $D(-1 ; 2)$ حيث x_C, y_C و x_D, y_D

وبالتعويض $M(\frac{5+(-1)}{2} ; \frac{(-6)+2}{2})$ إذن $M(2 ; -2)$

مثال ثان (حساب إحداثيتا مركز تناظر رباعي أو مركز دائرة مُحيطة بمثلث قائم)

نعتبر النقط $A(-2; 2)$ و $B(2; 3)$ و $C(2; -1)$ و $D(-2; -2)$ في المُستوي المنسوب إلى م.م.م

احسُب إحداثيتا N مركز تناظر متوازي الأضلاع ABCD.

لدينا N مركز تناظر متوازي الأضلاع ABCD، إذن N منتصف قُطراه $[AC]$ و $[BD]$ (قطرا متوازي أضلاع متناصفان).

لدينا $N(\frac{x_C+x_A}{2} ; \frac{y_C+y_A}{2})$ ولدينا $A(-2; 2)$ و $C(2 ; -1)$ حيث x_A, y_A و x_C, y_C

وبالتعويض $N(\frac{-2+2}{2} ; \frac{2+(-1)}{2})$، إذن $N(2 ; -2)$.

7. تساوي شعاعان

نعتبر الشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ حيث أن $\binom{x}{y}$ و $\binom{x'}{y'}$ مركبتاهما على الترتيب أي $\vec{U}\binom{x}{y}$ و $\vec{V}\binom{x'}{y'}$.

✓ فالقول أنهما متساويان $\vec{U} = \vec{V}$ يعني أن $x = x'$ و $y = y'$ (أي أن مركبتاهما متساويتان).

مثال أول (حساب مُباشر)

نعتبر النقط $A(-2; 2)$ و $B(2; 3)$ و $C(2; -1)$ و $D(-2; -2)$ في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

هل الرباعي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ متساويان؟

لدينا $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \overrightarrow{AB}\binom{2-(-2)}{3-2} =$

$\overrightarrow{AB}\binom{4}{1}$

و $\overrightarrow{DC}\binom{x_C-x_D}{y_C-y_D} = \overrightarrow{DC}\binom{2-(-2)}{-1-(-2)} = \overrightarrow{DC}\binom{4}{1}$

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (أي ان الشعاعان متساويان)

مثال ثان (توظيف تساوي شُعاعين في حساب إحداثيتا نقطة)

$(O; \vec{I}, \vec{J})$ م.م.م للمستوي.

نعتبر هذه النقط $A(1 ; -3)$, $B(-5 ; 2)$, $D(-2; 1)$.

احسُب إحداثيتا C صورة D بالانسحاب الذي شُعاعه $\overrightarrow{AB}$.

إذن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، إذن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \overrightarrow{AB}\binom{-5-1}{2-(-3)} = \overrightarrow{AB}\binom{-6}{5}$

و $\overrightarrow{DC}\binom{x_C-x_D}{y_C-y_D} = \overrightarrow{DC}\binom{x_C-(-2)}{y_C-1} = \overrightarrow{DC}\binom{x_C+2}{y_C-1}$

إذن نحل المُعادلتين $x_C + 2 = -6$ و $y_C - 1 = 5$

فنجد $x_C = -8$ و $y_C = 6$

7. حساب إحداثيتي إحدى طرفي قطعة مستقيم عُلم منتصفها

نعتبر A و I نقطتان من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس، حيث $A(0\,;\,-3)$ و I منتصف $[AB]$ بحيث $I(-1\,;2)$. احسُب إحداثيتي النقطة B . لدينا $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$; $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$	ولدينا $A\,(0\,;\,-3)$ و $I(-1\,;\,2)$ x_A y_A و x_I y_I $-1=\frac{0+x_B}{2}$; $2=\frac{-3+y_B}{2}$ وبعد حل المعادلتين نجد: $x_B=-2$ و $y_B=7$ إذن $B(-2\,;7)$

8. إثبات انتماء نقطة لدائرة مُحيطة بمثلث قائم

نحسُب المسافة بين هذه النقطة ومركز الدائرة المُحيطة بهذا المُثلث فإذا كانت تُساوي طول نصف قطر هذه الدائرة فإن هذه النقطة تنتمي بالفعل إلى هذه الدائرة.

9. مُتوازي الأضلاع

<table>
<tr><td rowspan="6">يكون رباعي ABCD متوازي أضلاع إذا تحققت على الأقل واحدة من الستة (6) المقابلة</td><td>1. ضلعين منه متقابلان متقايسان حاملاهما متوازيان. مثلا: $AB=DC$ و $(AB)//(DC)$
التعبير الشعاعي
✓ حسب تعريف الانسحاب
C صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$
بحيث A ، B و D متمايزة ليست في استقامية
✓ حسب قاعدة متوازي أضلاع
C نقطة بحيث $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ بحيث A ، B و D متمايزة ليست في استقامية</td></tr>
<tr><td>2. قُطراه متناصفان($[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المُنتصف نسميه مثلا O).
التعبير الشعاعي
$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$ بحيث A ، B ، C و D و O متمايزة ليست في استقامية</td></tr>
<tr><td>3. زاويتان متتاليتان منه متكاملتان. مثلا: $\widehat{A}+\widehat{B}=180°$.</td></tr>
<tr><td>4. زاويتان مُتقابلتان مُتقايستان. مثلا: $\widehat{A}=\widehat{C}$.</td></tr>
<tr><td>5. كل ضلعان متقابلان حاملاهما متوازيان. أي: $(AB)//(DC)$ و $(AD)//(BC)$.</td></tr>
<tr><td>6. كل ضلعان متقابلان متقايسان. أي: $AB=DC$ و $AD=BC$.</td></tr>
</table>

10. مُتوازيات الأضلاع الخاصة

<table>
<tr><td rowspan="3">ABCD مُتـــــوازي أضـــــلاع</td><td>ضلعان مُتتاليان منه حاملاهما مُتعامدان. مثلا: $(AB)\perp(BC)$.
أو
قُطراه مُتقايسان أي $AC=BD$</td><td>مُستطيل</td></tr>
<tr><td>ضلعان مُتتاليان منه متقايسان. مثلا: $AB=BC$
أو
قُطراه مُتعامدان أي $(AC)\perp(BD)$.</td><td>مُعين</td></tr>
<tr><td>ضلعان مُتتاليان منه متقايسان حاملاهما مُتعامدان.
مثلا: $AB=BC$ و $(AB)\perp(BC)$.
أو
قُطراه مُتقايسان مُتعامدان أي $AC=BD$ و $(AC)\perp(BD)$</td><td>مُربع</td></tr>
</table>

زكاة العلم نشره	دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

- على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد
- على انستغرام: Prof_khaled_*mathpro*

ترجو النجاة من لم تسلُك طريقتها   إن السفينة لا تجري على اليَبس