المستوى:3 رياضيات   **الوسائل المستعملة:** الكتاب المدرسي، السبورة

الوحدة التعلمية: القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ **الأستاذ:** طيبي حسان   المدة: ساعة

الموضوع: قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: - إثبات أن عدد صحيح يقسم عددا صحيحا آخر.

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>مرحلة الانطلاق

مرحلة بناء المعارف</td><td>

التهيئة النفسية:

نشاط مقترح:

عين جميع الثنائيات الصحيحة (a,b) التي تحقق $ab=6$.

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث: $b=ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a

أمثلة: $48=8\times6$ و منه $6|48$

$48=(-8)\times(-6)$ و منه $(-6)|48$

$(-65)=(-13)\times5$ و منه $5|(-65)$

$(-65)=(-13)\times5$ و منه $(-13)|(-65)$

ملاحظة: في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $-a$ نفس القواسم .

1- خواص

خاصية 1: a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

برهان: إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $b=ka$ و $c=k'b$ حيث k و k' عددان صحيحان و منه $c=(kk')a$

وبما أن kk' عدد صحيح فإن a يقسم c .

مثال:

4 يقسم 8 و 8 يقسم 16 ، فإن 4 يقسم 16.

خاصية 2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb

</td><td></td></tr>
</table>

البرهان: إذا كان $a|b$ فإن $b=ka$ حيث k عدد صحيح و منه $mb=mka=(mk)a$ وبما أن mk عددا صحيحا فإن a يقسم mb .

مثال:

3 يقسم 27 ، وعليه 3 يقسم 4×27 .

3 يقسم 108، وعليه 3 يقسم $108\times(-15)$.

خاصية 3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb.

البرهان: إذا كان $a|b$ فإن $b=ka$ حيث k عدد صحيح و منه $mb=mka=k(ma)$ وبما أن k عدد صحيح فإن ma يقسم mb .

مثال:

7 يقسم 21 ، وعليه 5×7 يقسم 5×21.

تمرين تطبيقي:

1) عين الأعداد الصحيحة n حيث : 11 يقسم $n+5$.

2) عين الأعداد الصحيحة بحيث : $3n+8$ يقسم 5.

خاصية 4: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n، a يقسم $mb+nc$.

البرهان: إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $b=ka$ و $c=k'a$ حيث k و k' عددان صحيحان و منه:

$$mb+nc=mka+nk'a$$

$$mb+nc=(mk+nk')a$$

بما أن $mk+nk'$ عدد صحيح فإن a يقسم $mb+nc$.

مثال:

7 يقسم 14 و 21 ، ومنه 7 يقسم $14\times2+3\times21$

تمرين تطبيقي 1:

-1 أنشر العبارة $(x-1)(y-6)$.

-2 عين كل الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق $xy=6x+y$.

تمرين تطبيقي 2 :

عين كل الأعداد الصحيحة n بحيث $4n+1$ يقسم $n+3$.

حل التمرين 02، 03 ص56.

حل التمرين 13،15،16 ص 56.

المستوى: 3 رياضيات — الوسائل المستعملة: الكتـاب المدرسـي، السبـورة

الوحدة التعلمية: القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ — الأستاذ: طـيـبي حسـان — المدة: ساعة

الموضوع: قـابلية القسـمة في $\mathbb{Z}$ — ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: - استعمال القسمة الإقليدية.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق	**التهيئة النفسية:** **نشاط مفترح:** نعتبر الثنائية $(a;b)$ حيث $a=-47$ و $b=4$. ❖ عين الثنائية $(q;r)$ التي تحقق $a=qb+r$ مع $0\le r<b$ ؟	
بناء المعارف	**القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$** **مبرهنة:** a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث : $a=bq+r$ و $0\le r<b$. تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b . **البرهان:** العدد a إما مضاعف لـ b و إما محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b أي يوجد q عدد صحيح وحيد حيث $qb\le a<(q+1)b$ و نستنتج من هذا أن $0\le a-qb<b$. نضع $r=a-qb$ و منه لدينا $a=bq+r$ مع $0\le r<b$. **ملاحظة:** يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b . ونحصل على $a=bq+r$ و $0\le r<\lvert b\rvert$. **مثال:** a عدد صحيح، باقي قسمته على 10 هو 8. ✓ لنعين باقي قسمة a على 5: لدينا $a=10k+8$ مع $k\in\mathbb{Z}$. ومنه $a=5(2k+1)+3$ اذن باقي قسمة a على 5 هو 3. ✓ لنعين باقي قسمة a على 2: لدينا $a=2(5k+4)$، إذن باقي قسمة a على 2 هو 0. **القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:** a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ D_a إلى مجموعة قواسم العدد a . **مثال:** مجموعة قواسم 8 هي $D_8=\{1;2;4;8\}$. **ملاحظات:** مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.	

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .

$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .

ملاحظات: $PGCD(a;a)=a$ و $PGCD(1;a)=1$

$PGCD(0;a)=a$ (a غير معدوم) .

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

تمرين تطبيـقي (1):

❖ عين $PGCD(18;30)$

تمرين تطبيقي (2):

ليكن العددان الصحيحان $a=4n-2$ و $b=3n+1$

❖ أثبت أن كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 10.

الحل: ليكن d قاسم مشترك للعددين a و b ، نريد تعيين صيغة من الشكل $ka+mb$ مستقلة عن العدد n

d يقسم $4b-3a$ أي d يقسم $4(3n+1)-3(4n-2)$ أي d يقسم 10.

تمرين تطبيقي (3):

❖ عين الأعداد الصحيحة a و b حيث أن : $4a^2-b^2=15$.

حل التمرين التطبيقي (3):

نلاحظ أنه إذا كان a و b حلين للمعادلة فإن $-a$ و $-b$ هما كذلك حلين للمعادلة إذن يمكن البحث عن الحلول الموجبة فقط.

$4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$ و منه $(2a-b)(2a+b)=15$

و بالتالي $2a-b$ و $2a+b$ يقسمان 15.

$4a^2-b^2>0$ و بما أننا اعتبرنا $a>0$ و $b>0$ فإن $2a-b$ و $2a+b$ عددان موجبان و

$2a+b>2a-b$.

مجموعة القواسم الموجبة للعدد 15 هي $\{1;3;5;15\}$.

$\begin{cases}2a-b=3\\2a+b=5\end{cases}$ أو $\begin{cases}2a-b=1\\2a+b=15\end{cases}$ و بالتالي $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=4\\b=7\end{cases}$.

إذا اعتبرنا أن الحلول هي الثنائيات $(a;b)$ و انطلاقا من الملاحظة الأولى نستنتج أن الثنائيات الآتية حلول للمعادلة:

$(4;7)$ ، $(-4;-7)$ ، $(4;-7)$ ، $(-4;7)$ ، $(2;1)$ ، $(-2;1)$ ، $(2;-1)$ ، $(-2;-1)$

حل التمرين 18، 20، 21 ص 57.

حل التمرين 57، 68 ص 59

المستوى: 3 رياضيات
الوسائل المستعملة: الكتـاب المدرسـي، السبورة

الوحدة التعلمية: القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$
الأستاذ: طـيـبي حسـان
المدة: ساعة

الموضوع: خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.
ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: - استعمال خوارزمية أقليديس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق	## خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين **خاصية 1:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$. r باقي قسمة a على b . $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$	
مرحلة بناء المعارف	**البرهان:** نضع $PGCD(a;b) = d$ و $PGCD(b;r) = d'$. نعلم أن $a = bq + r$ حيث q عدد طبيعي . و منه $r = a - bq$. d يقسم b وبالتالي d يقسم bq و d يقسم a إذن d يقسم $a - bq$ أي d يقسم r. و منه d قاسم مشترك للعددين b و r . d' يقسم b وبالتالي d' يقسم bq و d' يقسم r إذن d' يقسم $bq + r$ أي d' يقسم a . و منه d' قاسم مشترك للعددين a و b . إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r . وبالتالي $d = d'$ أي $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$. **مثال:** لدينا $PGCD(128;30) = PGCD(30;8)$ ## خوارزمية أوقليدس a و b عددان طبيعيان غير معدومين و حيث $a > b$. بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ و $0 \leq r_1 < b$ حيث q_1 و r_1 عددان طبيعيان . • إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a;b) = b$. • إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 < r_1$ حيث q_2 و r_2 عددان طبيعيان . • إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = r_1$. • إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1,r_2)$. نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ و $0 \leq r_3 < r_2$ حيث q_3 و r_3 عددان طبيعيان . • نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما . ونسمي r_n آخر باقي غير معدوم وعليه: $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1;r_2) = \ldots = PGCD(r_n;0) = r_n$.	

هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين تسمى **خوارزمية أوقليدس.**

خاصية 2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

مثال: تعيين $PGCD(1631,932)$.

$1631 = 932 \times 1 + 699$

$932 = 699 \times 1 + 233$ ومنه: $PGCD(1631;932) = 233$

$699 = 233 \times 3 + 0$

تمرين محلول 1:

عين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b في كل حالة من الحالات الآتية :

1. $a = 8700$ و $b = 9150$.
2. $a = 691$ و $b = 2007$.
3. $a = 1500$ و $b = 250$.

الحل :

$PGCD(8700;9150) = 150$

$PGCD(691;2007) = 1$

$PGCD(1500;250) = 250$

تمرين محلول2 :

أوجد ثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حيث أن : $150x + 108y = 6$.

الحل:

لدينا : : $PGCD(150;108) = 6$.

$24 - 18 = 6$ و منه $24 - (42 - 24) = 6$ أي $24 \times 2 - 42 = 6$.و منه $(108 - 42 \times 2) \times 2 - 42 = 6$

أي $108 \times 2 - 42 \times 5 = 6$ و منه $108 \times 2 - (150 - 108) \times 5 = 6$ أي $108 \times 7 - 150 \times 5 = 6$.

إذن $150 \times (-5) + 108 \times 7 = 6$.

إذن $x = -5$ و $y = 7$

حل التمرين 02، 03 ص56.

حل التمرين 13،15،16 ص 56.

التقويم

ملاحظات حول سير الحصة:..

....

....

المستوى: 3 رياضيات

الوسائل المستعملة: الكتـاب المدرسـي، السبـورة

الوحدة التعلمية: القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

الأستاذ: طـيـبي حسـان

المدة: ساعة

الموضوع: خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق مرحلة بناء المعارف	**التهيئة النفسية:** **خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين** **خاصية 3:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين . k عدد طبيعي غير معدوم. $PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$ **البرهان :** نضع $PGCD(a;b)=d$ و $PGCD(ka;kb)=d'$. d و d' عددان طبيعيان غير معدومين. d يقسم a و منه kd يقسم ka . d يقسم b و منه kd يقسم kb و بالتالي kd قاسم مشترك للعددين ka و kb ، إذن kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d' ومنه يمكن كتابة $d'=k'(kd)$ حيث k' عدد طبيعي . كذالك d' يقسم ka و kb . و منه $k'kd$ يقسم ka و kb و بالتالي $k'd$ يقسم a و b وبالتالي $k'd$ يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و بالتالي $k'=1$. ومنه $d'=kd$. إذن $PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$. **مثال:** $PGCD(308;84)=7\times PGCD(44;12)=7\times 4=27$ **تعريف:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين. يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 . **خاصية4:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b .نضع $a=da'$ و $b=db'$. يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما . **البرهان:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين و d قاسمهما المشترك الأكبر. • نضع $a=da'$ و $b=db'$	

$d=PGCD(a;b)=PGCD(da';db')$ و منه
$=d\times PGCD(a';b')$

بما أن d غير معدوم فإن : $PGCD(a';b')=1$

- المسألة العكسية . نعتبر $PGCD(a';b')=1$.

$PGCD(a;b)=d\times PGCD(a';b')=d$

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

تعريف: a و b عددان صحيحان غير معدومين.

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث $d=PGCD(|a|;|b|)$.

خاصية: a و b عددان صحيحان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم.

$$PGCD(ka;kb)=|k|PGCD(a;b)$$

ملاحظة: a و b عددان صحيحان غير معدومين.

إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a;b)=|b|$

تمرين محلول1: عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a+b=66 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a=6a'$ و $b=6b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$a+b=66$ تعني $6a'+6b'=66$ و منه $a'+b'=11$

$(a';b')\in\{(1;10),(2;9),(3;8),(4;7),(5;6),(6;5),(7;4),(8;3),(9;2),(10;1)\}$

و منه مجموعة الحلول هي :

$\{(6;60),(12;54),(18;48),(24;42),(30;36),(36;30),(42;24),(48;18),(54;12),(60;6)\}$

تمرين محلول2: عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a\times b=900 \\ PGCD(a;b)=5 \end{cases}$$

نضع $a=5a'$ و $b=5b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$a\times b=900$ تعني $5a'\times 5b'=900$ و منه $a'\times b'=36$

$(a';b')\in\{(1;36),(4;9),(9;4),(36;1)\}$

و منه مجموعة الحلول هي : $\{(5;180),(20;45),(180;5),(45;20)\}$

تمرين محلول3: عين القاسم المشترك الأكبر للعددين -1440 و -448

الحل:

	$PGCD(-1440;-448)=PGCD(1440;448)$ يمكن الملاحظة أن $1440=32\times45$ و $448=32\times14$ $PGCD(1440;448)=32\times PGCD(45;14)$ وبعد حساب $PGCD(45;14)$ نجده مساوٍ لـ 1. إذن $PGCD(1440;448)=32\times PGCD(45;14)=32$ و منه $PGCD(-1440;-448)=32$ حل التمرين 36، 41 ص56،57. تمارين للمنزل 81،83،80 ص 60. تمارين للمزل 93،90،92 ص61. ملاحظات حول سير الحصة:..		التقويم

المستوى:3 رياضيات

الوسائل المستعملة: الكتاب المدرسي، السبورة

الوحدة التعلمية: الموافقات في $\mathbb{Z}$.

الأستاذ: طيبي حسان

المدة: ساعة

الموضوع: الموافقات في $\mathbb{Z}$.

الكفاءة المستهدفة: معرفة واستعمال خواص الموفقات في $\mathbb{Z}$.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق	**التهيئة النفسية:** **نشاط مقترح:** • عين باقي قسمة كل من العددين 128 و 86 على 7. ماذا تلاحظ ؟ ليكن n عدد طبيعي غير معدوم. • بين أنه إذا كان لـ a و b نفس باقي القسمة على n فإن $a-b$ مضاعف لـ n.	
مرحلة بناء المعارف	**الموافقات في $\mathbb{Z}$** **تعريف:** n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n. و نرمز $a\equiv b[n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n . **أمثلة:** $27\equiv 92[5]$ ، $12\equiv 34[11]$ ، $24\equiv 3[7]$ ، $-20\equiv 1[7]$ ، $-59\equiv -3[8]$. **ملاحظات:** من أجل كل عدد صحيح x ، $x\equiv 0[1]$. ترميز آخر $a\equiv b(n)$. **مبرهنة:** a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n ، إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـ n . **البرهان:** نفرض أن a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n . و منه نضع $a=nq+r$ و $b=nq'+r$ حيث q و q' عددين صحيحين و $0\le r<n$. $a-b=nq+r-nq'-r$ $=n(q-q')$ بما أن $q-q'$ عدد صحيح فإن $a-b$ مضاعف لـ n . **عكسيا :** نفرض $a-b$ مضاعف لـ n . يوجد عدد صحيح k حيث أن $a-b=kn$. ليكن r باقي قسمة b على n . لدينا $b=nq+r$. حيث q عدد صحيح و $0\le r<n$. و منه $a=b+kn=nq+r+kn=(q+k)n+r$. بما أن $q+k$ عدد صحيح و $0\le r<n$ فإن r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n .	

ومنه a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

نتيجة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـ n .

مثال: $26 \equiv 11[5]$ لأن $26-11=15$ و 15 مضاعف لـ 5.

تمرين تطبيقي:

في الترديدات الآتية أذكر الصحيحة و الخاطئة .

1) $26 \equiv 11[5]$ ؛ 2) $-32 \equiv 18[10]$ ؛ 3) $478 \equiv 32[5]$ ؛ 4) $58 \equiv -5[7]$

5) $63^2 \equiv 14[5]$ ؛ 6) $144 \equiv 11[19]$ ؛ 7) $131^2 \equiv 25[12]$ ؛ 8) $48^3 \equiv 36[7]$

الحل:

1) $26-11=15$ و $15=3\times5$ إذن $26 \equiv 11[5]$ صحيحة .

2) $-32-18=-50$ و $-50=(-5)\times10$ إذن $-32 \equiv 18[10]$ صحيحة .

3) $478-32=446$ و $446=89\times5+1$ إذن $478 \equiv 32[5]$ خاطئة .

4) $58+5=63$ و $63=9\times7$ إذن $58 \equiv -5[7]$ صحيحة .

5) $63=12\times5+3$ و $63^2=(12\times5+3)^2$ و منه $63^2=12^2\times5^2+2\times12\times5\times3+9$

أي $63^2=5(720+71)+14$ إذن $63^2 \equiv 14[5]$ صحيحة .

6) $144=19\times7+11$ و $11=19\times0+11$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 19 إذن $144 \equiv 11[19]$ صحيحة .

7) $131^2=1430\times12+1$ و $25=2\times12+1$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 12 إذن $131^2 \equiv 25[12]$ صحيحة.

8) $48^3=15799\times7+6$ و $36=5\times7+1$ لم نتحصل على نفس الباقي في القسمة على 7 إذن $131^2 \equiv 25[12]$ خاطئة.

تمارين للمنزل 4،5 ص78

التقويم

ملاحظات حول سير الحصة:...

المستوى: 3 رياضيات — الوسائل المستعملة: الكتاب المدرسي.

الوحدة التعلمية: الموافقات في $\mathbb{Z}$ — الأستاذ: طيبي حسان — المدة: 02 ساعة

الموضوع: خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

الكفاءة المستهدفة: تعاريف وخواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق	**التهيئة النفسية:** **خـــواص الموافقات في $\mathbb{Z}$** **خاصية 1:** n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$. كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n ، بترديد n .	
مرحلة بناء المعارف	**البرهان:** a عدد صحيح و r باقي قسمته على n. $0 \leq r < n$ نعلم أن $a = nq + r$ حيث عدد صحيح . و منه $a - r = nq$. و بالتالي $a - r$ مضاعف لِ n . **مثال:** باقي قسمة 19 على 8 هو 3 ، إذن $2019 \equiv 3[8]$. **خاصية 2:** n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a \equiv a[n]$. **البرهان:** a عدد صحيح . a و a لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n و منه $a \equiv a[n]$. **مثال:** $4 \equiv 4[8]$ **خاصية 3:** n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان . إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$. **البرهان:** a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv b[n]$. $a \equiv b[n]$ يعني $a - b = k\,n$ (k عدد صحيح) ومنه $b - a = -k\,n$. بما أن $-k$ عدد صحيح فإن $b \equiv a[n]$. **مثال:** $2019 \equiv 3[8]$ ومنه $3 \equiv 2019[8]$. **خاصية 4:** n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة. إذا كان $(a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n])$ فإن $a \equiv c[n]$. **البرهان:** a ، b و c أعداد صحيحة حيث أن $(a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n])$. $(a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n])$ يعني ($a - b = k\,n$ و $b - c = k'n$) (k و k' عددان صحيحان) و منه و بالجمع نحصل على $a - c = (k + k')n$. وبما أن $k + k'$ عدد صحيح فإن $a \equiv c[n]$. **مثال:** $26 \equiv 11[5]$ و $11 \equiv 1[5]$ ومنه $26 \equiv 1[5]$.	

خاصية 5: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:

إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن $a+c \equiv b+d[n]$.

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$).

($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

ومنه و بالجمع نحصل على $(a+c)-(b+d)=(k+k')n$.بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a+c \equiv b+d[n]$.

مثال:

$27 \equiv 11[4]$ و $23 \equiv 15[4]$ إذن $27+23 \equiv 15+11[4]$

خاصية 6: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:

إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن $ac \equiv bd[n]$.

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$).

($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

لدينا $ac-bd=ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b)=ak'n+dkn=(ak'+dk)n$

بما أن $ak'+dk$ عدد صحيح فإن $ac \equiv bd[n]$.

مثال:

$13 \equiv 5[4]$ و $7 \equiv 3[4]$ ومنه $13\times 7 \equiv 5\times 3[4]$.

خاصية 7: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان.

من أجل كل عدد صحيح k ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ka \equiv kb[n]$.

البرهان: a و b عددان صحيحان حيث أن $a \equiv b[n]$. ليكن k عددا صحيحا .

$k \equiv k[n]$ إذن بتطبيق الخاصية 6 نحصل على $ka \equiv kb[n]$.

مثال:

$11 \equiv 3[4]$ ومنه $11\times 3 \equiv 3\times 3[4]$

خاصية 8: n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$.

البرهان: a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv b[n]$. (نستعمل البرهان بالتراجع)

من أجل $p=1$ لدينا $a \equiv b[n]$ تردیدة صحيحة (من المعطيات)

نفرض $a^k \equiv b^k[n]$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $k \geq 1$.

بتطبيق الخاصية 7 ، $a^k \times a \equiv b^k \times b[n]$ أي $a^{k+1} \equiv b^{k+1}[n]$. إذن الخاصية وراثية ابتداء من $p=1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p . إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$.

مثال:

$5 \equiv 1[2]$ ومنه $5^{2019} \equiv 1^{2019}[2]$

تمرين محلول 1:

1) عين المجموعة L مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $x+4 \equiv 2[7]$.

2) عين المجموعة L' مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $5x \equiv 3[7]$.

الحل:

1) في $x+4 \equiv 2[7]$ نطبق الخاصية 5 و منه $x+4-4 \equiv 2-4[7]$ و بالتالي $x \equiv -2[7]$

وبما أن $-2 \equiv 5[7]$ فإن $x \equiv 5[7]$ (الخاصية 4) .

عكسيا فأن $(7k+5)+4 \equiv 2[7]$ لأن $7 \equiv 0[7]$ و $9 \equiv 2[7]$.

إذن المجموعة L هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+5$ حيث k عدد صحيح

2) x عدد صحيح يمكن أن يوافق كل بواقي القسمة على 7 ، ثم نطبق الخاصية 7 .

نلخص النتائج في الجدول التالي.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$5x \equiv$	0	5	3	1	6	4	2

عكسيا فإن $5(7k+2) \equiv 3[7]$ لأن $35 \equiv 0[7]$ و $10 \equiv 3[7]$.

إذن المجموعة L' هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+2$ حيث k عدد صحيح .

تمرين تطبيقي 2:

1) أ ـ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $\left(63 \times 9^{2001} - 7^{1422}\right)$ على 10.

2) أ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}[10]$.

ب ـ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$

تمارين للمنزل 89،94 ص 83.

ملاحظات حول سير الحصة:..

....

....

التقويم

المستوى:3 رياضيات | **الوسائل المستعملة**: الكتـاب المدرسـي، السبورة

الوحدة التعلمية: القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ | **الأستاذ**: طـيـبي حسـان | **المدة**: 01 ساعة

الموضوع: حل معادلات من الشكل $ax+by=c$ | ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: - معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق	**حل معادلات من الشكل $ax+by=c$** نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $5x-8y=3 \dots(1)$. • تأكد أن $(7;4)$ حل للمعادلة . • أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $5x\equiv 3[8]$. • عين الأعداد الصحيحة x حيث : $5x\equiv 3[8]$. • أثبت أن كل حلول المعادلة (1) هي من الشكل $(8k+7;5k+4)$ حيث k عدد صحيح.	
مرحلة بناء المعارف	**مبرهنة:** الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $ax+by=c$ حلا هو أن يكون القاسم المشترك للعددين a و b يقسم c. **نتيجة:** إذا كانت الثنائية $(x_0;y_0)$ حلا للمعادلة $ax+by=c$ فان مجموعة الحلول هي مجموعة الثنائيات $(x;y)$ بحيث $x=x_0+k\frac{b}{d}$ و $y=y_0-k\frac{a}{d}$ ، مع k عدد صحيح و $a'=\frac{a}{d}$ و $b'=\frac{b}{d}$ حيث **التفسير الهندسي:** في معلم متعامد ومتجانس للمستوى المعادلة $ax+by=c$ هي معادلة مستقيم (D) حل المعادلة $ax+by=c$ يؤول الى البحث عن النقط من (D) بحيث تكون إحداثياتها صحيحة.	
التقويم	**تمرين تطبيقي:** حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x+12y=5$. • حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $20x-45y=5$. • حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $6x-8y=9$. **ملاحظات حول سير الحصة:**..	

المستوى:3 رياضيات — الوسائل المستعملة: الكتـاب المدرسـي.

الوحدة التعلمية: الموافقات في $\mathbb{Z}$ — الأستاذ: طـيبي حسـان — المدة: 02 ساعة

الموضوع: التعداد . — ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: -نـشر عدد طبيعي وفق أساس، الانتقال من نظام اساسه α إلى نظام اساسه β.

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>مرحلة الانطلاق</td><td>

التهيئة النفسية:

نشاط مقترح: نعتبر $a=719$ و $x=5$

1- جد a_0، b_1 باقي و حاصل قسمة a على x.

2- إذا كان $b_1 \geq x$، جد a_1,b_2 حاصل وباقي قسمة b_1 على x

3- واصل عملية القسمة حتى يصبح حاصل القسمة اصغر تماما من x.

4- بين أن $a=a_0+a_1x^1+a_2x^2...$ وأكتب 719 بدلالة $5^0,5^1,5^2...$

</td><td></td></tr>
<tr><td>مرحلة بناء المعارف</td><td>

التــعداد

مبرهنة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$ حيث:

$0<q<x$ و $0\leq r_\alpha<x$ مع $\alpha\in\{0;1;2;.....;n-1\}$

البرهان: a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي العدد الطبيعي x غير المعدوم و الأكبر تماما من 1 .

ليكن r_0 باقي قسمة a على x . لدينا $a=c_0x+r_0$ حيث c_0 عدد صحيح و $0\leq r_0<x$.

* إذا كان $c_0<x$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_0\geq x$ توجد ثنائية وحيدة $(c_1;r_1)$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_0=c_1x+r_1$ مع $0\leq r_1<x$ و $0<c_1<c_0$.

* إذا كان $c_1<x$ لدينا $a=c_1x^2+r_1x+r_0$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_1\geq x$ توجد ثنائية وحيدة $(c_2;r_2)$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_1=c_2x+r_2$ مع $0\leq r_2<x$ و $0<c_2<c_1$.

* نواصل حتى يصبح حاصل القسمة q على x أصغر تماما من x .

نحصل تباعا على ما يلي :

(1) ... $a=c_0x+r_0$ مع $0\leq r_0<x$ و $0<c_0<a$.

(2) ... $c_0=c_1x+r_1$ مع $0\leq r_1<x$ و $0<c_1<c_0$.

(3) ... $c_1=c_2x+r_2$ مع $0\leq r_2<x$ و $0<c_2<c_1$.

....

$(n-1)$ ... $c_{n-3}=c_{n-2}x+r_{n-2}$ مع $0\leq r_{n-2}<x$ و $0<c_{n-2}<c_{n-3}$.

</td><td></td></tr>
</table>

(n) ... $c_{n-2}=c_{n-1}x+r_{n-1}$ مع $0\le r_{n-1}<x$ و $0<c_{n-1}<c_{n-2}$.

نضرب المساواة (1)، (2)، (3) ، ... ، $(n-1)$، (n) في 1 ، x، x^2 ، ... ، x^{n-2} ، x^{n-1} على الترتيب و بجمع النتائج المحصل عليها طرف بطرف نحصل على :

$a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$ (مع وضع $c_{n-1}=q$) و منه المبرهنة محققة.

التعداد ذو الأساس x

قاعدة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين:

1) إذا كان $a<x$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $a\ge x$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$$a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$$ حيث

$0<q<x$ و $0\le r_\alpha<x$ مع $\alpha\in\{0;1;2;.....;n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي $a=\overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0}$.

الكتابة $a=\overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x. إذا كان $x=10$ ، نكتب : $a=q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0$

تمرين محلول1: a عدد طبيعي يكتب $\overline{365}$ في النظام ذي الأساس 7 . أكتب a في النظام العشري .

الحل:

$a=3\times7^2+6\times7+5=194$ و منه a يكتب 194 في النظام العشري .

تمرين محلول2: a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}$ في النظام ذي الأساس 8.

1) أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين.
- بالمرور عبر النظام العشري .
- مباشرة .

2) أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

الحل:

1) • $a=6\times8^2+4\times8+3=419$ و منه a يكتب 419 في النظام العشري .

$419=209\times2+1=104\times2^2+1\times2+1$.

$419=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

• $a=6\times8^2+4\times8+3$

$a=3\times2\times8^2+2^2\times8+3$.

$a=3\times2^7+2^5+2+1$.

$a=(2+1)\times 2^7+2^5+2+1$

$a=2^8+2^7+2^5+2+1$

و منه $a=1\times 2^8+1\times 2^7+0\times 2^6+1\times 2^5+0\times 2^4+0\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

2) $a=6\times 8^2+4\times 8+3$

$a=6\times 2^2\times 4^2+4\times 2\times 4+3$

$a=6\times 4^3+2\times 4^2+3$

$a=(2+4)4^3+2\times 4^2+3$

$a=4^4+2\times 4^3+2\times 4^2+3$

$a=1\times 4^4+2\times 4^3+2\times 4^2+0\times 4+3$.

إذن a يكتب $\overline{12204}$ في النظام ذي الأساس 4.

التقويم

حل التمارين : 95،96،100 ص 83-84

تمرين للمنزل 102 ص 84

ملاحظات حول سير الحصة:..

....

....

المستوى: 3 رياضيات

الوسائل المستعملة: الكتـاب المدرسـي.

الوحدة التعلمية: الأعداد الأولية

الأستاذ: طـيـبي حسـان

المدة: 02 ساعة

الموضوع: الأعداد الأولية.

ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: -التعرف على أولية عدد طبيعي.

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الانطلاق

التهيئة النفسية:

الأعداد الأولية

تعريف: القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه .

ملاحظات و نتائج:

- 0 غير أولي لأنه يقبل ما لانهاية من القواسم .
- 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو 1.
- 2 هو العدد الأوّلي الزوجي الوحيد.
- 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 هي الأعداد أولية الأصغر من 25 .

مرحلة بناء المعارف

خـــواص

خاصية 1: كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل على الأقل قاسما أوليا .

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

- إذا كان n أوليا فإن n يقسم n والخاصية محققة .
- إذا كان n غير أولي فإن n يقبل على الأقل قاسما يختلف عن 1 وعن n . ليكن p أصغر قاسم للعدد n يختلف عن 1 وعن n.نفرض p غير أولي و منه يوجد عدد طبيعي d يقسم p حيث $1 < d < p$. و بالتالي d يقسم n وهذا تناقض (لأن $d < p$ و p أصغر قاسم للعدد n) و منه p عدد أولي والخاصية محققة .

مثال:

17 عدد طبيعي أكبر تماما من 1، فهو يقبل قاسماً أوليا وهو 17.

خاصية 2: كل عدد طبيعي n غير أوّلي أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل قاسما أوّليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$.

البرهان:

ليكن n عددا طبيعيا غير أوّلي أكبر تماما من 1 .

n يقبل قاسما d يختلف عن 1 وعن n ومنه $n = d \times d'$ حيث d' عدد طبيعي غير معدوم .

$d' \geq 2$ (لأن إذا كان $d' = 1$ فإن $d = n$ و هذا تناقض)

نفرض $d \leq d'$ و منه $d^2 \leq d \times d'$ أي $d^2 \leq n$ و بالتالي $d \leq \sqrt{n}$.

من الخاصية 1: d يقبل على الأقل قاسما أولياً a وهو كذلك قاسم أولي للعدد n .

بما أن لدينا $a \le d$ و $d \le \sqrt{n}$ نستنتج أن $a \le \sqrt{n}$.

مثال:

- 2019 ليس عدد أولي لأن: $\sqrt{2019} \simeq 44.93328388$ بقسمة 2019 على الأعداد الأولية الأقل من 44 نجده يقبل القسمة على 3، ولدينا $2019 = 3 \times 673$.
- $\sqrt{349} \approx 18,68$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{349}$ هي 2 ، 3، 5، 7، 11، 13، 17 .

349 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 و5 ثم $349 = 7 \times 49 + 6$ و$349 = 11 \times 31 + 8$

و $349 = 13 \times 26 + 11$ و$349 = 17 \times 20 + 9$

إذن 349 لا يقبل القسمة على 7، 11، 13 و17 و منه 349 عدد أولي .

خاصية 3: مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية.

البرهان: نستعمل البرهان بالخلف (يوجد أكثر من طريقة للبرهان) .

نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن p أكبر عدد من مجموعة الأعداد الأولية .

نسمي N جداء كل الأعداد الأولية من 2 إلى p .

$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times p$.

ليكن N' العدد الطبيعي حيث أن: $N' = N + 1$. باقي قسمة N' على 2 ، 3 ، 5 ، ...أو p تعطي الباقي دوما 1 . إذن N' غير قابل للقسمة على 2 ، 3 ، 5 ، ...أو p.

إذا كان N' أوليا فإن $N' > p$ و هذا تناقض . إذا كان N' غير أولي فإن N' يقبل قاسما أوليا أكبر من p (الخاصية 1) و هذا تناقض .

إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية.

تمرين محلول 1:

n عدد طبيعي أكبر تماما من 3 :

ليكن العدد الطبيعي $a = n^2 - 2n - 8$

هل توجد قيم للعدد n يكون من أجلها a عددا أوليا ؟

الحل:

a ينعدم من أجل 2- و 4 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 4$ لدينا $a = (n+2)(n-4)$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $n + 2 \ge 2$. ثم من جل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 5 ، $n - 4 \ge 2$

إذن من أجل $n \ge 6$: a هو جداء العددين $(n+2)$ و$(n-4)$ الأكبر تماما من 1 و منه a غير أولي .

تبقى دراسة الحالتين $n = 4$ و $n = 5$.

- إذا كان $n = 4$ ، فإن $a = 0$ و منه a غير أولي .
- إذا كان $n = 5$ ، فإن $a = 7$ و منه a عدد أولي .

إذن a عدد أولي إذا و فقط إذا كان $a = 7$

طريقة: للبرهان على أن عدد طبيعي $a \ge 4$ غير أولي ، يكفي كتابته على الشكل $a = p \times q$ حيث p و q.

حل التمارين : 5،6 ص 106

ملاحظات حول سير الحصة:..

المستوى:3 رياضيات **الوسائل المستعملة:** الكتـاب المدرسـي.

الوحدة التعلمية: الأعداد الأولية **الأستاذ:** طـيـبي حسـان **المدة:** 02 ساعة

الموضوع: الأعداد الأولية. ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقواسمه.

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>مرحلة الانطلاق

مرحلة بناء المعارف</td><td>

التهيئة النفسية:

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية.

مبرهنة: كل عدد طبيعي غير أوّلي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية .

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

n غير أوّلي فإن n يقبل القسمة على عدد أولي p_1 $(p_1 \geq 2)$ على الأقل و منه :

$n = p_1 \times n_1$ حيث $1 < n_1 < n$.

- إذا كان n_1 أوليا فإن المبرهنة محققة.
- إذا كان n_1 غير أولي فإن n_1 يقبل القسمة على عدد أولي p_2 $(p_2 \geq 2)$ على الأقل و منه :

$n_1 = p_2 \times n_2$ حيث $1 < n_2 < n_1$. و منه $n = p_1 \times p_2 \times n_2$.

نواصل العملية بنفس الطريقة حتى الحصول على $n_i = 1$ (i عدد طبيعي) .

الأعداد n_1 ، n_2 ، ... ، n_i متتالية متناقصة من أعداد طبيعية .

ونحصل على $n = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$ (k عدد طبيعي) و هو تحليل n إلى جداء عوامل أولية .

يمكن للأعداد p_1 ، p_2 ، ... ، p_k أن تتكرر في التحليل .

وعليه نحصل على $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$

حيث d_1 ، d_2 ، ... ، d_k أعداد طبيعية . نقول أن n محلل إلى جداء عوامل أولية .

ملاحظة : نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية .

خاصية : a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1.

يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل a.

البرهان:

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 تحليله إلى جداء عوامل أولية $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$

- إذا كان l قاسما للعدد n فإن $n = l \times l'$ حيث l' عدد طبيعي. إذن كل قاسم أولي للعدد l هو قاسم أولي للعدد n و بالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد l يختلف عن العوامل الأولية الموجودة في تحليل n ، و كل عامل أولي في

</td><td></td></tr>
</table>

تحليل l موجود في تحليل n بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل n.

إذن قواسم العدد n هي الأعداد الطبيعية من الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times ... \times p_k^{d'_k}$ حيث :

$0 \le d'_1 \le d_1$ ؛ $0 \le d'_2 \le d_2$ ؛ ... ؛ $0 \le d'_k \le d_k$.

- عكسيا ليكن l عددا طبيعيا مكتوبا على الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times ... \times p_k^{d'_k}$.

يمكننا أن نكتب

$$n = l\left(p_1^{d_1-d'_1} \times p_2^{d_2-d'_2} \times ... \times p_k^{d_k-d'_k}\right)$$

لأن $\left(p_1^{d_1-d'_1} \times p_2^{d_2-d'_2} \times ... \times p_k^{d_k-d'_k}\right)\left(p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times ... \times p_k^{d'_k}\right) = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$

و منه l يقسم n .

مثال:

$343 = 7^3$ و $9604 = 2^2 \times 7^4$ ومنه 343 يقسم 9604 لأن 7 موجود في تحليل 343 بأس أقل من أسه الموجود في تحليل 9604

طريقة: لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل أولية . إلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها .

تمرين محلول 1:

1) حلل إلى جداء عوامل أوّلية العدد 725 .
2) عين كل القواسم الموجبة للعدد 725 .
3) عين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2 - y^2 = 725$.

الحل:

1) $725 = 5^2 \times 29$ ، ومنه عدد قواسم 725 هو 6 ،
2) تعيين القواسم (نعينهم باستعمال الشجرة)
3) $x^2 - y^2 = 725$ معناه $(x-y)(x+y) = 725$ ونستعمل التحليل إلى جداء العوامل الأولية ونعين الثنائيات الممكنة.

حل التمارين : 17،18 ص 106

ملاحظات حول سير الحصة:..

التقويم ....

المستوى:3 رياضيات

الوسائل المستعملة: الكتـاب المدرسـي.

الوحدة التعلمية: الأعداد الأولية

الأستاذ: طـيـبي حسـان

المدة: 01 ساعة

الموضوع: المضاعف المشترك الأصغر

ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر .

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق	التهيئة النفسية: **المضاعف المشترك الأصغر لعددين** a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ M_a إلى مجموعة مضاعفات العدد a . **مثال:** مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6=\{0;6;12;18;24;...\}$. **ملاحظة:** المضاعف الوحيد لِـ 0 هو 0 .	
مرحلة بناء المعارف	**تعريف:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين . M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b. $M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b. **ملاحظات:** $PPCM\ (a;a)=a$ و $PPCM\ (1;a)=a$ مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة المضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما . **مثال:** مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6=\{0;6;12;18;24;30;36;42;48;...\}$. مجموعة مضاعفات 8 هي $M_8=\{0;8;16;24;32;40;48;...\}$. $M_6 \cap M_8=\{24;48;72;96;...\}$ إذن $PPCM\ (6;8)=24$ **تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين** **تعريف :** a و b عددان صحيحان غير معدومين. المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث: $m=PPCM\ (\|a\|;\|b\|)$	

خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين

خاصية: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.

$PPCM\,(ka;kb)=|k|\,PPCM\,(a;b)$.

تمرين محلول 1:

عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 18 .

الحل:

نسمي M_{12} مجموعة مضاعفات 12 و M_{18} مجموعة مضاعفات 18. المجموعتان غير منتهيتين .

$M_{12}=\{0;12;24;36;48;60;72;84;96;108;...\}$ و $M_{18}=\{0;18;36;54;72;90;108;126;144;...\}$.

$M_{12}\cap M_{18}=\{0;36;72;108;144;180;...\}$ ، أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_{12}\cap M_{18}$ هو 36

إذن $PPCM\,(12;18)=36$.

تمرين محلول 2:

n عدد طبيعي غير معدوم و a و b عددان طبيعيان حيث أن :

$a=3^n(11^{n+2}-11^n)$ و $b=11^n\left(3^{n+1}-3^n\right)$.

- عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

الحل:

لدينا $a=3^n\times 11^n\times\left(11^2-1\right)=3^n\times 11^n\times 120$

و $b=11^n\times 3^n\times(3-1)=3^n\times 11^n\times 2$

إذن $PPCM\,(a;b)=PPCM\,\left(3^n\times 11^n\times 120;3^n\times 11^n\times 2\right)$

ومنه $PPCM\,(a;b)=3^n\times 11^n\,PPCM\,(120;2)$

و $PPCM\,(120;2)=120$

إذن $PPCM\,(a;b)=3^n\times 11^n\times 120$

أي $PPCM\,(a;b)=2^3\times 3^{n+1}\times 5\times 11^n$

التقويم

حل التمارين : 36،31 ص 107

ملاحظات حول سير الحصة:..

....

المستوى: 3 رياضيات

الوسائل المستعملة: الكتــاب المدرسـي.

الوحدة التعلمية: الأعداد الأولية

الأستاذ: طـيـبي حســان

المدة: 02 ساعة

الموضوع: المضاعف المشترك الأصغر

ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر .

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق مرحلة بناء المعارف	**التهيئة النفسية:** **نشاط مقترح:** أ) حلل إلى جداء عوامل أولية العددان 168، 1440. ب) أحسب $d = PGCD(1440;168)$ و $m = PPCM(1440;168)$. ت) أحسب $m \times d$. ماذا تستنتج ؟ **حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية** **خاصية:** القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأصغر أس . **البرهان:** a و b عددان طبيعيان أكبرا من 1. p_1 ، p_2 ، ... ، p_n الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في تحليل b . نضع $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ و $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ... \times p_n^{\beta_n}$. حيث α_1 ، α_2 ، ... ، α_n ، β_1 ، β_2 ، ... ، β_n أعداد طبيعية . كل قاسم مشترك d للعددين a و b له تحليل على الشكل : $d = p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times ... \times p_n^{\gamma_n}$. حيث γ_1 ، γ_2 ، ... ، γ_n أعداد طبيعية و$0 \le \gamma_1 \le \alpha_1$ و $0 \le \gamma_1 \le \beta_1$. إذا كان δ_1 الأصغر من بين α_1 و β_1 فإن $0 \le \gamma_1 \le \delta_1$ بنفس الطريقة $0 \le \gamma_2 \le \delta_2$ ، ... ، $0 \le \gamma_n \le \delta_n$. δ_2 الأصغر من بين α_2 و β_2 ، ... ، وδ_n الأصغر من بين α_n و β_n . يكون d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا كان $\gamma_1 = \delta_1$ ، $\gamma_2 = \delta_2$ ، ... ، $\gamma_n = \delta_n$. إذن $PGCD(a;b) = p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times ... \times p_n^{\gamma_n}$ **حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية** **خاصية:** المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأكبر أس.	

البرهان: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر من 1. p_1، p_2، ... ، p_n الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في تحليل b . نضع $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ و $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ... \times p_n^{\beta_n}$.

حيث α_1 ، α_2 ، ... ، α_n ، β_1 ، β_2 ، ... ، β_n أعداد طبيعية .

كل مضاعف مشترك m للعددين a و b له تحليل على الشكل : $m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times ... \times p_n^{\lambda_n}$.

حيث λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n أعداد طبيعية و $0 \le \alpha_1 \le \lambda_1$ و $0 \le \beta_1 \le \lambda_1$.

إذا كان ω_1 الأكبر من بين α_1 و β_1 فإن $0 \le \omega_1 \le \lambda_1$ بنفس الطريقة $0 \le \omega_2 \le \lambda_2$ ، ... ، $0 \le \omega_n \le \lambda_n$.

ω_2 الأكبر من بين α_2 و β_2 ، ... ، و ω_n الأكبر من بين α_n و β_n .

يكون m هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b إذا كان $\lambda_1 = \omega_1$ ، $\lambda_2 = \omega_2$ ، ... ، $\lambda_n = \omega_n$.

إذن $PPCM\ (a;b) = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times ... \times p_n^{\lambda_n}$

العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين

خاصية: جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر. بعبارة أخرى $PGCD\ (a;b) \times PPCM\ (a;b) = a \times b$

البرهان: باستعمال نفس الترميز السابق $PGCD\ (a;b) \times PPCM\ (a;b) = p_1^{\gamma_1+\lambda_1} \times p_2^{\gamma_2+\lambda_2} \times ... \times p_2^{\gamma_n+\lambda_n}$

و بما أن γ_n هو الأصغر من بين α_n و β_n و λ_n هو الأكبر من بين α_n و β_n فإن $\gamma_n + \lambda_n = \alpha_n + \beta_n$

و منه $PGCD\ (a;b) \times PPCM\ (a;b) = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \times p_2^{\alpha_2+\beta_2} \times ... \times p_2^{\alpha_n+\beta_n}$.

تمرين محلول 1:

باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية عين القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 5600 و 28800 .

الحل:

نحلل العددين 5600 و 28840 إلى جداء عوامل أولية .

$5600 = 2^5 \times 5^2 \times 7$.

$28800 = 2^7 \times 3^2 \times 5^2$.

$PGCD\,(5600;28800) = 2^5 \times 5^2 = 800$.

$PPCM\ (5600;28800) = 2^7 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 201600$

التقويم

تمرين محلول 2:

عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حلول الجملة :

$$\begin{cases} a \times b = 18000 \\ PPCM\ (a;b) = 600 \end{cases}$$

الحل:

نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

نضع $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$ حيث a' و b' عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

و نعلم أن $PPCM(a;b)\times PGCD(a;b)=a\times b$ إذن. $600\times d=18000$ و منه $d=30$

الجملة تكتب :

$$\begin{cases} d^2a'\times b'=18000 \\ d\times a'\times b'=600 \end{cases}$$

و نستنتج أن $a'\times b'=20$ وبالتالي $(a'=1$ و $b'=20)$ أو $(a'=4$ و $b'=5)$ أو $(a'=5$ و $b'=4)$

أو $(a'=20$ و $b'=1)$.

الحلول هي الثنائيات

$(a;b)=(30;600)$ ، $(a;b)=(120;150)$ ، $(a;b)=(150;120)$ ، $(a;b)=(600;30)$.

تمرين بكالوريا:

x و y عددان طبيعيان حيث $0<x\le y$ ، نضع $p\gcd(x,y)=d$ و $ppcm(x,y)=m$.

نريد تعيين x و y حيث $m^2-5d^2=2000 \ldots (*)$.

أ ـ برهن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة $(*)$ فإن d^2 يكون قاسما للعدد 2000 .

ب ـ حلل العدد 2000 إلى جداء عوامل أوّلية . استنتج القواسم المربعة التامة للعدد 2000 .

جـ ـ برهن أن 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m . ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

د ـ استنتج القيم الممكنة للعددين x و y .

حل التمارين : 102،100 ص 113

ملاحظات حول سير الحصة:...

....

المستوى: 3 رياضيات

الوسائل المستعملة: الكتـاب المدرسـي.

الوحدة التعلمية: الأعداد والحساب

الأستاذ: طـيـبي حسـان

المدة: 02 ساعة

الموضوع: مبرهنة بيزو

ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: استعمال مبرهنة بيزو .

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr>
<td>مرحلة الانطلاق

مرحلة بناء المعارف</td>
<td>
التهيئة النفسية:
نشاط مقترح:
ليكن a و b عددان صحيحان غير معدومان وأوليان فيما بينهما أي $PGCD(a;b)=1$ ولتكن
$E=\{au+bv,(u,v)\in\mathbb{Z}^2\}$
1- بين أن $a\in E$ و $-a\in E$ ثم استنتج أن E تحوي أعداداً موجبة تماماً.
2- ليكن $m=au_0+bv_0$ أصغر هاته الأعداد من E
أ) أكتب ما يحققه r، q باقي وحاصل قسمة a على m.
3- أنشر وبسط $a(1-qu_0)+b(-qv_0)$ واستنتج أن $r\in E$.
4- اعتمادا على ما يحققه m و r بين أن $r=0$ واذكر العلاقة بين a و m .
5- هل m يقسم b؟
6- بين أن $m=1$
مبرهنة بيزو
مبرهنة: يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث :
$$au+bv=1$$
البرهان: نفرض أنّ a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a;b)=1$ ومنه أحد العددين a أو b غير معدوم . نضع a غير معدوم .
لتكن E مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $au+bv$ حيث u و v عددان صحيحان . المجموعة E غير خالية لأن a عنصر منها (بأخذ $u=1$ و $v=0$) كذالك $-a$ عنصر من E (بأخذ $u=-1$ و $v=0$) .أحد العددين
a أو $-a$ موجب تماما.إذن المجموعة E تحتوي على عدد موجب تماما على الأقل . ليكن m أصغر هذه الأعداد الموجبة تماما ، يوجد إذن عددان صحيحان u_0 و v_0 حيث أن $m=au_0+bv_0$.
القسمة الإقليدية للعدد a على m تكتب $a=mq+r$ حيث q و r عددان طبيعيان و $0\le r<m$.
و منه : $r=a-mq$ و بالتالي $r=a-(au_0+bv_0)q=a(1-qu_0)+b(-qv_0)$ و منه r عنصر من المجموعة E (بأخذ $u=1-qu_0$ و $v=-qv_0$) بما أن m أصغر عنصر موجب تماما من E و $0\le r<m$ فإن $r=0$ و منه $a=mq$ و بالتالي m يقسم a . بنفس الطريقة نثبت أن m يقسم b .
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

إذن $m=1$ لأن a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما. وهذا يعني وجود u_0 و v_0 حيث $au_0+bv_0=1$.

عكسيا : نفرض $au+bv=1$ (a ، b ، u ، v أعداد صحيحة) نضع $d=PGCD(a;b)$.

d يقسم a و b و منه d يقسم $au+bv$ و بالتالي d يقسم 1 أي $d=1$ ، و منه a و b أوليان فيما بينهما .

ملاحظة: الثنائية $(u;v)$ ليست وحيدة .مثلا من أجل $a=3$ و $b=2$ ، $1\times3-1\times2=1$ و $-1\times3+2\times2=1$

خواص

خاصية 1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث : $\boxed{au+bv=d}$

البرهان: a و b عددان صحيحان غير معدومين و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر. نضع $a=da'$ و $b=db'$ حيث a' و b' عددان صحيحان أوليان فيما بينهما . و منه وحسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث $a'u+b'v=1$. بضرب الطرفين في d ، نحصل على: $da'u+db'v=d$ أي $au+bv=d$ وهو المطلوب.

خاصية2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

البرهان: ليكن p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p ، نضع $PGCD(a;p)=d$. بما أن p أولي فإن $d=1$ أو $d=p$ و d لا يقسم a إذن $d=1$ ، و منه p أولي مع a.

خاصية3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$.

البرهان: ليكن a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c ، إذن حسب مبرهنة بيزو توجد أعداد صحيحة u ، v ، u' ، v' حيث : $au+bv=1$ و $au'+cv'=1$. نضرب طرفا بطرف نحصل على:

$a^2uu'+acuv'+abu'v+bcvv'=1$ أي $a(auu'+cuv'+bu'v)+bc(vv')=1$

و منه و حسب مبرهنة بيزو a و bc أوليان فيما بينهما .

تمرين محلول 1:

ليكن n عددا طبيعيا .

- أثبت أن العددين $A=4n-3$ و $B=5n-4$ عددان أوليان فيما بينهما .

الحل:

نحسب العدد $5A-4B$.

$$5A-4B=5(4n-3)-4(5n-4)$$
$$5A-4B=20n-15-20n+16$$
$$5A-4B=1$$

ومنه وحسب مبرهنة بيزو A و B عددان أوليان فيما بينهما

تمرين محلول 2:

- عين عددين صحيحين u و v حيث أن $135u+55v=5$.

الحل:

$135=55\times2+25$ ، $55=25\times2+5$ ، $25=5\times5$.

إذن $PGCD(135;55)=5$.

$5=55-25\times2$.

$25=135-55\times2$.

$5=55-(135-55\times2)\times2$.

$5=135\times(-2)+55\times5$. و منه $u=-2$ و $v=5$.

تمرين محلول3: ليكن n عددا صحيحا .

1) أثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .

2) أثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .

3) استنتج أن $n+1$ و $6n^2+17n+12$ أوليان فيما بينهما .

الحل:

1) نلاحظ أن :

$(2n+3)-2(n+1)=1$ إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $2n+3$ و $n+1$ أوليان فيما بينهما .

2) نلاحظ أن :

$(3n+4)-3(n+1)=1$ إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $3n+4$ و $n+1$ أوليان فيما بينهما .

3) نلاحظ أن :

$(2n+3)(3n+4)=6n^2+17n+12$.

بما أن $n+1$ أولي مع كل من $2n+3$ و $3n+4$ فإن $n+1$ أولي مع جدائهما $6n^2+17n+12$ و هذا حسب الخاصية 3 .

التقويم

حل التمارين : 102،100 ص 113

ملاحظات حول سير الحصة:

المستوى: 3 رياضيات — **الوسائل المستعملة:** الكتـاب المدرسـي.

الوحدة التعلمية: الأعداد والحساب — **الأستاذ:** طـيـبي حسـان — **المدة:** 02 ساعة

الموضوع: مبرهنة غوص — ثانوية هواري بومدين - برهوم

الكفاءة المستهدفة: استعمال مبرهنة غوص .

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>مرحلة الانطلاق

مرحلة بناء المعارف</td><td>

التهيئة النفسية:
نشاط مقترح:
c,b,a ثلاث أعداد صحيحة غير معدومة، حيث a أولي مع b و a يقسم الجداء bc.
1- بين أنه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث: $cau+cbv=c$.
2- بين أن a يقسم c.

مبرهنة غوص

مبرهنة: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

البرهان: ليكن a و b عددين صحيحين غير معدومين أوليين فيما بينهما . إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $au+bv=1$.
ليكن c عددا صحيحا غير معدوم حيث a يقسم الجداء bc.
نضرب طرفي المساواة $au+bv=1$ في c ، نحصل على $cau+cbv=c$.
من المعطيات a يقسم الجداء bc و منه a يقسم الجداء bcv و بما أن a يقسم الجداء acu فإن a يقسم $acu+bcv$ أي a يقسم c .

خواص

خاصية 1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .
إذا كان p يقسم الجداء ab ، فإن p يقسم a أو p يقسم b.

البرهان: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و ليكن p عددا أوليا .حيث p يقسم الجداء ab.
• إذا كان p يقسم a الخاصية محققة.
• إذا كان p لا يقسم a فإن $PGCD(a;p)=1$ لأن p عدد أولي وقاسميه هما 1 و p .
إذن a و p أوليان فيما بينهما .
و بما أن p يقسم الجداء ab و هو أولي مع a و حسب مبرهنة غوص فإن p يقسم b .

</td><td></td></tr>
</table>

خاصية2: a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc .

البرهان: لتكن a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .حيث a مضاعف للعددين b و c .

a مضاعف للعدد b إذن يوجد عدد طبيعي d حيث $a=db$.

a مضاعف للعدد c إذن يوجد عدد طبيعي d' حيث $a=d'c$.

إذن $db=d'c$.

c يقسم $d'c$ و منه c يقسم db.بما أن c أولي مع b و حسب مبرهنة غوص فإن c يقسم d.إذن يوجد عدد عدد طبيعي d'' حيث $d=d''c$.

نعوض في $a=db$ نحصل على $a=d''cb$ و منه a مضاعف للعدد bc

و منه صحة الخاصية .

مثال:

العدد 116916 مضاعف لِـ 3 لأن $(24=1+1+6+9+1+6$ و 24 مضاعف لِـ 3)

العدد 116916 مضاعف لِـ 4 لأن (16 العدد المكون من الآحاد و العشرات يقبل القسمة على 4)

بما أن 3 و 4 أوليين فيما بينهما فإن 116916 مضاعف لِـ 3×4 أي مضاعف لِـ12

تمرين محلول 1:

1)عين في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $x;y$: $9x-16y=0$.

2) تأكد أن الثنائية $4;2$ حل للمعادلة ذات المجهول $x;y$: $9x-16y=4$.

3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $x;y$: $9x-16y=4$.

الحل:

1) $9x-16y=0$ و منه $9x=16y$.

16 يقسم $16y$ و باتالي 16 يقسم $9x$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم x

نضع $x=16k$ حيث k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $9x=16y$ نحصل على $9\ 16k\ =16y$ و منه $y=9k$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $16k;9k$ حيث k عدد صحيح .

2) $9\times4-16\times2=36-32=4$ و منه $4;2$ حل للمعادلة $9x-16y=4$.

3) بطرح 4 من طرفي المعادلة $9x-16y=4$ نحصل على $9x-16y-4=0$.

و نعلم أن $9\times4-16\times2=4$ إذن $9x-16y-\ 9\times4-16\times2\ =0$. و منه $9\ x-4\ =16\ y-2$.

16 يقسم $16(y-2)$ و بالتالي 16 يقسم $9(x-4)$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $x-4$

نضع $x-4=16k$ حيث k عدد صحيح أي $x=16k+4$

بالتعويض في المساواة $9\ x-4\ =16\ y-2$ نحصل على $9\ 16k\ =16(y-2)$ ومنه $y=9k+2$.

التقويم

الحلول هي الثنائيات من الشكل $16k+4;9k+2$ حيث k عدد صحيح .

تمرين بكالوريا2013 شعبة الرياضيات م2:

1)-أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق $2n+27\equiv 0[n+1]$.

ب) عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $(a-b)(a+b)=24$.

ج) إستنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2)- α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل $\alpha=\overline{10141}$ و $\beta=\overline{3403}$

أ) أكتب العددين α و β في النظام العشري.

ب) عين الثنائية $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية بحيث: $\begin{cases} b^2-a^2=24 \\ \alpha a-\beta b=9 \end{cases}$

ج) عين $PGCD(2013;1434)$ ثم استنتج $PGCD(671;478)$

د) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2013x-1434y=27$

حل التمارين : 120،121،122 ص 115

ملاحظات حول سير الحصة:..

....