

التمرين الأول :

كيس يحتوي على 8 كرات (لا نفرق بينها باللمس) مرقمة من 1 إلى 8 ، نسحب كرة واحدة عشوائياً .
 (1) عين الحوادث التالية ثم أحسب احتمالها،
 A: "ظهور كرة تحمل رقم زوجي " ، B: "ظهور كرة تحمل رقم أولي" ، C: "ظهور كرة تحمل رقم أكبر تماماً من 5"
 (2) عين احتمال الحوادث التالية : $A \cap C$ ، $B \cup C$ و \bar{A} .

التمرين الثاني :

يحتوي كيس على 20 كرة بيضاء ، 12 كرة سوداء و 15 كرة خضراء ، نسحب كرة واحدة بصفة عشوائية .
 (1) احسب احتمال الحوادث التالية :
 الكرة المسحوبة بيضاء ، الكرة المسحوبة سوداء ، الكرة المسحوبة خضراء .
 (2) ما هو احتمال ألا تكون الكرة سوداء .

التمرين الثالث :

(I) A ، B حادثين من المجموعة Ω حيث : $P(A) = 0.3$ ، $P(B) = 0.4$ و $P(A \cap B) = 0.2$ ، عين $P(A \cup B)$ و $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.
 (II) A ، B حادثين حيث $P(A) = 0.45$ ، $P(B) = 0.37$ و $P(A \cup B) = 0.82$ ، أثبت أن A و B غير متلائمتين .

التمرين الرابع :

زهرة نرد مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 حيث:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{8}$$

التمرين الخامس :

زهرة نرد مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 حيث احتمال ظهور الأوجه الستة يحقق العلاقة :

$$P(1) = P(2) = 2P(3) = 3P(4) = P(5) = P(6)$$

احتمال ظهور كل وجهه.

التمرين السادس :

ليكن قانون الاحتمال التالي:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(\{x_i\})$	$\frac{2}{3}\alpha$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	α	α	$\frac{2}{3}\alpha$

(1) عين قيمة α .

(2) عرف قانون

التمرين السابع :

يحتوي كيس على 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5 ، نسحب كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة الأولى المسحوبة .
 (1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقنين الظاهرين .

(2) مثل مخطط يوضح التجربة .

(أ) عين قيم X . (ب) عرف قانون الاحتمال لـ X .

(ب) عين $P(X < 4)$ ثم استنتج $P(X \geq 4)$

عين كلا من $P(X^2 - 6X + 8 = 0)$ و $P(X^2 - 6X + 8 < 0)$

(ج) احسب كلاً من الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

(د) عين : $E(2024X + 1)$ ، $V(2X + 2025)$ و $\sigma(2X + 2025)$

- من تمرين 8 الى غاية تمرين 11 نفس المعطيات -

التمرين الثامن :

صندوق يحتوي على كرتين بيضاويتين مرقمتين B_1, B_2 ، ثلاث كرات سوداء N_1, N_2, N_3 و كرة حمراء R_0 ، نسحب عشوائياً كرتين على التوالي دون إرجاع .

(1) مثل مخطط يوضح التجربة .

(2) احسب احتمال الحوادث التالية :

A: "ظهور كرتين من نفس اللون " ، B: "ظهور كرتين مختلفتين في اللون" ، C: "ظهور كرة بيضاء على الأقل" ،

D: "ظهور كرة سوداء على الأكثر" .

F: "ظهور كرتين يحملان عددين زوجيين" .

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

(أ) عين قيم X .

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) احسب الانحراف المعياري $\sigma(X)$.



التمرين التاسع :

بنفس معطيات التمرين الثامن ، ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات السوداء المتبقية في الصندوق ، عين قيم X ثم عرف قانون احتماله .

X	-∞	2	4	+∞
$x^2 - 6x + 8$		+	-	+

لحل المتراجحة $x^2 - 6x + 8 < 0$ ،
 صولنا $2 < x < 4$ ،

$$P(x^2 - 6x + 8) = P(2 < x < 4)$$

$$= P(X=3) = \frac{9}{25}$$

* حساب الأمل الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \frac{1}{25} \times 2 + 3 \times \frac{2}{25}$$

$$+ 4 \times \frac{3}{25} + 5 \times \frac{4}{25} + 6 \times \frac{5}{25} + 7 \times \frac{4}{25}$$

$$+ 8 \times \frac{3}{25} + 9 \times \frac{2}{25} + 10 \times \frac{1}{25} = \frac{150}{25}$$

$$E(X) = 6$$

* حساب التباين

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

$$= \left[2^2 \times \frac{1}{25} + 3^2 \times \frac{2}{25} + 4^2 \times \frac{3}{25} + 5^2 \times \frac{4}{25} \right.$$

$$+ 6^2 \times \frac{5}{25} + 7^2 \times \frac{4}{25} + 8^2 \times \frac{3}{25} + 9^2 \times \frac{2}{25}$$

$$+ 10^2 \times \frac{1}{25} \left. \right] - (6)^2 = \frac{900}{25} - 6$$

$$V(X) = 36 - (6)^2$$

$$V(X) = 30$$

ومنه لا نحرف الاحتمال

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{30} = 0$$

ومنه يصبح قانونه (المتساو)
 كما يلي ، (يقرب من 2)

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$

المتساوية الساقية

(1) مخطط يوضح التجربة

	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

$$\text{card}(\Omega) = 25$$

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

$$P(X < 4) = P(X=2) + P(X=3) \\ = \frac{1}{25} + \frac{2}{25} = \frac{3}{25}$$

استنتاج $P(X > 4)$:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \frac{3}{25} \\ P(X \geq 4) = \frac{22}{25}$$

* تحييد $x^2 - 6x + 8 = 0$
 أو $x^2 - 6x + 8 = 0$ حل المعادلة
 $x_1 = 4$ أو $x_2 = 2$

$$P(x^2 - 6x + 8 = 0) = P(X=4) \\ + P(X=2) = \frac{3}{25} + \frac{1}{25} = \frac{4}{25}$$

* تعيين : $P(x^2 - 6x + 8 < 0)$
 حل المتراجحة $x^2 - 6x + 8 < 0$

$$P(C) = \frac{18}{30}$$

ط 2) جنب الحادثة المعكوسة
لـ C أي \bar{C} وهي عدم ظهور

$$P(\bar{C}) = \frac{12}{30}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$

$$= 1 - \frac{12}{30} = \frac{18}{30}$$

D: ظهور كرة سوداء
على الأقل كثر "معناه" اما كرة
واحدة سوداء أو عدم
ظهور كرة سوداء .

$$P(D) = \frac{24}{30}$$

ط 2) جنب $P(\bar{D})$ أي المثال
ظهور كرتين سوداويتين .

$$P(\bar{D}) = \frac{6}{30}$$

$$P(D) = 1 - P(\bar{D})$$

$$= 1 - \frac{6}{30} = \frac{24}{30}$$

F: "ظهور كرتين مختلفتين"
رقميتين زوجيتين (زوجيات)

$$P(F) = \frac{6}{30}$$

3) X: "عدد الكرات البيضاء"

المسحوبة:
 $X = \{0, 1, 2\}$

✓

$$E(2024X + 1) \quad \text{تعيين}$$

$$E(2024X + 1) = 2024E(X) + 1 = 2024 \times 6 + 1$$

$$E(2024X + 1) = 12145$$

$$V(2X + 2025) \quad \text{تعيين}$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$V(2X + 2025) = (2)^2 \times V(X)$$

$$= 4 \times 10 = 40$$

$$\sigma(2X + 2025) \quad \text{تعيين}$$

$$\sigma(2X + 2025) = |2| \times \sigma(X)$$

$$= 2 \times \sqrt{10}$$

$$= 2\sqrt{10} = 6.32$$

التوزيع الثنائي

① ②	B ₁	B ₂	N ₁	N ₂	N ₃	R ₀
B ₁		B ₂ B ₁	N ₁ B ₁	N ₂ B ₁	N ₃ B ₁	R ₀ B ₁
B ₂	B ₁ B ₂		N ₁ B ₂	N ₂ B ₂	N ₃ B ₂	R ₀ B ₂
N ₁	B ₁ N ₁	B ₂ N ₁		N ₂ N ₁	N ₃ N ₁	R ₀ N ₁
N ₂	B ₁ N ₂	B ₂ N ₂	N ₁ N ₂		N ₃ N ₂	R ₀ N ₂
N ₃	B ₁ N ₃	B ₂ N ₃	N ₁ N ₃	N ₂ N ₃		R ₀ N ₃
R ₀	B ₁ R ₀	B ₂ R ₀	N ₁ R ₀	N ₂ R ₀	N ₃ R ₀	

$$\text{card}(\Omega) = 30$$

$$P(A) = \frac{8}{30}, \quad P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(B) = 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30}$$

C: كرة بيضاء أو أقل
معناه اما كرة واحدة بيضاء

أو كرتين ط 1

معناه ظهور N و \bar{N}
 * إذا سحبنا كرتين سوداويتين
 أي N و N يتبقى كرة واحدة
 خالية أي $X=1$

* إذا لم نسحب كرة سوداء أي
 ظهور \bar{N} و \bar{N} إذا يتبقى
 3 كرات سوداء أي $X=3$

$$X = \{1, 2, 3\}$$

n_i	1	2	3
$P(X=n_i)$	$\frac{6}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{6}{30}$

الترين العاشر

X : عدد الكرات المسحوبة
 نخرج للجدول (الترين العاشر)
 ونكتب الجدار في كل حالة
 نتحصل على

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$$

n_i	0	1	2	3	4	6
$P(X=n_i)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$

الترين الحادي عشر

X : عدد الكرات المسحوبة التي
 تحمل الرقم 1 = بها

$$X = \{0, 1, 2\}$$

n_i	0	1	2
$P(X=n_i)$	$\frac{6}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{6}{30}$

n_i	0	1	2
$P(X=n_i)$	$\frac{12}{30}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{2}{30}$

عدم ظهور كرة بيضاء
 $P(X=0) = \frac{12}{30}$

ظهور كرة واحدة
 ببيضاء
 $P(X=1) = \frac{16}{30}$

ظهور كرتين
 ببيضاء
 $P(X=2) = \frac{2}{30}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 n_i p_i = 0 \times \frac{12}{30} + 1 \times \frac{16}{30}$$

$$+ 2 \times \frac{2}{30} = \frac{20}{30}$$

التباين

$$V(X) = \sum_{i=1}^3 n_i^2 p_i - (E(X))^2$$

$$= \left(0^2 \times \frac{12}{30} + 1^2 \times \frac{16}{30} + 2^2 \times \frac{2}{30}\right) - \left(\frac{20}{30}\right)^2 = \frac{24}{30} - \frac{400}{1296}$$

$$V(X) = \frac{199}{405}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{199}{405}}$$

الترين الثاني عشر

X : الكرات السوداء
 المتبقية، يوجد 3 كرات سوداء
 إذا سحبنا كرة سوداء فبأن
 الكرات السوداء المتبقية
 هي 2 إذا $X=2$

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 1+n, 2+n, 3+n, 4+n\}$$

n_i	2	3	4	5	6	$1+n$
$P(X=n_i)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$

$2+n$	$3+n$	$4+n$
$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

الماتريks الرابع عشر

2 \ 1	R_1	R_2	R_3	B_1	B_2
R_1	R_1	$R_2 R_1$	$R_3 R_1$	$B_1 R_1$	$B_2 R_1$
R_2	R_1	R_2	$R_3 R_2$	$B_1 R_2$	$B_2 R_2$
R_3	R_1	R_2	R_3	$B_1 R_3$	$B_2 R_3$
B_1	R_1	R_2	R_3	B_1	$B_2 B_1$
B_2	R_1	R_2	R_3	B_1	B_2

$$\text{card}(A) = 10$$

$$P(A) = \frac{10}{36} \quad \text{"من نفس اللون"}$$

سؤال إحصائي: عين إحصائي فاهور B للرتبتن مختلفتين في اللون =

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$$

II) تبرير X :

$X = 20 - \alpha$ في حالة فاهور قرصين لونها أحمر فأمرنا ما دفعه وهو $X = 20 - \alpha$ إذا في هذه الحالة $\alpha = 20 - X$

$X = 10 - \alpha$ في حالة فاهور قرصين لونها أبيض فأمرنا ما دفعه وهو $\alpha = 10 - X$

الماتريks الخامس عشر

2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 18, 36\}$$

n_i	1	2	3	4	5	6	8	10
$P(X=n_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

9	19	15	16	20	24	25	30
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$

18	36
$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

الماتريks السادس عشر

1	1	2	2	n	n
1	2	2	3	3	$1+n$
1	2	2	3	3	$1+n$
2	3	3	4	4	$2+n$
4	5	5	6	6	$4+n$
3	4	4	5	5	$3+n$
2	3	3	4	4	$2+n$

تمثيل التجربة بمخطط

ω	$B \alpha$	$B \alpha$	$R \alpha-1$	$R \alpha-1$	V_2
$B \alpha$		$B \alpha B \alpha$ α^2	$R \alpha B \alpha$ $\alpha(\alpha-1)$	$R \alpha B \alpha$ $\alpha(\alpha-1)$	$V_2 B \alpha$ 2α
$B \alpha$	$B \alpha B \alpha$ α^2		$R \alpha B \alpha$ $\alpha(\alpha-1)$	$R \alpha B \alpha$ $\alpha(\alpha-1)$	$V_2 B \alpha$ 2α
$R \alpha-1$	$B \alpha R \alpha-1$ $\alpha(\alpha-1)$	$B \alpha R \alpha-1$ $\alpha(\alpha-1)$		$R \alpha R \alpha-1$ $(\alpha-1)^2$	$V_2 R \alpha-1$ $2(\alpha-1)$
$R \alpha-1$	$B \alpha R \alpha-1$ $\alpha(\alpha-1)$	$B \alpha R \alpha-1$ $\alpha(\alpha-1)$	$R \alpha R \alpha-1$ $(\alpha-1)^2$		$V_2 R \alpha-1$ $2(\alpha-1)$
V_2	$B \alpha V_2$ 2α	$B \alpha V_2$ 2α	$R \alpha V_2$ $2(\alpha-1)$	$R \alpha V_2$ $2(\alpha-1)$	

$P(A) = \frac{8}{20}$ A أصول في كرة خضراء

B أصول في كرة بيضاء أو زرد

$P(B) = \frac{20}{20} = 1$

$X = \{ \alpha^2; \alpha(\alpha-1); 2\alpha; (\alpha-1)^2; 2(\alpha-1) \}$ ③

n_i	α^2	$\alpha(\alpha-1)$	2α	$(\alpha-1)^2$
$P(X=n_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$

$\frac{2(\alpha-1)}{4}$
 $\frac{4}{20}$

$E(X) = \frac{6\alpha^2 + 2\alpha - 3}{10}$ α متغير عشوائي

$E(X) = \alpha^2 \times \frac{2}{20} + \alpha(\alpha-1) \times \frac{8}{20}$

$+ 2\alpha \times \frac{4}{20} + (\alpha-1)^2 \times \frac{2}{20} + d(\alpha-1) \times \frac{4}{20}$
 $\alpha^2 + 4 - 4\alpha$

$X = -\alpha$ يتغير ما دفعه في $\alpha - d = 0$

n_i	$20-\alpha$	$10-\alpha$	$-\alpha$
$P(X=n_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$

حساب $E(X)$
 $E(X) = \sum_{i=1}^3 n_i p_i = (20-\alpha) \times \frac{3}{10} + (10-\alpha) \times \frac{1}{10} - \alpha \times \frac{6}{10}$

$= \frac{60 - 3\alpha + 10 - \alpha - 6\alpha}{10}$

$= \frac{70}{10} - \frac{10\alpha}{10} = 7 - \alpha$

$E(X) = 7 - \alpha$

حتى تكون اللعبة في صالح

$E(X) > 0$ α يجب

$7 - \alpha > 0$ أي

$7 < \alpha$ أي

α عدد حقيقي موجب إذا

$0 < \alpha < 7$

النتيجة الخامسة عشر

$2B(\alpha)$; $2R(\alpha-1)$, $1V(2)$

$$6x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = (+2)^2 - 4(6)(-3)$$

$$= 4 + 72 = 76 > 0$$

لها دالة حلاين

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{76}}{12}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{76}}{12}$$

مفروض في

d موجب دائما

اذن قيمة x هي يكون الاصل

$$x = \frac{-2 + \sqrt{76}}{12}$$

المتر بن اس اس اس س س ر

ω	H_1	H_2	H_3	F_1	F_2
H_1		$H_2 + H_1$	$\frac{1}{3}H_1$	$F_1 + H_1$	$F_2 + H_1$
H_2	H_1		$H_3 + H_2$	$F_1 + H_2$	$F_2 + H_2$
H_3				$F_1 + H_3$	$F_2 + H_3$
F_1					$F_2 + F_1$
F_2					

$$\text{card}(\Omega) = 10$$

$$P(A) = \frac{6}{10}$$

من جيبين
مضامين
F و H

$$P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

من جيبين
مضامين
في اللجنة

X: امكانية اختيار عدد الرجال في اللجنة

X=0 4 يوجه رجال (اختيار امرأتين)

X=1 رجل واحد وامرأة

X=2 رجلين

(7)

$$E(x) = \frac{2x^2}{20} + \frac{8x(x-1)}{20}$$

$$+ \frac{8x}{20} + \frac{2(x-1)^2}{20} + \frac{8(x-1)}{20}$$

$$= \frac{2x^2 + 8x^2 - 8x + 8x}{20}$$

$$+ 2(x^2 + 1 - 2x) + 8x - 8$$

$$= \frac{10x^2 + 2x^2 + 2 - 4x + 8x - 8}{20}$$

$$= \frac{12x^2 + 4x - 6}{20}$$

$$E(x) = \frac{6x^2 + 2x - 3}{10}$$

(8) هي يكون الاصل الرياضي
عامة يجب ان 0 E(x)

$$\frac{6x^2 + 2x - 3}{10} = 0$$

$$6x^2 + 2x - 3 = 0$$

حل المعادلة

$$X = \{0, 1, 2\}$$

قانون الاحتمال

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i$$

$$= 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10}$$

$$E(X) = \frac{12}{10}$$

$$E(X) = 1.2$$

المتوسط
الاحتمالي

بـ