الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

المفتشية العامة للتربية الوطنية

يوم تكويني لفائدة أساتذة مادة الرياضيات

محور الأعداد و الحساب
أنشطة و تمارين

تأطير : الأستاذ عبوب لخضر

الاشراف:مفتشا التربية الوطنية

زلباني صالح + بوراس محمد

ولاية مستغانم

ثانوية زروقي الشيخ بن الدين – مستغانم

23 **يناير** 2025

مقدمة

عندما نتحدث عن محور الاعداد والحساب في سياق الاقسام النهائية شعبة رياضيات وتقني رياضي المقبلة على امتحان البكالوريا فان التركيز يكون على توظيف خواص الموافقات ومبرهنتي غوص و بيزو و نتائجهما في حل مشكلات رياضية وتطبيقها في حل المسائل التي تتطلب التفكير والتحليل المنطقي

محور الاعداد والحساب يعتبر من الركائز الأساسية التي يعتمد عليها في دراسة الرياضيات في المستوى العالي فهو يتناول مفاهيم اكثر تعقيدا.

الوعاء الزمني المحدد لتدريس المحور (03اسابيع) يفرض على الأستاذ وضع خطة محكمة لتقديمه في جملة من الدروس حيث يتطرق فيها لمختلف الأنشطة و التمارين مع كثرتها و تنوعها بشكل شمولي يغطي احتياجات التلاميذ و مستلزمات امتحان البكالوريا.

يندرج هذا اليوم التكويني في إطار توحيد الرؤى حول تقديم هذا المحور بفاعلية وأقل جهد، وتشجيع الأساتذة على التنسيق بينهم فيما يخص الشعبتين و تفعيل عمل الورشات.

مفتشا المادة

أنشطة متنوعة على محور الأعداد والحساب

النشاط 1 : عيّن الأعداد الطبيعية n في كل حالة من الحالات التالية :

1) 12 يقسم $(3n+9)$ **2)** $(3n+2)$ قاسم للعدد 20 **3)** $(2n+27)$ مضاعف لـ $(n+1)$

4) $\dfrac{2n+27}{3n+3} \in \mathbb{N}$ **5)** $\dfrac{3n-17}{n-4} \in \mathbb{N}$ **6)** $\dfrac{n^2+3n-2}{n+1} \in \mathbb{N}$

النشاط 2 : عيّن كل الثنائيات $(x\ ;\ y)$ من الأعداد الطبيعية في كل حالة من الحالات التالية :

1) $x^2-2xy=15$ **2)** $xy+3x-4y-1457=0$ **3)** $2xy-x+y-48=0$

النشاط 3 :

1) باستعمال خوارزمية إقليدس ، عيّن الـ $PGCD(1445\ ;\ 2024)$

2) باستعمال خوارزمية إقليدس ، جد عددين صحيحين α و β يحقّقان المعادلة : $2024\alpha+1445\beta=5$

النشاط 4 : عيّن كل الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\begin{cases} a+b=54 \\ PGCD(a\ ;\ b)=9 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} ab=300 \\ PGCD(a\ ;\ b)=5 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} a^2-b^2=405 \\ 3\times PPCM(a\,;b)=ab \end{cases}$

النشاط 5 : n عدد طبيعي .

1) أثبت أنّ العددين $(3n+2)$ و $(5n+3)$ أوليان فيما بينهما .

2) أثبت أنّ العددين $(2n+1)$ و $(9n+4)$ أوليان فيما بينهما .

النشاط 6 : n عدد طبيعي غير معدوم .

1) عيّن القيم المكنة لـ $PGCD(7n+1\ ;\ 3n-1)$

2) عيّن قيم n التي من أجلها يكون : $PGCD(7n+1\ ;\ 3n-1)=5$

النشاط 7 :

نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث : $A=1954^{2024}+1961^{1445}$ و $B=3^{1962}+5^{2024}$

1) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 9

2) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد B على 13

النشاط 8 : حل في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كلا من المعادلات التالية :

1) $5x\equiv 7[8]$ **2)** $7x\equiv 2[11]$ **3)** $5x\equiv 3[17]$ **4)** $7x\equiv 8[9]$

5) $9x\equiv 15[21]$ **6)** $4x\equiv 2[10]$ **7)** $15x\equiv 25[35]$ **8)** $2x^2\equiv 5[9]$

9) $x^2-3x\equiv 4[7]$ **10)** $x^2+x+7\equiv 0[13]$ **11)** $x^2+8x-9\equiv 0[12]$ **12)** $10x\equiv 2[15]$

النشاط 9 :

1) نعتبر المعادلة $(E)\cdots 7x+18y=9$ ذات المجهول $(x\ ;\ y)$ حيث : x و y عددان صحيحان.

أ) أثبت أنّه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $y\equiv 4\ [7]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

جـ) عيّن الأعداد الصحيحة n التي تحقّق الجملة : $\begin{cases} n\equiv 3\ [7] \\ n\equiv 12\ [18] \end{cases}$

2) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2024^{1445}+2025^{1446}+2026^{1447}+2027^{1448}$ على 9

النشاط 10 :

1) نعتبر المعادلة $(E) \cdots\ 570x - 135y = 1005$ ذات المجهول $(x\ ;\ y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 135 و 570 ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x\,;\,y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 2\ [9]$ ثمّ استنتج حلول المعادلة (E)

2) P عدد طبيعي يُكتب $\overline{2\beta\alpha\alpha\beta 1}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ويُكتب $\overline{\alpha\beta\alpha 40}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 . عيّن العددين الطبيعيين α ، β ثمّ اكتب P في النظام العشري .

3) **أ)** ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

ب) x و y عددان طبيعيان و $(x\,;\,y)$ حلول المعادلة (E)

عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $5n^2+1445^{2024}+1445^{3x+y}$ قابلا للقسمة على 11

النشاط 11 :

1) نعتبر المعادلة $(E) \cdots\ 296x - 36y = 816$ ذات المجهول $(x\ ;\ y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 36 و 296 ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب) تحقق أنّ الثنائية $(3\,;2)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج حلول المعادلة (E)

2) P عدد طبيعي يُكتب $\overline{1\alpha\beta 12}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 ويُكتب $\overline{\alpha 750}$ في نظام التعداد الذي أساسه 8

عيّن العددين الطبيعيين α ، β ثمّ اكتب P في النظام العشري .

3) **أ)** ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 10 ثمّ استنتج رقم آحاد العدد 2024^{1445}

ب) x و y عددان طبيعيان و $(x\,;\,y)$ حلول المعادلة (E)

عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $4n+2024^{1445}+2024^{2x+y}$ قابلا للقسمة على 10

4) **أ)** حلّل العدد 2024 إلى جُداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2024

ب) نضع: $d = PGCD(a\,;b)$ وَ $m = PPCM\,(a\,;b)$

عيّن كلّ الثنائيات $(a\ ;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $m^3+37d^3 = 2024$

النشاط 12 :

1) نعتبر المعادلة $(E) \cdots\ 104x - 16y = 280$ ذات المجهول $(x\ ;\ y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 16 ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x\ ;\ y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ: $y \equiv 2\,[13]$ ثمّ استنتج حلول المعادلة (E)

2) P عدد طبيعي يُكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta\beta\gamma}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ويُكتب $\overline{1\alpha\beta 13}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 . عيّن الأعداد الطبيعية α ، β و γ ثمّ اكتب P في النظام العشري .

3) **أ)** حلّل العدد 2025 إلى جُداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2025

ب) عيّن كلّ الثنائيات $(a\ ;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $m^3+11d^3 = 2025$

النشاط 13 :

1) نعتبر المعادلة $(E) \ldots\ 420x - 945y = 525$ ذات المجهول $(x\ ;\ y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 420 ، 525 و 945 ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x\,;\,y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 8\ [9]$ ثمّ استنتج حلول المعادلة (E)

2) **أ)** ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11

ب) نضع : $a = 9n+8$ و $b = 4n+3$ حيث n عدد طبيعي وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

عيّن القيم الممكنة للعدد d ثمّ عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $d = 5$

3) ليكن العددان الطبيعيان A و B حيث: $A = 9n^2+17n+8$ و $B = 4n^2+7n+3$

أ) بيّن أنّ العددين A و B يقبلان القسمة على $n+1$

ب) جد بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين 14 : بكالوريا 2023 - الموضوع الأول - الشعبة : رياضيات

1) نعتبر المعادلة $(E) \cdots 16x+361y=818$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ) تحقّق أنّ الثنائية $(6;2)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها.

ب) عيّن كلّ الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقّق: $4 \leq |x+23y|$

2) P عدد طبيعي يُكتب $\overline{5\alpha\beta 0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 ويُكتب $\overline{\beta\alpha 87}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9

حيث α و β عددان طبيعيان.

عيّن α و β ثمّ اكتب P في النظام العشري.

3) أ) حلّل العدد 2023 إلى جُداء عوامل أوّلية ثمّ عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كلّ منها يقسم 2023

ب) نضع: $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $m^2+3d^2=2023$

التمرين 15 : بكالوريا 2023 - الموضوع الثاني - الشعبة : رياضيات

1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1945^{2023} على 11

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2023[5] \\ 3n+9^n \equiv 1444[11] \end{cases}$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=9u_n-16n+6$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=4u_n-8n+2$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 9 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=2\times 9^n+2n-\frac{1}{2}$

3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n=\frac{1}{4}(9^{n+1}+4n^2+2n-3)$

4) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $4T_{5n}-n^2+n+5 \equiv 0[11]$

التمرين 16 : بكالوريا 2023 - الموضوع الأول - الشعبة : تقني رياضي

1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1444^{2023} على 7

جـ) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $1962n+1444^{3n+1} \equiv 0[7]$

2) نعتبر المعادلة $(E) \cdots 7x-6y=4$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

تحقّق أنّ الثنائية $(4;4)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها.

3) عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) والتي تحقق $2^{3x}+2^y \equiv 3[7]$

التمرين 17 : بكالوريا 2022 - الموضوع الثاني - الشعبة : رياضيات

n عدد طبيعي. نضع: $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$

1) أ- بيّن أنّ $p\gcd(A_n ; B_n) = p\gcd(B_n ;7)$

ب- إستنتج القيم الممكنة لِ $p\gcd(A_n ; B_n)$

جـ- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما.

2) نعتبر المعادلة $A_2x - B_2y = 29 \cdots\cdots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ- بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[4]$

ب- عيّن حلول المعادلة (E)

3) أ- إستنتج حلول المعادلة $51x - 4y = 45 \cdots\cdots (E')$

ب-عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \le 3$

التمرين 18 : بكالوريا 2022 - الموضوع الثاني - الشعبة : تقني رياضي

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $a = 5n + 2$ ، $b = n + 1$ ، $c = 9n + 2$

و $d = p\gcd(a;b)$ ، $d' = p\gcd(b;c)$

1) عيّن القيم الممكنة لكلّ من d و d' ثم استنتج $p\gcd(a;b;c)$

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد b قاسما لـ a

3) نعتبر المعادلة: $17x - 4y = 29 \cdots (E)$ حيث x و y عددان صحيحان.

بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 1[4]$ ثم حل المعادلة (E)

4) عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $xy < 279$

التمرين 19 : بكالوريا 2021 - الموضوع الثاني - الشعبة : تقني رياضي

نعتبر المعادلة: $13x - 9y = 1 \cdots (E)$ ، ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) أ . تحقّق أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 7[9]$

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب. نضع: $A_n = 3^{4n} + 3^{4n+1} + 3^{4n+2} - 3$ حيث n عدد طبيعي.

بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5

3) بفرض أنّ $(x;y)$ حلّ للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان.

عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n + 3^{y-x} + 2023^{2022}$ القسمة على 5

مناقشة أنشطة محور الأعداد والحساب

حل النشاط 1 :

تذكير : القول أن a يقسم b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b = k \times a$ 　 $a \neq 0$

1) تعيين قيّم n بحيث 12 يقسم $(3n+9)$:

12 يقسم $(3n+9)$ يعني وجود عدد طبيعي k حيث : $3n+9=12k$ ، نستنتج أنّ : $n=4k-3$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

2) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث $(3n+2)$ قاسم للعدد 20 :

مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 20 هي : $\{-20\ ;\ -10\ ;\ -5\ ;-4\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;1\ ;2\ ;4\ ;5\ ;\ 10\ ;\ 20\ \}$

$20|(3n+2)$ معناه : $(3n+2) \in \{-20\ ;\ -10\ ;\ -5\ ;-4\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;1\ ;2\ ;4\ ;5\ ;\ 10\ ;\ 20\ \}$

نستنتج أنّ : $n \in \{0\ ;1\ ;6\}$

3) تعيين قيم n بحيث $2n+27$ مضاعف لـ $(n+1)$:

$2n+27$ مضاعف لـ $(n+1)$ معناه : $(n+1)|(2n+27)$

طريقة : حل مسألة من الشكل $f(n)|g(n)$ ، يؤول إلى حل مسألة من الشكل $h(n)|\lambda$ حيث λ عدد صحيح مستقل عن n

تذكير : إذا كان $n|a$ و $n|b$ فإن $n|(a+b)$ ، $n|(a-b)$ ، $n|(a\times b)$ ، $n|PGCD(a\ ;\ b)$

وبشكل عام : $n|(\alpha a+\beta b)$ حيث α و β عددان صحيحان.

طريقة رقم 1 :

لدينا : $(n+1)|(2n+27)$ ومنه : $\begin{cases}(n+1)|(2n+27)\\(n+1)|\ (n+1)\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}(n+1)|(2n+27)\\(n+1)|2(n+1)\end{cases}$

وعليه فإنّ : $(n+1)|\left[(2n+27)-2(n+1)\right]$ أي : $(n+1)|\ 25$

مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 25 هي : $-25\ ;-5;\ -1;1;5;25$ ، نستنتج أنّ : $n \in \{0\ ;4;24\}$

طريقة رقم 2 :

لدينا : $(n+1)|(2n+27)$ ومنه : $(n+1)|\left[(2n+2)+25\right]$ وبالتالي : $(n+1)|\left[2(n+1)+25\right]$

وعليه يكون : $(n+1)|\ 25$ ومنه : $n+1 \in -25\ ;-5;\ -1;1;5;25$ ، نستنتج أنّ : $n \in \{0\ ;4;24\}$

طريقة رقم 3 :

$(n+1)|(2n+27)$ معناه $\dfrac{2n+27}{n+1} \in \mathbb{N}$

ونعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\dfrac{2n+27}{n+1}=\alpha+\dfrac{\beta}{n+1}=2+\dfrac{25}{n+1}$

$(n+1)|(2n+27)$ معناه : $(n+1)|\ 25$ ، نستنتج أنّ : $n \in \{0\ ;4;24\}$

طريقة رقم 4 :

$(n+1)|(2n+27)$ معناه : يوجد عدد طبيعي k بحيث : $(2n+27)=k(n+1)$

وبالتالي : $2(n+1)+25=k(n+1)$ أي : $k(n+1)-2(n+1)=25$

و منه : $(n+1)(k-2)=25$ ، نستنتج أنّ : $(n+1)|\ 25$ فيكون : $n \in \{0\ ;4;24\}$

4) تعيين قيّم n بحيث $\frac{2n+27}{3n+3} \in \mathbb{N}$:

$\frac{2n+27}{3n+3} \in \mathbb{N}$ معناه : $(3n+3)|(2n+27)$ وبالتالي : $\begin{cases}(3n+3)|(2n+27)\\(3n+3)|\ (3n+3)\end{cases}$

وعليه فإن $\begin{cases}(3n+3)|3(2n+27)\\(3n+3)|2\,(3n+3)\end{cases}$ نستنتج أن : $(3n+3)|\ \left[3(2n+27)-2(3n+3)\right]$

أي : $(3n+3)|\ 75$

مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 75 هي : $-75\,;-25\,;-15\,;-5\,;-3\,;-1\,;1\,;3\,;5\,;15\,;25\,;75$

ومنه : $(3n+3)\in\{-75\,;-25\,;-15\,;-5\,;-3\,;-1\,;1\,;3\,;5\,;15\,;25\,;75\}$

نستنتج أنّ : $n\in\{0\,;24\}$

5) تعيين قيّم n بحيث $\frac{3n-17}{n-4} \in \mathbb{N}$:

$\frac{3n-17}{n-4} \in \mathbb{N}$ معناه : $(n-4)|(3n-17)$ وبالتالي : $\begin{cases}(n-4)|\ (3n-17)\\(n-4)|\ (n-4)\end{cases}$

وعليه فإن $\begin{cases}(n-4)|\ (3n-17)\\(n-4)\,|3\,(n-4)\end{cases}$ نستنتج أن : $(n-4)|\ \left[3(n-4)\ -(3n-17)\right]$ أي : $(n-4)|\ 5$

مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 5 هي : $-5\,;-1\,;1\,;5$ ومنه : $(n-4)\in\{-5\,;-1\,;1\,;5\}$

نستنتج أنّ : $n\in\{3\,;9\}$

6) تعيين قيّم n بحيث $\frac{n^2+3n-2}{n+1} \in \mathbb{N}$:

$\frac{n^2+3n-2}{n+1} \in \mathbb{N}$ معناه : $(n+1)|\ (n^2+3n-2)$

وبملاحظة أن : $\frac{n^2+3n-2}{n+1}=n+2-\frac{4}{n+1}$ ، نستنتج أن : $(n+1)|\ 4$

مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 4 هي : $\{-4\,;-2;\ -1;1;2;4\}$ نستنتج أنّ : $n\in\{\ 1;\ 3\}$

حل النشاط 2 :

1) تعيين جميع الثنائيات $(x\ ;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2-2xy=15$:

طريقة : بالنسبة للمسائل المعطاة في شكل جمع ، نحاول تحويلها إلى شكل جُداء من الشكل $A\times B\ =\ C$ ، حيث أنّ قواسم C معروفة .

$\left(\ x^2-2xy=15\ \right)$ يكافئ $\left(\ x\,(x-2y)=15\ \right)$ وبالتالي فإن x و $(x-2y)$ يقسمان العدد 15

نحلل العدد 15 إلى جُداء عددين طبيعيين : $15=1\times15=3\times5=5\times3=15\times1$

توجد 4 حالات ممكنة للثنائيات $(x\ ;\ x-2y)$ هي : $(1\ ;\ 15)$ ، $(3\ ;\ 5)$ ، $(5\ ;\ 3)$ ، $(15\ ;\ 1)$

ولأن في المجموعة $\mathbb{N}$: $x\geq x-2y$ ، تبقى حالتين ممكنتين فقط هما :

$\begin{cases}x\ =5\\x\ -2y\ =3\end{cases}$ أو $\begin{cases}x\ =15\\x\ -2y\ =1\end{cases}$ فيكون : $(x\ ;\ y)\in\{(5;1),(15;7)\}$

(2 تعيين كل الثنائيات $(x\;;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $xy+3x-4y-1457=0$:

لدينا : $xy+3x-4y-1457=0$ ومنه : $x(y+3)-4y-12+12-1457=0$

أي : $x(y+3)-4(y+3)=1445$ فيكون : $(y+3)(x-4)=1445$ أي : $(x-4)(y+3)=1445$

نحلل 1445 إلى جُداء عددين طبيعيين : $1445=1\times1445=5\times289=17\times85=85\times17=289\times5=1445\times1$

فيكون : $(x\;;y)\in\{(5;1442),(9;286),(21;82),(293;2),(89;14)\}$

(3 تعيين كل الثنائيات $(x\;;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $2xy-x+y-48=0$:

لدينا : $2xy-x+y-48=0$ ومنه : $2(2xy-x+y-48)=0$

أي : $4xy-2x+2y-96=0$ أي : $2x(2y-1)+(2y-1)+1-96=0$

فيكون : $(2y-1)(2x+1)=95$ أي : $(2x+1)(2y-1)=95$

نحلل العدد 95 إلى جُداء عددين طبيعيين : $95=1\times95=5\times19=19\times5=95\times1$

فيكون : $(x\;;y)\in\{(0;48),(2;10),(47;1),(9;3)\}$

حل النشاط 3 :

(1 تعيين $PGCD(1445\;;\;2024)$

2	2	57	2	2	1		الحاصل
1	2	5	287	579	1445	2024	المقسوم و القاسم
0	**1**	2	5	287	579		الباقي

إذن : $PGCD(1445\;;\;2024)=1$ وبالتالي فإن العددين 1445 و 2024 أوليان فيما بينهما .

(2 إيجاد عددين صحيحين α و β يحققان المعادلة $2024\alpha+1445\beta=5$:

a	b
r	q

$\longrightarrow \boxed{a=b\,q+r}$

لدينا : $2024=1445\times1+579$ ومنه : $579=2024-1445$

ولدينا : $1445=2\times579+287$ ومنه : $287=1445-2\times579=1445-2(2024-1445)$

وبالتالي : $287=-2\times2024+3\times1445$

ولدينا : $579=2\times287+5$ ومنه : $5=579-2\times287=(2024-1445)-2(-2\times2024+3\times1445)$

وبالتالي : $5=5\times2024-7\times1445$

من المساواتين : $2024\alpha+1445\beta=5$ و $5\times2024-7\times1445=5$ نستنتج أن : $\alpha=5$ و $\beta=-7$

حل النشاط 4 :

(1 تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases}a+b=54\\PGCD(a\;;\;b)=9\end{cases}$:

تذكير : إذا كان $PGCD(a\;;\;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما حيث :
$a=d\times a'$ و $b=d\times b'$

من المساواة : $PGCD(a;b)=9$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما حيث :

$a=9a'$ و $b=9b'$ ، تكتب عندئذ المساواة $a+b=54$ كما يلي : $9a'+9b'=54$ ومنه : $a'+b'=6$

نستنتج أن : $(a';b')\in\{(1;5),(5;1)\}$ فيكون : $(a;b)\in\{(9;45),(45;9)\}$

(2 تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases}ab=300\\PGCD(a\;;\;b)=5\end{cases}$:

من المساواة : $PGCD\ (a\ ;\ b)=5$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما حيث :

$a=5a'$ و $b=5b'$ ، تكتب عندئذ المساواة $ab=300$ كما يلي : $5a'\times 5b'=300$ ومنه : $a'\times b'=12$

نستنتج أن : $(a';b')\in\{(1;12),(3;4),(4;3),(12;1)\}$

فيكون : $(a';b')\in\{(5;60),(15;20),(20;5),(60;5)\}$

3) تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} a^2-b^2=405 \\ 3\times PPCM\ (a\ ;b)=ab \end{cases}$

طريقة : لتعيين الثنائيات $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ نستعين بالخاصتين الآتيتين :

إذا كان $PGCD(a;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما حيث : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$

إذا كان $PGCD(a\ ;b)=d$ و $PPCM\ (a\ ;b)=m$ فإن $d\times m=a\times b$

من المساواتين $3m\ =ab$ و $d\times m=a\times b$ نستنتج أنّ : $d\ =3$ ومنه : $a\ =3a'$ و $b\ =3b'$

تكتب عندئذ المساواة $a^2-b^2=405$ كما يلي : $(3a')^2-(3b')^2=405$ وبالقسمة على 9 نجد : $a'^2-b'^2=45$

وبالتالي : $(a'-b')(a'+b')=45$

نحلل العدد 45 إلى جُداء عددين طبيعيين : $45=1\times 45=3\times 15=5\times 9=9\times 5=15\times 3=45\times 1$

ولأن في المجموعة $\mathbb{N}$: $(a'-b')\leq(a'+b')$ ، توجد ثلاث حالات ممكنة فقط هي :

$\begin{cases} a'-b'=1 \\ a'+b'=45 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a'-b'=3 \\ a'+b'=15 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a'-b'=5 \\ a'+b'=9 \end{cases}$

نستنتج أن : $(a'\ ;\ b')\in\{(23;22),(9;6),(7;2)\}$

فيكون : $(a\ ;\ b)\in\{(69;66),(27;18),(21;6)\}$

حل النشاط 5 :

1) إثبات أنّ العددين $3n+2$ و $5n+3$ أوليان فيما بينهما :

طريقة 1 : نفرض أنّ الـ $PGCD(3n+2\,;5n+3)=d$ ونبيّن أنّ $d\ =1$

من المساواة : $PGCD(3n+2\,;5n+3)=d$ نستنتج أن : $\begin{cases} d\ |(5n+3) \\ d\ |(3n+2) \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} d\ |3(5n+3) \\ d\ |5(3n+2) \end{cases}$

ومنه : $d\ |[5(3n+2)-3(5n+3)]$ أي : $d|1$ فيكون : $d\ =1$

إذن : العددان $3n+2$ و $5n+3$ أوليان فيما بينهما.

طريقة 2 : استعمال خوارزمية إقليدس

n	1	1	1	1		الحاصل
1	n	$n+1$	$2n+1$	$3n+2$	$5n+3$	المقسوم والقاسم
0	**1**	n	$n+1$	$2n+1$		الباقي

بما أن آخر باق غير معدوم هو 1 فإن $PGCD(5n+3\ ;\ 3n+2)=1$ فيكون $3n+2$ و $5n+3$ أوليين فيما بينهما .

طريقة 3 : استعمال مبرهنة بيزو

نلاحظ أن : $-3(5n+3)+5(3n+2)=1$ وحسب مبرهنة بيزو فإنّ العددين $2n+5$ و $n+2$ أوليان فيما بينهما .

طريقة : إثبات أنّ العددين $3n+2$ و $5n+3$ أوليان فيما بينهما يؤول إلى البحث عن وجود عددين صحيحين u و v بحيث $u(5n+3)+v(3n+2)=1$

لدينا : $u(5n+3)+v(3n+2)=1$ ومنه : $5un+3u+3vn+2v=1$

وبالتالي : $(5u+3v)n+(3u+2v)=1$ نستنتج أن : $\begin{cases}5u+3v=0\\3u+2v=1\end{cases}$ وبحل هذه الجملة نجد : $\begin{cases}u=-3\\v=5\end{cases}$

إذن : توجد الثنائية $(-3;5)$ بحيث $-3(5n+3)+5(3n+2)=1$ ، وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $3n+2$ و $5n+3$ أوليان فيما بينهما.

حل النشاط 6 :

1) تعيين القيّم الممكنة لـ $PGCD(7n+1\ ;\ 3n-1)$:

ليكن : $PGCD(7n+1\ ;\ 3n-1)=d$ ومنه : $\begin{cases}d\mid(7n+1)\\d\mid(3n-1)\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}d\mid3(7n+1)\\d\mid7(3n-1)\end{cases}$

نستنتج أن : $d\mid[3(7n+1)-7(3n-1)]$ أي : $d\mid10$.

مجموعة قواسم العدد 10 هي : $\{1;2;5;10\}$ ، فيكون : $d\in\{1;2;5;10\}$

2) قيم n التي من أجلها يكون $PGCD(7n+1\ ;\ 3n-1)=5$:

لدينا : $PGCD(7n+1\ ;\ 3n-1)=5$ ومنه : $\begin{cases}5\mid(7n+1)\\5\mid(3n-1)\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}5\mid(7n+1)\\5\mid2(3n-1)\end{cases}$

نستنتج أن : $5\mid[(7n+1)-2(3n-1)]$ أي : $5\mid(n+3)$

طريقة 1 : العدد $n+3$ مضاعف للعدد 5 وليسا مضاعفا للعدد 10 من أجل : $n+3=5k$ مع k عدد طبيعي فردي .

(من أجل $n=5k-3$ حيث k عدد طبيعي فردي يكون : $PGCD(a\ ;\ b)=5$)

ملاحظة : k طبيعي فردي معناه : $k=2k'+1$ وبالتالي : يمكن كتابة n على الشكل : $n=10k'+2$ مع $k'\in\mathbb{N}$

طريقة 2 : لدينا $5\mid(n+3)$ ، نستنتج أنّ العدد $n+3$ مضاعف للعدد 5 وليسا مضاعفا للعدد 10

وعليه فإنّ : $n+3\equiv5[10]$ وبالتالي : $n\equiv2[10]$ فيكون : $n=10k'+2$ مع $k'\in\mathbb{N}$

خلاصة : من أجل : $n=10k'+2$ مع $k'\in\mathbb{N}$ يكون : $PGCD(7n+1\ ;\ 3n-1)=5$

حل النشاط 7 :

تذكير : يقبل عدد طبيعي القسمة على 9 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من مجموع أرقامه القسمة على 9

تذكير : $a^{np}=\left(a^{p}\right)^{n}=\left(a^{n}\right)^{p}$

1) تبيان أنّ العدد A يقبل القسمة على 9 :

لدينا : $1954\equiv1[9]$ ومنه : $1954^{2024}\equiv1^{2024}[9]$ وبالتالي : $1954^{2024}\equiv1[9]$

ولدينا : $2024\equiv 8[9]$ ومنه : $2024\equiv -1[9]$ وبالتالي : $2024^{1445}\equiv(-1)^{1445}[9]$

وعليه فإن : $2024^{1445}\equiv -1[9]$ فيكون : $A\equiv 1-1[9]$ أي : $A\equiv 0[9]$ وهذا يعني أنّ A يقبل القسمة على 9

2) تعيين باقي القسمة الإقليدية على 13 للعدد B حيث $B=3^{1962}+5^{2024}$:

لدينا : $3^{1962}=3^{3\times 654}=(3^3)^{654}=27^{654}$ وبما أنّ : $27\equiv 1[13]$ فإنّ : $27^{654}\equiv 1[13]$

نستنتج أنّ : $3^{1962}\equiv 1[13]$ ... (1)

ولدينا : $5^{2024}=5^{2\times 1012}=(5^2)^{1012}=25^{1012}$ وبما أنّ : $25\equiv -1[13]$ فإنّ : $25^{1012}\equiv(-1)^{1012}[13]$

أي : $25^{1012}\equiv 1[13]$ نستنتج أنّ : $5^{2024}\equiv 1[13]$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أنّ $3^{1962}+5^{2024}\equiv 1+1[13]$ أي أنّ باقي القسمة الإقليدية للعدد B على 13 هو 2

حل النشاط 8 :

ملاحظات

1) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . a و b عددان صحيحان.

في الحالة العامة : $(a\times b\equiv 0[n])$ **لا يستلزم** $(a\equiv 0[n]$ أو $b\equiv 0[n])$

2) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . a ، b و c أعداد صحيحة حيث : $c\neq 0$

في الحالة العامة : $(ca\equiv cb[n])$ **لا يستلزم** $(a\equiv b[n])$

3) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . من أجل كل عددين صحيحين a ، b ومن أجل كل عدد صحيح غير معدوم c : **إذا كان** $(ca\equiv cb[n]$ و c أولي مع $n)$ **فإن** $(a\equiv b[n])$

4) a و b عددان صحيحان حيث $a\neq 0$ و n عداد طبيعي أكبر تماما من 1 و $PGCD(|a|;n)=d$

تقبل المعادلة $ax\equiv b[n]$ حلولا في $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا قسم d العدد b

1) حل المعادلة $5x\equiv 7[8]$:

طريقة 1 : لدينا $5x\equiv 7[8]$ ومنه : $3\times 5x\equiv 3\times 7[8]$ أي : $15x\equiv 21[8]$ وبالتالي : $-x\equiv 5[8]$

وعليه فإنّ : $x\equiv -5[8]$ ومنه : $x\equiv -5+8[8]$ أي : $x\equiv 3[8]$ فيكون : $x=8k+3$ مع $k\in\mathbb{Z}$

طريقة 2 : لدينا $5x\equiv 7[8]$ ومنه : $5\times 5x\equiv 5\times 7[8]$ أي : $25x\equiv 35[8]$ وبالتالي : $x\equiv 3[8]$

فيكون : $x=8k+3$ مع $k\in\mathbb{Z}$

طريقة 3 : لدينا $5x\equiv 7[8]$ ومنه : $5x\equiv 7+8[8]$ أي : $5x\equiv 15[8]$ وبالتالي : $x\equiv 3[8]$

فيكون : $x=8k+3$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) حل المعادلة $7x\equiv 2[11]$:

طريقة 1 : لدينا : $7x\equiv 2[11]$ ومنه : $3\times 7x\equiv 3\times 2[11]$ أي : $21x\equiv 6[11]$ وبالتالي : $-x\equiv 6[11]$

وعليه فإن : $x\equiv -6[11]$ أي : $x\equiv -6+11[11]$ أي : $x\equiv 5[11]$ فيكون : $x=11k+5$ مع $k\in\mathbb{Z}$

طريقة 2 : لدينا $7x \equiv 2[11]$ ومنه : $8\times 7x \equiv 8\times 2[11]$ أي : $56x \equiv 16[11]$ وبالتالي : $x \equiv 5[11]$

فيكون : $x = 11k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

3) حل المعادلة $5x \equiv 3[17]$:

طريقة 1 : لدينا $5x \equiv 3[17]$ ومنه : $4\times 5x \equiv 4\times 3[17]$ أي : $20x \equiv 12[17]$ وعليه : $3x \equiv 12[17]$

ومنه : $x \equiv 4[17]$ فيكون : $x = 17k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 2 : لدينا $5x \equiv 3[17]$ ومنه : $7\times 5x \equiv 7\times 3[17]$ أي : $35x \equiv 21[17]$ وعليه : $x \equiv 4[17]$

فيكون : $x = 17k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

4) حل المعادلة $7x \equiv 8[9]$:

طريقة 1 : لدينا $7x \equiv 8[9]$ ومنه : $4\times 7x \equiv 4\times 8[9]$ أي : $28x \equiv 32[9]$

وبالتالي : $x \equiv 5[9]$ فيكون : $x = 9k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 2 : لدينا $7x \equiv 8[9]$ ومنه : $-2x \equiv 8[9]$ أي : $x \equiv -4[9]$ وبالتالي : $x \equiv -4+9[9]$

وعليه فإنّ : $x \equiv 5[9]$ فيكون : $x = 9k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

5) حل المعادلة $9x \equiv 15[21]$:

طريقة 1 : لدينا $9x \equiv 15[21]$ ومنه : $3x \equiv 5[7]$ وبالتالي : $5\times 3x \equiv 5\times 5[7]$ أي : $15x \equiv 25[7]$

ومنه : $x \equiv 4[7]$ فيكون : $x = 7k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 2 : لدينا $9x \equiv 15[21]$ ومنه : $3x \equiv 5[7]$ وبالتالي : $2\times 3x \equiv 2\times 5[7]$ أي : $6x \equiv 10[7]$

ومنه : $-x \equiv 3[7]$ وعليه فإنّ : $x \equiv -3[7]$ ومنه : $x \equiv -3+7[7]$ أي : $x \equiv 4[7]$

فيكون : $x = 7k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 3 : لدينا $9x \equiv 15[21]$ ومنه : $9x \equiv 15+21[21]$ أي : $9x \equiv 36[21]$ ومنه : $3x \equiv 12[7]$

ومنه : $x \equiv 4[7]$ فيكون : $x = 7k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 4 : لدينا $9x \equiv 15[21]$ ومنه : $9x + 21x \equiv 15[21]$ أي : $30x \equiv 15[21]$ ومنه : $10x \equiv 5[7]$

ومنه : $2x \equiv 1[7]$ ومنه : $4\times 2x \equiv 4\times 1[7]$ أي : $8x \equiv 4[7]$ أي : $x \equiv 4[7]$

فيكون : $x = 7k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

6) حل المعادلة $4x \equiv 2[10]$:

طريقة 1 : لدينا $4x \equiv 2[10]$ ومنه : $2x \equiv 1[5]$ وبالتالي : $3\times 2x \equiv 3\times 1[5]$ أي : $6x \equiv 3[5]$

ومنه : $x \equiv 3[5]$ فيكون : $x = 5k + 3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 2 : لدينا $4x \equiv 2[10]$ ومنه : $4x \equiv 2+10[10]$ أي : $4x \equiv 12[10]$ وبالتالي : $2x \equiv 6[5]$

ومنه : $x \equiv 3[5]$ فيكون : $x = 5k + 3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

7) حل المعادلة $15x \equiv 25[35]$:

طريقة 1 : لدينا $15x \equiv 25[35]$ ومنه : $3x \equiv 5[7]$ وبالتالي : $5\times 3x \equiv 5\times 5[7]$ أي : $15x \equiv 25[7]$

ومنه : $x \equiv 4[7]$ فيكون : $x = 7k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 2 : لدينا $15x \equiv 25[35]$ ومنه : $3x \equiv 5[7]$ وبالتالي : $2\times 3x \equiv 2\times 5[7]$ أي : $6x \equiv 10[7]$

ومنه : $-x \equiv 3[7]$ وعليه فإنّ : $x \equiv -3[7]$ ومنه : $x \equiv -3+7[7]$ أي : $x \equiv 4[7]$

فيكون : $x = 7k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 3 : لدينا $15x \equiv 25[35]$ ومنه : $3x \equiv 5[7]$ وبالتالي : $3x \equiv 5+7[7]$ أي : $3x \equiv 12[7]$

ومنه : $x \equiv 4[7]$ فيكون : $x = 7k+4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

8) حل المعادلة $2x^2 \equiv 5[9]$:

طريقة 1 : لدينا $2x^2 \equiv 5[9]$ ومنه : $5 \times 2x^2 \equiv 5 \times 5[9]$ أي : $10x^2 \equiv 25[9]$ وبالتالي : $x^2 \equiv 7[9]$

نستنتج أنّ : $x \equiv 4[7]$ أو $x \equiv 5[7]$ فيكون : $x = 7k+4$ أو $x = 7k+5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 2 : في القسمة الإقليدية على 9 ، البواقي الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 و 8

وبالتالي : كل عدد صحيح x يوافق 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 أو 7 أو 8 بترديد 9

باستعمال خواص الموافقات ، نشكل الجدول التالي :

$x \equiv \cdots[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 \equiv \cdots[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$2x^2 \equiv \cdots[9]$	0	2	8	0	**5**	**5**	0	8	2

من هذا الجدول نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة $2x^2 \equiv 5[9]$ هي : $S = \{7k+4 ; 7k+5 \ / k \in \mathbb{Z}\}$

9) حل المعادلة $x^2 - 3x \equiv 4[7]$:

طريقة 1 : لدينا $x^2 - 3x \equiv 4[7]$ ومنه : $x^2 + 4x \equiv 4[7]$ وبالتالي : $x^2 + 4x + 4 \equiv 4+4[7]$

أي : $x^2 + 4x + 4 \equiv 1[7]$ أي : $(x+2)^2 \equiv 1[7]$ نستنتج أنّ : $x+2 \equiv 1[7]$ أو $x+2 \equiv 6[7]$

فيكون : $x = 7k+6$ أو $x = 7k+4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن : مجموعة حلول المعادلة $x^2 - 3x \equiv 4[7]$ هي : $S = \{7k+4 ; 7k+6 \ / k \in \mathbb{Z}\}$

طريقة 2 : لدينا $x^2 - 3x \equiv 4[7]$ ومنه : $x^2 - 3x - 4 \equiv 0[7]$ وبالتالي : $(x-4)(x+1) \equiv 0[7]$

وعليه فإنّ : $(x-4) \equiv 0\ [7]$ أو $(x+1) \equiv 0\ [7]$ نستنتج أنّ : $x \equiv 4\ [7]$ أو $x \equiv 6\ [7]$

فيكون : $x \equiv 4\ [7]$ أو $x \equiv 6\ [7]$

إذن : مجموعة حلول المعادلة $x^2 - 3x \equiv 4[7]$ هي : $S = \{7k+4 ; 7k+6 \ / k \in \mathbb{Z}\}$

طريقة 3 : لدينا $x^2 - 3x \equiv 4[7]$ يكافئ $x^2 + 4x \equiv 4[7]$

في القسمة الإقليدية على 7 ، البواقي الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6

وبالتالي : كل عدد صحيح x يوافق 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 بترديد 7

باستعمال خواص الموافقات ، نشكل الجدول التالي :

$x \equiv \cdots[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv \cdots[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$4x \equiv \cdots[7]$	0	4	1	5	2	6	3
$x^2 + 4x \equiv \cdots[7]$	0	5	5	0	**4**	3	**4**

من هذا الجدول نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة $x^2 - 3x \equiv 4[7]$ هي : $S = \{7k+4 ; 7k+6 \ / k \in \mathbb{Z}\}$

10) حل المعادلة $10x \equiv 2[15]$:

تذكير : a و b عددان صحيحان حيث $a \neq 0$ و n عداد طبيعي أكبر تماما من 1 و $PGCD(|a|;n)=d$
تقبل المعادلة $ax \equiv b[n]$ حلولا في $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا قسم d العدد b

لدينا : $PGCD(10;15)=5$ وبما أنّ 5 لا يقسم 2 فإنّ المعادلة $10x \equiv 2[15]$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

11) حل المعادلة $x^2+x+7 \equiv 0[13]$:

طريقة 1 : لدينا $x^2+x+7 \equiv 0[13]$ ومنه : $x^2-12x+7 \equiv 0[13]$ وبالتالي : $(x-6)^2 \equiv 3[13]$

نستنتج أنّ : $(x-6) \equiv 4\ [13]$ أو $(x-6) \equiv -4\ [13]$ فيكون : $x \equiv 10\ [13]$ أو $x \equiv 2\ [13]$

إذن : مجموعة حلول المعادلة $x^2+x+7 \equiv 0[13]$ هي : $S=\{13k+2\,;13k+10\ \ /\ k \in \mathbb{Z}\}$

طريقة 2 : لدينا $x^2+x+7 \equiv 0[13]$ ومنه : $x^2+x-6 \equiv 0[13]$ وبالتالي : $(x-2)(x+3) \equiv 0\ [13]$

نستنتج أنّ : $(x-2) \equiv 0\ [13]$ أو $(x+3) \equiv 0\ [13]$ فيكون : $x \equiv 2\ [13]$ أو $x \equiv 10\ [13]$

إذن : مجموعة حلول المعادلة $x^2+x+7 \equiv 0[13]$ هي : $S=\{13k+2\,;13k+10\ \ /\ k \in \mathbb{Z}\}$

طريقة 3 : طريقة الجدول

12) حل المعادلة $x^2+8x-9 \equiv 0[12]$:

طريقة 1 : لدينا $x^2+8x-9 \equiv 0[12]$ ومنه : $(x+4)^2 \equiv 1[12]$

نستنتج أنّ : $(x+4) \equiv 1\ [12]$ أو $(x+4) \equiv -1\ [12]$ أو $(x+4) \equiv 5\ [12]$ أو $(x+4) \equiv -5\ [13]$

فيكون : $x \equiv 1\ [12]$ أو $x \equiv 3\ [12]$ أو $x \equiv 7\ [12]$ أو $x \equiv 9\ [12]$

إذن : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{12k+1\,;12k+3\ ;\ 12k+7\,;12k+9\ \ /\ k \in \mathbb{Z}\}$

طريقة 2 : طريقة الجدول

حل النشاط 9 :

1) أ) إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[7]$:

باستعمال الموافقة بترديد 7 ، تُكتب المعادلة (E) ... $7x+18y=9$ كما يلي : $18y \equiv 9[7]$

ونعلم أنّ : $18 \equiv 4[7]$ و $9 \equiv 2[7]$ وبالتالي : $4y \equiv 2[7]$ ومنه : $2\times 4y \equiv 2\times 2[7]$ أي : $8y \equiv 4[7]$

ونعلم أنّ : $8 \equiv 1[7]$ ومنه : $y \equiv 4[7]$ و هو المطلوب.

ب) استنتاج حلول المعادلة (E) :

لدينا : $y \equiv 4[7]$ ومنه : $y=7k+4$ مع $k \in Z$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $x=-18k-9$ مع $k \in Z$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k \in Z)$ $\begin{cases} x=-18k-9 \\ y=7k+4 \end{cases}$

جـ) تعيين الأعداد الصحيحة n التي تحقّق الجملة $\begin{cases} n \equiv 3\ [7] \\ n \equiv 12\ [18] \end{cases}$:

طريقة 1 : لدينا $\begin{cases} n \equiv 3[7] \\ n \equiv 12[18] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} n=7\alpha+3 \\ n=18\beta+12 \end{cases}$ وبالتالي: $7\alpha+3=18\beta+12$ أي : $7\alpha-18\beta=9$

هذه المعادلة الأخيرة من نفس شكل المعادلة $7x+18y=9$ مع $\alpha=x$ و $\beta=-y$

واعتمادا على السؤال (1- ب) نستنتج أنّ : $(k\in Z)$ $\begin{cases}\alpha = x = -18k-9\\ \beta = -y = -7k-4\end{cases}$

فيكون : $n = 7\alpha + 3 = 7(-18k-9)+3 = -126k-60$ مع $k\in Z$

إذن : مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S = \{-126k-57 \ / \ k\in Z\}$

طريقة 2 : لدينا $\begin{cases} n\equiv 3[7]\\ n\equiv 12[18]\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}18n\equiv 18\times 3[18\times 7]\\ 7n\equiv 7\times 12[7\times 18]\end{cases}$ أي : $\begin{cases}18n\equiv 54[126]\\ 7n\equiv 84[126]\end{cases}$

وبالتالي : $18n+7n\equiv 54+84[126]$ أي : $25n\equiv 138[126]$ أي : $25n\equiv 12[126]$

وعليه يكون : $5\times 25n\equiv 5\times 12[126]$ أي : $125n\equiv 60[126]$ وبالتالي : $-n\equiv 60[126]$

ومنه : $n\equiv -60[126]$ فيكون : $n = 126k'-60$ مع $k'\in\mathbb{Z}$

إذن : مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S = \{126k'-60 \ / \ k'\in\mathbb{Z}\}$

ملاحظة : من أجل $k' = -k$ نحصل على نفس شكل حلول الطريقة 1

طريقة 3 :

لدينا : $\begin{cases} n\equiv 3[7]\\ n\equiv 12[18]\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} n = 7\lambda+3\\ 7\lambda+3\equiv 12[18]\end{cases}$ أي : $\begin{cases} n = 7\lambda+3\\ 7\lambda\equiv 9[18]\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} n = 7\lambda+3\\ 5\times 7\lambda\equiv 5\times 9[18]\end{cases}$

أي : $\begin{cases} n = 7\lambda+3\\ 35\lambda\equiv 45[18]\end{cases}$ ، لكن : $35\equiv -1[18]$ و $45\equiv 9[18]$ نحصل على : $\begin{cases} n = 7\lambda+3\\ -\lambda\equiv 9[18]\end{cases}$ أي : $\begin{cases} n = 7\lambda+3\\ \lambda\equiv -9[18]\end{cases}$

من العلاقة : $\lambda\equiv -9[18]$ نستنتج أنّ : $\lambda = 18\lambda'-9$ وبالتعويض في العلاقة $n = 7\lambda+3$ ينتج :

$n = 7(18\lambda'-9)+3 = 126\lambda'-60$ مع $\lambda'\in\mathbb{Z}$

إذن : مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S = \{126\lambda'-60 \ / \ \lambda'\in\mathbb{Z}\}$

طريقة 4 :

تذكير : a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة . إذا كان $n\equiv 0[a]$ و $n\equiv 0[b]$ فإن $n\equiv 0[PPCM(a;b)]$

لدينا : $\begin{cases} n\equiv 3[7]\\ n\equiv 12[18]\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} n+63\equiv 3[7]\\ n+72\equiv 12[18]\end{cases}$ أي : $\begin{cases} n+60\equiv 0[7]\\ n+60\equiv 0[18]\end{cases}$

ومنه : $n+60\equiv 0[PPCM(7;18)]$ أي : $n+60\equiv 0[126]$ فيكون : $n+60 = 126p$ حيث $p\in\mathbb{Z}$

إذن : مجموعة حلول الجملة المعطاة هي : $S = \{126p-60 \ / \ p\in\mathbb{Z}\}$

2) أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 :

$7^0\equiv 1[9]$ ، $7^1\equiv 7[9]$ ، $7^2\equiv 4[9]$ ، $7^3\equiv 1[9]$ نستنتج أن: $(7^3)^k\equiv 1^k[9]$

فيكون : $7^{3k}\equiv 1[9]$ ، $7^{3k+1}\equiv 7[11]$ و $7^{3k+2}\equiv 4[9]$

نلخص بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11 في الجدول الآتي :

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$7^n\equiv\cdots[9]$	1	7	4

$k\in\mathbb{N}$

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2024^{1445}+2025^{1446}+2026^{1447}+2027^{1448}$ على 9 :

• لدينا : $2024 \equiv 8[9]$ ومنه : $2024 \equiv -1[9]$ وبالتالي : $2024^{1445} \equiv (-1)^{1445}\ [9]$ أي : $2024^{1445} \equiv -1[9]$

• ولدينا : $2025 \equiv 0[9]$ ومنه : $2025^{1446} \equiv 0[9]$

• ولدينا : $2026 \equiv 1[9]$ ومنه : $2026^{1447} \equiv 1^{1447}\ [9]$ أي : $2026^{1447} \equiv 1[9]$

• ولدينا : $2027 \equiv 2[9]$ نستنتج أنّ : $2027 \equiv -7[9]$ ومنه : $2027^{1448} \equiv (-7)^{1448}\ [9]$ أي : $2027^{1448} \equiv 7^{1448}\ [9]$

ونعلم أنّ : $1448 = 3\times 482 + 2 = 3k + 2$ وحسب الجدول السابق نستنتج أنّ : $2027^{1448} \equiv 4[9]$

• خلاصة : $2024^{1445} + 2025^{1446} + 2026^{1447} + 2027^{1448} \equiv -1+0+1+4[9]$

إذن : باقي القسمة الإقليدية للعدد $2024^{1445} + 2025^{1446} + 2026^{1447} + 2027^{1448}$ على 9 هو 4

حل النشاط 10 :

تذكير : نعتبر ، في $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة (E) : $ax + by = c$ حيث a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة
وليكن $PGCD(|a|;|b|) = d$

الحالة الأولى : إذا كان d لا يقسم c فإن المعادلة (E) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

الحالة الثانية : إذا كان d يقسم c فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$
بقسمة طرفي المعادلة (E) على العدد d نحصل على معادلة (E') من الشكل : $a'x + b'y = c'$
حيث : $PGCD(|a'|;|b'|) = 1$ ، نقوم بحل المعادلة (E') بإتباع :

- **طريقة 1 :** استعمال مبرهنة غوص (في غالب الأحيان ، نبدأ بتعيين حل خاص)
- **طريقة 2 :** استعمال الموافقات (الموافقة بترديد $|a'|$ أو الموافقة بترديد $|b'|$)

1) أ) $PGCD(135;570) = 15$

• **الاستنتاج :** بما أنّ $PGCD(135;570) = 15$ و 15 يقسم 1005 فإنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب) تبيان أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 2\ [9]$:

بقسمة طرفي المعادلة (E) على 15 نحصل على المعادلة (E') ... $38x - 9y = 67$

باستعمال الموافقة بترديد 9 ، تكتب المعادلة (E') كما يلي : $38x \equiv 67\ [9]$ ومنه : $2x \equiv 4\ [9]$

وعليه فإنّ : $x \equiv 2[9]$ وهو المطلوب.

(لدينا : $2x \equiv 4[9]$ ومنه : $5\times 2x \equiv 5\times 4[9]$ أي : $10x \equiv 25[9]$ وعليه فإنّ : $x \equiv 2[9]$)

• **استنتاج حلول المعادلة (E) :**

لدينا : $x \equiv 2[9]$ ومنه : $x = 9k + 2$ وبالتعويض في المعادلة (E') نجد : $y = 38k + 1$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})\begin{cases} x = 9k + 2 \\ y = 38k + 1 \end{cases}$

2) تعيين العددين الطبيعيين α ، β :

الشروط : $0 < \alpha \le 3$ و $0 \le \beta \le 3$

لدينا : $P = \overline{1\beta\alpha\alpha\beta 1} = 1 + \beta\times 4 + \alpha\times 4^2 + \alpha\times 4^3 + \beta\times 4^4 + 1\times 4^5 = 80\alpha + 260\beta + 1025$ ... (1)

ولدينا : لدينا : $P = \overline{\alpha\beta\alpha 40} = 0 + 4\times 5 + \alpha\times 5^2 + \beta\times 5^3 + \alpha\times 5^4 = 650\alpha + 125\beta + 20$ ... (2)

من (1) و (2) يكون : $650\alpha + 125\beta + 20 = 80\alpha + 260\beta + 1025$ أي : $570\alpha - 135\beta = 1005$

وحسب السؤال 1) نستنتج أنّ : $\alpha = x = 9k + 2$ و $\beta = y = 38k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$

وبما أنّ $0 < \alpha \le 3$ و $0 \le \beta \le 3$ يكون : $\alpha = 2$ و $\beta = 1$

• **كتابة P في النظام العشري :** $P = 650\alpha + 125\beta + 20 = 650\times 2 + 125\times 1 + 20 = 1445$

3) أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 :

$k \in \mathbb{N}$

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$4^n \equiv \cdots[11]$	1	4	5	9	3

ب) تعيين قيم n التي من أجلها يكون العدد $5n^2+1445^{2024}+1445^{3x+y}$ قابلا للقسمة على 11 :

• لدينا : $1445 \equiv 4[11]$ ومنه : $1445^{2024} \equiv 4^{2024}[11]$ ونعلم أنّ : $2024 = 5\times 404+4 = 5k+4$

وحسب الجدول السابق ، نستنتج أنّ : $1445^{2024} \equiv 3[11]$ ... (3)

• ولدينا : $3x+y = 3(9k+2)+(38k+1) = 65k+7 = (65k+5)+2 = 5(13k+1)+2 = 5k'+2$

ولدينا : $1445^{3x+y} \equiv 4^{5k'+2}[11]$ وحسب الجدول السابق ، نستنتج أنّ : $1445^{3x+y} \equiv 5[11]$ ... (4)

• ولدينا : ($5n^2+1445^{2024}+1445^{3x+y}$ قابلا للقسمة على 11) يكافئ ($5n^2+3+5 \equiv 0[11]$)

ومنه : $5n^2 \equiv 3[11]$ وبالتالي : $9\times 5n^2 \equiv 9\times 3[11]$ أي : $n^2 \equiv 5[11]$

نستنتج أنّ: $n \equiv 4[11]$ أو $n \equiv 7[11]$ فيكون : $S = \{11k+4\,;11k+7 \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

حل النشاط 11 :

1) أ) إيجاد الـ $PGCD(296\ ;\ 36)$: $PGCD(296\ ;\ 36) = 4$

• استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا : بما أن الـ $PGCD(296\ ;\ 36)$ يقسم العدد 816 أي 4 يقسم 816

فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة Z^2

ب) التحقق أنّ الثنائية $(3;2)$ حلّ للمعادلة (E) : $296\times 3 - 36\times 2 = 816$

• استنتاج حلول المعادلة (E) :

بقسمة طرفي المعادلة (E) على 4 نحصل على المعادلة (E') ... $74x - 9y = 204$

لدينا : $\begin{cases} 74x - 9y = 204 \\ 74x_0 - 9y_0 = 204 \end{cases}$ وبالطرح طرفا من طرف ينتج : $74(x-x_0) - 9(y-y_0) = 0$

وبالتالي : $74(x-x_0) = 9(y-y_0)$ ... $(*)$

من المعادلة $(*)$ نستنتج أن العدد 9 يقسم الجداء $74(x-x_0)$ ، وبما أن 9 أولي مع 74 وحسب مبرهنة غوص فإنّ 9 يقسم $(x-x_0)$ ومنه : $x - x_0 = 9k$ وبالتالي : $x = 9k + x_0 = 9k+3$ مع $k \in Z$

من المعادلة $(*)$ نستنتج أن العدد 74 يقسم الجداء $9(y-y_0)$ ، وبما أن 9 أولي مع 74 وحسب مبرهنة غوص فإنّ 9 يقسم $(y-y_0)$ ومنه : $y - y_0 = 9k$ وبالتالي: $y = 4k + y_0 = 9k+3$ مع $k \in Z$

ملاحظة : بعد تعيين x ، يمكن التعويض في المعادلة (E) للحصول على y

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k \in Z)$ $\begin{cases} x = 9k+3 \\ y = 74k+2 \end{cases}$

2) تعيين الأعداد الطبيعية α و β :

الشروط : $0 \le \alpha \le 5$ **و** $0 \le \beta \le 5$

(1) ... $P = \overline{1\alpha\beta 12}^{6} = 2+1\times 6^1+\beta\times 6^2+\alpha\times 6^3+1\times 6^4 = 216\alpha+36\beta+1304$

(2) ... $P = \overline{\alpha 750}^{8} = 0+5\times 8^1+7\times 8^2+\alpha\times 8^3 = 512\alpha+488$

من (1) و (2) ينتج: $216\alpha+36\beta+1304 = 512\alpha+488$ ومنه : $296\alpha - 36\beta = 816$

ومنه : $a'b' = 6$ وبالتالي : $(a' ; b') \in \{(1;6),(2;3),(3;2),(6;1)\}$

نستنتج أن : $(a ; b) \in \{(3;18),(6;9),(9;6),(18;3)\}$

حل النشاط 12 :

1) أ) إيجاد الـ $PGCD(104 ; 16)$: $PGCD(104 ; 16) = 8$

- تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلولا : بما أن الـ $PGCD(104 ; 16)$ يقسم العدد 280 أي 8 يقسم 280

فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب) تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 2[13]$:

بقسمة طرفي المعادلة (E) على العدد 8 نحصل على المعادلة (E') التالية : $13x - 2y = 35$

باستعمال الموافقة بترديد 13 ، تكتب المعادلة (E') كما يلي : $-2y \equiv 35[13]$ ، لكن $-2 \equiv 11[13]$

و $35 \equiv 9[13]$ وبالتالي : $11y \equiv 9[13]$ ومنه : $6\times 11y \equiv 6\times 9[13]$ أي : $66y \equiv 54[13]$

ونعلم أن $66 \equiv 1[13]$ و $54 \equiv 2[13]$ ومنه : $y \equiv 2[13]$

- استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا $y \equiv 2[13]$ ومنه $y = 13k + 2$ وبالتعويض في (E') نجد $x = 2k + 3$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x ; y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 2k+3 \\ y = 13k+2 \end{cases}$

2) تعيين الأعداد الطبيعية α ، β و γ :

الشروط : $0 \le \alpha \le 3$ ، $0 \le \beta \le 3$ و $0 \le \gamma \le 3$

$$\lambda = \overline{1\alpha\alpha\beta\beta\gamma}^{\,4} = \gamma + \beta\times 4^1 + \beta\times 4^2 + \alpha\times 4^3 + \alpha\times 4^4 + 1\times 4^5 = 320\alpha + 20\beta + \gamma + 1024 \quad \ldots (1)$$

$$\lambda = \overline{1\alpha\beta 13}^{\,6} = 3 + 1\times 6^1 + \beta\times 6^2 + \alpha\times 6^3 + 1\times 6^4 = 216\alpha + 36\beta + 1305 \quad \ldots (2)$$

من (1) و (2) ينتج : $320\alpha + 20\beta + \gamma + 1024 = 216\alpha + 36\beta + 1305$

ومنه : $104\alpha - 16\beta = 281 - \gamma \quad \ldots (3)$

الحالة 1 : لمّا $\gamma = 0$ ، تُكتب عندئذ المعادلة (3) كما يلي : $104\alpha - 16\beta = 281$

وبما أن الـ $PGCD(104 ; 16)$ لا يقسم 281 فإن المعادلة $104\alpha - 16\beta = 281$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}^2$

الحالة 2 : لمّا $\gamma = 1$ ، تُكتب عندئذ المعادلة (3) كما يلي : $104\alpha - 16\beta = 280$

وحسب السؤال رقم (1- ب) نستنتج أن : $(k \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} \alpha = x = 2k+3 \\ \beta = y = 13k+2 \end{cases}$

لكن $0 \le \alpha \le 3$ و $0 \le \beta \le 3$ وعليه يكون : $\alpha = 3$ و $\beta = 2$

الحالة 3 : لمّا $\gamma = 2$ ، تُكتب عندئذ المعادلة (3) كما يلي : $104\alpha - 16\beta = 279$

وبما أن الـ $PGCD(104 ; 16)$ لا يقسم 279 فإن المعادلة $104\alpha - 16\beta = 279$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}^2$

الحالة 4 : لمّا $\gamma = 3$ ، تُكتب عندئذ المعادلة (3) كما يلي : $104\alpha - 16\beta = 278$

وبما أن الـ $PGCD(104 ; 16)$ لا يقسم 278 فإن المعادلة $104\alpha - 16\beta = 278$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}^2$

خلاصة : $\alpha = 3$ ، $\beta = 2$ و $\gamma = 1$

- كتابة λ في النظام العشري : $\lambda = 320\times 3 + 20\times 2 + 1 + 1024 = 2025$

3) أ) تحليل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية : $2025 = 3^4 \times 5^2$

- استنتاج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2025 :

من المساواة $2025 = 3^4 \times 5^2$ ، نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان مكعب كل منهما يقسم العدد 2025 هما : 1 و 3

ب) تعيين الثنائيات $(a\,;b)$ التي تحقق $m^3 + 11\,d^3 = 2025$:

طريقة : لإيجاد الثنائيات $(a\,;b)$ التي تحقق $m^3 + 11\,d^3 = 2025$ ، نستعمل الخاصتين :

- $PGCD(a\,;b) = d$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما حيث $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$
- $d \times m = a \times b$

لدينا : $d \times m = a \times b$ ومنه : $d \times m = da' \times db'$ وبالتالي : $m = da'b'$

تكتب المساواة : $m^3 + 11\,d^3 = 2025$ كما يلي : $(da'b')^3 + 11\,d^3 = 2025$

ومنه : $d^3\left[(a'b')^3 + 11\right] = 2025 \quad ... \quad (*)$

نستنتج أن d^3 يقسم 2025 واعتمادا على السؤال السابق نستنتج أن $d \in \{1\,;3\}$

- الحالة 1 : لمّا $d = 1$

تكتب عندئذ المساواة $(*)$ كما يلي : $(a'b')^3 = 2014$ وهي مستحيلة ($\sqrt[3]{2014} \notin \mathbb{N}$) .

- الحالة 2 : لمّا $d = 3$

تكتب عندئذ المساواة $(*)$ كما يلي : $(a'b')^3 + 11 = 75$ أي : $(a'b')^3 = 64$

ومنه : $a'b' = 4$ وبالتالي : $(a'\,;b') \in \{(1\,;4),(4\,;1)\}$

نستنتج أن : $(a\,;b) \in \{(3\,;12),(12\,;3)\}$

حل النشاط 13 :

1) أ) إيجاد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 420 ، 525 و 945 :

$$PGCD(945\,;\,525\,;\,420) = 105$$

ب) إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 8\,[9]$:

بقسمة طرفي المعادلة (E) على العدد 105 نحصل على المعادلة (E') التالية : $4x - 9y = 5$

باستعمال الموافقة بترديد 9 ، تكتب المعادلة (E') كما يلي : $4x \equiv 5[9]$ ومنه : $7 \times 4x \equiv 7 \times 5[9]$

أي : $28x \equiv 35\,[9]$ ، لكن : $28 \equiv 1[9]$ و $35 \equiv 8\,[9]$ فيكون : $x \equiv 8\,[9]$

- استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا : $x \equiv 8\,[9]$ ومنه : $x = 9k + 8$ وبالتعويض في (E') نجد $y = 4k + 3$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 9k + 8 \\ y = 4k + 3 \end{cases}$

2) أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 :

$9^0 \equiv 1[11]$ ، $9^1 \equiv 9[11]$ ، $9^2 \equiv 4[11]$ ، $9^3 \equiv 3[11]$ ، $9^4 \equiv 5[11]$ ، $9^5 \equiv 1[11]$

من العلاقة : $9^5 \equiv 1[11]$ نستنتج أن : $(9^5)^k \equiv 1^k\,[11]$ أي : $9^{5k} \equiv 1[11]$

فيكون : $9^{5k+1} \equiv 9[11]$ ، $9^{5k+2} \equiv 4[11]$ ، $9^{5k+3} \equiv 3[11]$ ، $9^{5k+4} \equiv 5[11]$

نلخص بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11 في الجدول الآتي :

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$9^n \equiv \cdots[11]$	1	9	4	3	5

$k \in \mathbb{N}$

ب) تعـيين الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $\left(2022^{x-y}+y+2\right)$ قابلا للقسمة على 11 :

لدينا : $\left(2022^{x-y}+y+2\right)=2022^{(9k+8)-(4k+3)}+(4k+3)+2=2022^{5(k+1)}+4k+5$

وبالتالي : $\left(2022^{x-y}+y+2\right)=2022^{5k'}+4k+5$

ولدينا : $2022 \equiv 9\,[11]$ وبالتالي : $2022^{5k'} \equiv 9^{5k'} \equiv 1\,[11]$

$\left(2022^{x-y}+y+2\right)$ قابلا للقسمة على 11 يكافئ $1+4k+5\equiv 0[11]$ ومنه : $4k\equiv 5[11]$

وبالتالي : $3\times 4k\equiv 3\times 5[11]$ أي : $k\equiv 4[11]$ فيكون : $k=11\alpha+4$ ومنه : $\begin{cases} x=99\alpha+44 \\ y=44\alpha+19 \end{cases}(\alpha\in\mathbb{N})$

3) أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d :

لدينا : $PGCD(a\,;b)=d$ ومنه : $d \mid (4a-9b)$ أي : $d \mid 5$ فيكون : $d\in\{1;5\}$

ب) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $d=5$:

لدينا : $PGCD(a\,;b)=5$ ومنه : $\begin{cases}5 \mid a\\ 5 \mid b\end{cases}$ أي : $\begin{cases}5 \mid (9n+8)\\ 5 \mid (4n+3)\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}5 \mid (9n+8)\\ 5 \mid 2(4n+3)\end{cases}$

نستنتج أن : $5 \mid \left[(9n+8)-2(4n+3)\right]$ أي : $5 \mid (n+2)$ فيكون : $n=5\beta-2$ مع $\beta\in\mathbb{N}^*$

4) أ) تبيان أن العددين A و B يقبلان القسمة على $n+1$:

لدينا : $A=9n^2+17n+8=(n+1)(9n+8)$ و $B=4n^2+7n+3=(n+1)(4n+3)$

نستنتج أن كلا من العددين A و B يقبل القسمة على $(n+1)$

ب) إيجاد بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B :

$$PGCD(A\,;B)=(n+1)\times PGCD\big((9n+8);(4n+3)\big)=(n+1)\times d$$

من السؤال (3 - أ) وجدنا أن : $d\in\{1;5\}$

- لمّا $n=5\beta-2$ مع $\beta\in\mathbb{N}^*$ يكون $d=5$ ومنه : $PGCD(A\,;B)=(n+1)\times 5=5(n+1)$

- لمّا $n\neq 5\beta-2$ مع $\beta\in\mathbb{N}^*$ يكون $d=1$ ومنه : $PGCD(A\,;B)=(n+1)\times 1=(n+1)$