6

الزوايا الموجهة

السنة الثانية 2AS

كتابة :أستاذ يحدة أمين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 2ع ت+2ت ر+2ريا
المدة : 2 ساعة

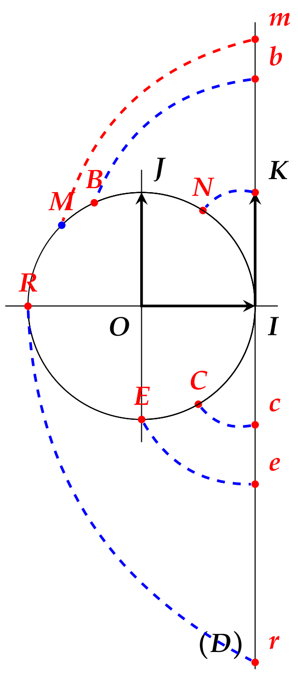
الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة و حساب المثلثات
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : الزوايا الموجهة

المكتسبات القبلية : الدائرة المثلثية و العلاقات المثلثية
الكفاءات المستهدفة : إستعمال خواص الزوايا الموجهة لإثبات تقايس الزوايا و تعيين أقياس زاوية موجهة لشعاعين .
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

1 نشاط مقترح



لتكن الدائرة المثلثية (C) في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
(D) هو المماس للدئرة (C) في I و K هي النقطة من (D) حيث : $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{OJ}$
b ; m ; k ; e ; c و r نقط من المستقيم (D) تحقق : $\overrightarrow{Ib}=2\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{Im}=\frac{3\pi}{4}\overrightarrow{IK}$
$\overrightarrow{Ie}=-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{Ir}=-\pi\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{Ic}=-\frac{\pi}{3}\overrightarrow{IK}$
وبلف المستقيم (D) على الدائرة (C) ، تنطبق النقط b ; m ; K ; e ; c و r على النقط B ; M ; N ; E ; C و R على الترتيب كما هو موضح في الشكل المقابل

مرحلة بناء المعارف

1. ماذا يمثل 1 رديان؟
2. أحسب بالرديان قيس الزوايا التالية :
$\widehat{EOI}$; $\widehat{ROI}$; $\widehat{COI}$; $\widehat{BOI}$; $\widehat{MOI}$; $\widehat{NOI}$
3. أحسب بالدرجة (بالتقريب) قيس الزوايا التالية :
$\widehat{EOI}$; $\widehat{ROI}$; $\widehat{COI}$; $\widehat{BOI}$; $\widehat{MOI}$; $\widehat{NOI}$

مناقشة نشاط

1. 1 رديان هو قيس زاوية التي طول قوسها 1 وحدة في الدائرة المثلثية
2.

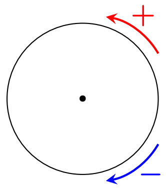
$$\widehat{NOI}=\left\|\overrightarrow{IK}\right\|rad=1rad=57,30^\circ$$
$$\widehat{MOI}=\left\|\overrightarrow{Im}\right\|rad=\left\|\frac{3\pi}{4}\overrightarrow{IK}\right\|rad=\frac{3\pi}{4}rad=135^\circ$$
$$\widehat{BOI}=\left\|\overrightarrow{Ib}\right\|rad=\left\|2\overrightarrow{IK}\right\|rad=2rad=114.60^\circ$$
$$\widehat{COI}=\left\|\overrightarrow{Ic}\right\|rad=\left\|-\frac{\pi}{3}\overrightarrow{IK}\right\|rad=\frac{\pi}{3}rad=60^\circ$$
$$\widehat{ROI}=\left\|\overrightarrow{Ir}\right\|rad=\left\|-\pi\overrightarrow{IK}\right\|rad=\pi rad=180^\circ$$
$$\widehat{EOI}=\left\|\overrightarrow{Ie}\right\|rad=\left\|-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{IK}\right\|rad=\frac{\pi}{2}rad=90^\circ$$

مناقشة نشاط 1 صفحة 210

القيس بالدرجة	15	22.5	36	105	67, 5	75	52, 5	105	142, 5
القيس بالراديان	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{12}$

1) الزوايا الموجهة:

1) زاوية موجهة لشعاعين غير معدومين:



يوجه المستوي توجيها مباشرا (أو توجيهاً موجباً) ويسمى الاتجاه الآخر الاتجاه الغير المباشر (او الاتجاه السالب).

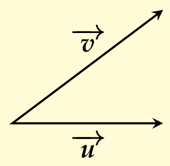
اصطلاحاً نختار الاتجاه المباشر الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.

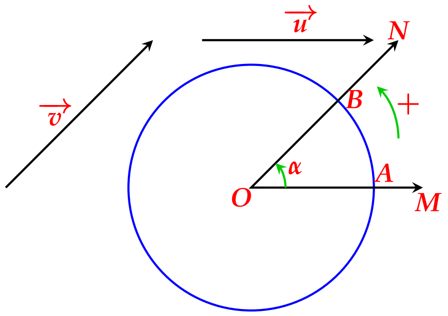
في المستوي الموجه نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1 في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

في كل مما يأتي نعتبر المستوي موجهاً

تعريف

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين .
الثنائية $(\vec{u},\vec{v})$ تسمى زاوية موجهة لشعاعين.





ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين ولتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O لتكن M و N النقطتين من المستوي حيث $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ النصف مستقيم $[OM)$ يقطع (C) في A و النصف مستقيم $[ON)$ يقطع (C) في B ، القيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو كذلك قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$.

تعريف

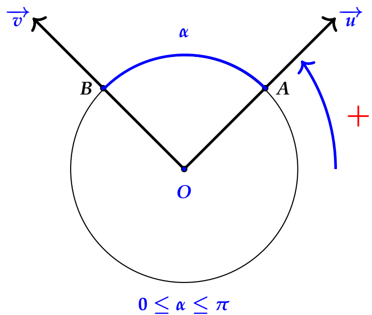
✍ ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين .
إذا كان x قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فإن كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تعبير:

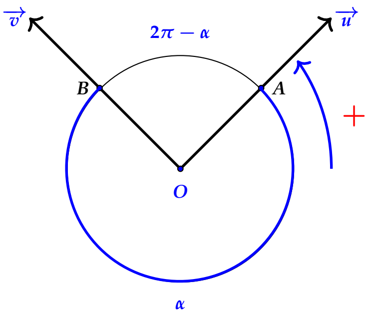
نقبل التجاوز في التعبير الذي نعبر به عن الزاوية و قيس لها في نفس الوقت ونقول الزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ تساوي x .

خاصية

من بين أقياس الزاوية الموجهة يوجد قيس وحيد من المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$.



الشكل رقم 1



الشكل رقم 2

القيمة المطلقة للقيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ يساوي القيس بالراديان للزاوية الهندسية المشكلة بـ: $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$

في الشكل الأول القيس الرئيسي هو α أما في الشكل الثاني القيس الرئيسي هو $\alpha-2\pi$. كون $\pi<\alpha<2\pi$ نحصل $0<\alpha-\pi<\pi$. إذن في الحالتين القيس الرئيسي ينتمي إلى $]-\pi;\pi]$

في الشكل الأول قيس الزاوية الهندسية $\widehat{AOB}$ هو α الذي هو القيس الرئيسي لـ $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ أما في الشكل الثاني قيس $\widehat{AOB}$ هو $2\pi-\alpha$. لكن $|\alpha-2\pi|=2\pi-\alpha$ و $(\alpha-2\pi)$ هوالقيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$

نتائج:

1 القيس الرئيسي للزاوية المعدومة $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})$ هو 0 .

2 القيس الرئيسي للزاوية المستقيمة $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{-u})$ هو π .

3 القيس الرئيسي للزاوية القائمة المباشرة هو $\frac{\pi}{2}$

4 القيس الرئيسي للزاوية القائمة غير المباشرة هو $-\frac{\pi}{2}$.

5 إذا كان x القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ فإن $|x|$ هو قيس للزاوية الهندسية المكونة من $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$.

مـــثـال

لنعطي القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ حيث : $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=-\frac{297\pi}{4}\text{rad}$

فإن : $x=-\frac{297\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ و $-\pi<x\leq\pi$

ومنه $-\pi<-\frac{297\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

$$-1<-\frac{297}{4}+2k\leq 1$$

$$\frac{293}{8}=36.625<k\leq\frac{301}{8}=37.625$$

إذن $k=37$. وبالتالي $x=-\frac{297}{4}+74\pi=-\frac{\pi}{4}$

طريقة 2 :

$$\begin{aligned}-\frac{297}{4}&=-\frac{-300\pi+3\pi}{4}\\&=-75\pi+\frac{3\pi}{4}\\&=-74\pi-\pi+\frac{3\pi}{4}\\&=-74\pi-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

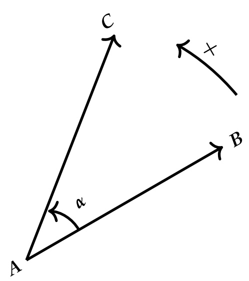
إيجاد قيس زاوية موجهة إنطلاقا من قيس زاوية هندسية :

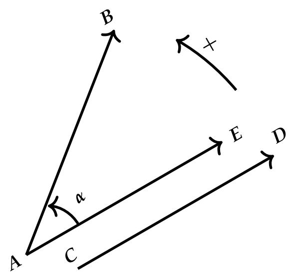
❶ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ يشكلان زاوية هندسية $\widehat{BAC}$ قيسها α

★ حساب قيس $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

القيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ هو α أو $-\alpha$

لكن في الشكل السابق لوضع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ندور بالزاوية الهندسية α في الإتجاه المباشر فيكون عندئذ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=+\alpha$ وعليه يكون $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-\alpha$





❷ في حالة شعاعين ليس لهما نفس المبدأ نثبت $\overrightarrow{AB}$ ثم نرسم من النقطة A شعاع $\overrightarrow{AE}$ يوازي $\overrightarrow{CD}$ له نفس الإتجاه عند ئذ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$ ونقوم بالحساب كما في الحالة الأولى .

حل تمرين 27 صفحة 228 :

تعيين القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ في كل حالة :

1) $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \frac{14\pi}{3}$:

$\frac{14\pi}{3} = \frac{15\pi-\pi}{3} = 5\pi - \frac{\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$ إذن $\frac{2\pi}{3}$ هو القيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

2) $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = -\frac{35\pi}{2}$:

$-\frac{35\pi}{2} = \frac{-36\pi+\pi}{2} = -18\pi - \frac{\pi}{2}$ ، إذن $\frac{\pi}{2}$ هو القيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

2) $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = -\frac{721\pi}{5}$: $\frac{721\pi}{5} = \frac{720\pi+\pi}{2} = 144\pi + \frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{5}$ هو القيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

تمرين منزلي :

ليكن ABC مثلث متقايس الأضلاع

1 عيّن قيسا للزاويتين : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

2 عيّن قيسا للزاوية : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB})$

3 عين قيس الزاوية : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB})$

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

التقويم

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 2ع+2تر+2ريا
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة و حساب المثلثات
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : خواص الزوايا الموجهة

المكتسبات القبلية : الدائرة المثلثية و العلاقات المثلثية
الكفاءات المستهدفة : خواص الزوايا المجة ، الزاوية المحيطية .
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

2) خواص الزوايا الموجهة:

1) الزوايا الموجة المتقايسة:

خاصية

$\overrightarrow{u}$ ، $\overrightarrow{v}$ ، $\overrightarrow{u'}$ و $\overrightarrow{v'}$ أشعة غير معدومة من المستوي .
ليكن α قيسا للزاوية $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ و α' قيسا للزاوية $(\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'})$
تكون الزاويتان $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ و $(\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'})$ متقايستين إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $\alpha'=\alpha+2k\pi$.

ملاحظة:

- وجود عدد صحيح k حيث $\alpha'=\alpha+2k\pi$ معناه $\alpha'-\alpha$ مضاعف لـ 2π .
- إذا كان $\alpha'=\alpha+2k\pi$ نقول أن α و α' قيسان لنفس الزاوية أو قيسان لزاويتين متقايستين .

مرحلة بنـــــاء المعـــــارف

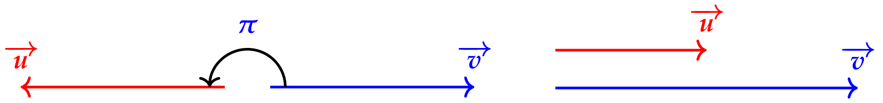
مثال:

هل العددان $\frac{1924\pi}{5}$ و $\frac{-4\pi}{5}$ قيسان لنفس الزاوية ؟
لدينا: $\frac{1928\pi}{5}=\frac{1924\pi}{5}-\left(\frac{-4\pi}{5}\right)$
العدد $\frac{1928\pi}{5}$ ليس من مضاعفات (2π)
إذن : $\frac{1924\pi}{5}$ و $\frac{-4\pi}{5}$ قيسين لزاويتين مختلفتين .

2)الزوايا الموجهة و الإرتباط الخطي لشعاعين:

خاصية

$\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي.
يكون الشعاعان $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ مرتبطان خطيا إذا وفقط إذا كان: $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=2k\pi$
أو $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\pi+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$



$\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ لهما نفس الإتجاه $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ متعاكسين في الإتجاه

ملاحظة:

- العلاقتان السابقتان يمكن تلخيصهما في علاقة واحدة حيث حيث نكتب $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=k\pi$ و k عدد صحيح .

★ إذا كان k زوجي فإن الشعاعين لهما نفس الإتجاه

★ وإذا كان k فردي فإن الشعاعين متعاكسين في الإتجاه

نتيجة

تكون النقط A ، B و C في إستقامية إذا و فقط إذا كان $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=k\pi$ حيث K عدد صحيح

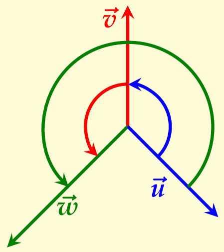
3) علاقة شال :

نقبل دون برهان صحة العلاقة التالية التي تسمى علاقة شال.

مبرهنة

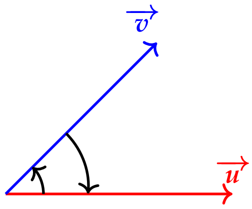
من أجل كل ثلاثة أشعة غير معدومة $\overrightarrow{u}$ ، $\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{w}$

لدينا : $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})$

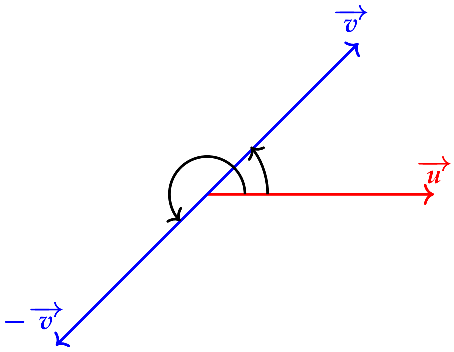


نتائج: من أجل كل شعاعين غير معدومين $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ لدينا

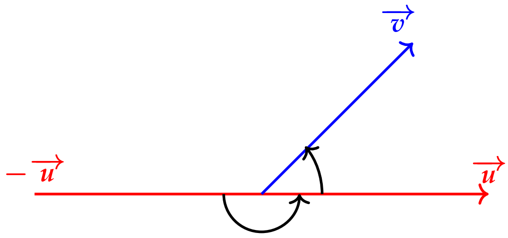
❶ $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=-(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u})$



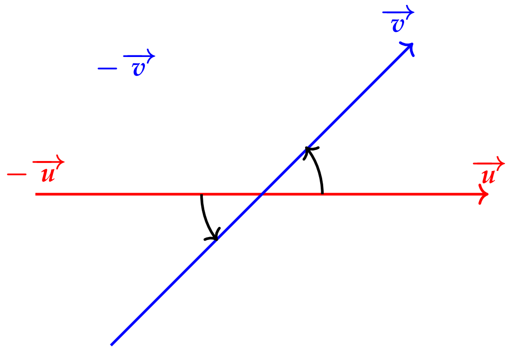
❷ $(\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})+\pi$.



❸ $(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})+\pi$



❹ $(-\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u})$



البـرهـان

❶ لدينا: $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})=0$ ولكن حسب علاقة شال يكون $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})$

ومنه نجد $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=0$ وعليه نجد $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=-(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})$

❷ لدينا حسب علاقة شال $(\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})+(-\overrightarrow{v};\overrightarrow{v})$ لكن $(-\overrightarrow{v};\overrightarrow{v})=\pi$

إذن $(\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})+\pi$

❸ حسب علاقة شال لدينا $(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{u})+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$ لكن $(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{u})=\pi$

إذن $(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\pi+(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$

لدينا: $(-\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v})=(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{u})+(\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v})=\pi+(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v};-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})+2\pi$

إذن $(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ ■

خاصية

$\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي . ليكن k و k' عددين حقيقيين غير معدومين .

- إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن $(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
- إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن $(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi$.

أمـــثلة

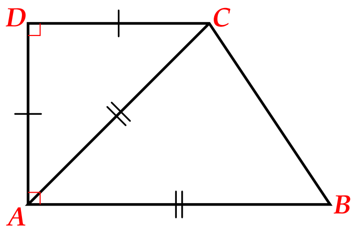
لتكن $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{4}$

إذن $(-5\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{4} + pi$ ، $(4\overrightarrow{u}; 4\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{4}$ ، $(-5\overrightarrow{u}; -7\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{4}$

حل تمرين 29 صفحة229 :

تعيين القيس الرئيسي لزوايا الموجهة :

التقويم



1) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$:

لدينا : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ و $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$

إذن $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

وبالتالي : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi - \frac{\pi}{4}$

وبما أنّ : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

فإن : $2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{3\pi}{4}$ ومنه : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{3\pi}{8}$

2) $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$:

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{4}$.

3) $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA})$:

$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}) = \pi$.

4) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$:

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{-AB}, \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{-AB}, \overrightarrow{AD}) + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$$

إذن $-\frac{\pi}{2}$ هو القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$.

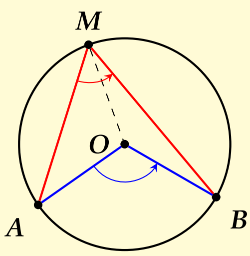
تمرين 31 صفحة 229

3) الزاوية المحيطية :

(C) دائرة مثلثية مركزها O . A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من الدائرة (C) الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ تسمى زاوية محيطية.

مبرهنة

إذا كانت A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية (C) مركزها O وإذا كان α قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. فإن $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$



برهان :

حسب علاقة شال : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}) \cdots (\bigstar)$ المثلث MOA متساوي الساقين

وحسب خواص الزوايا في المثلث فإن: $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = \pi - 2(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA}) = \pi + 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}) \cdots (1)$

المثلث MOB متساوي الساقين وحسب خواص الزوايا في المثلث فإن:

$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}) = \pi - 2(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}) = \pi + 2(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}) \cdots (2)$

بجمع (1) و (2) وحسب العلاقة $(\bigstar)$ نجد :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) &= 2\pi - 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})\\ &= 2\pi + 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\\ &= 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\end{aligned}$$

ومنه $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$. □

تمرين منزلي

1. بين أن x و y هما قيسين لنفس الزاوية الموجهة :حيث $x = \dfrac{11\pi}{4}$ و $y = \dfrac{-5\pi}{4}$

2. عين القيس الرئيسي للزاوية التي قياسها $\dfrac{2012\pi}{3}$

3. في المستوي الموجه لدينا : $\left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ ، عين قيسا لكل زاوية من الزوايا الموجهة التالية :

4. $\left(\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}\right)$ $\left(3\overrightarrow{V};2\overrightarrow{U}\right)$ $\left(2\overrightarrow{V};-3\overrightarrow{U}\right)$ $\left(-3\overrightarrow{V};7\overrightarrow{U}\right)$ $\left(-\overrightarrow{V};-\overrightarrow{U}\right)$

5. لتكن A و B نقطتين من الدائرة المثلثية حيث : $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$
   - عين قيسا للزوايا الموجهة : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

6. ليكن $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right) = \pi$ ، $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{D'C'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
   - ماذا يمكن القول عن المستقيمين (AB) و (DC) و المستقيمين $(A'B')$ و $(D'C')$

حـل

1. $x - y = \dfrac{11\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{4} = 4\pi = 2(2\pi)$ ومنه x و y قيسين لنفس الزاوية

2. $\dfrac{2012\pi}{3} = \dfrac{2010\pi + 2\pi}{3} = 670\pi + \dfrac{2\pi}{3}$ ومنه القيس الرئيسي للزاوية التي قياسها $\dfrac{2012\pi}{3}$ هو $\dfrac{2\pi}{3}$

3. في المستوي الموجه لدينا : $\left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

$\left(\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}\right) = -\left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$; $\left(3\overrightarrow{V};2\overrightarrow{U}\right) = \left(\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$;

$\left(2\overrightarrow{V};-3\overrightarrow{U}\right) = \left(\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}\right) + \pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$

$\left(-3\overrightarrow{V};7\overrightarrow{U}\right) = \left(\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}\right) + \pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$; $\left(-\overrightarrow{V};-\overrightarrow{U}\right) = \left(\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

4. A و B نقطتين من الدائرة المثلثية حيث : $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$

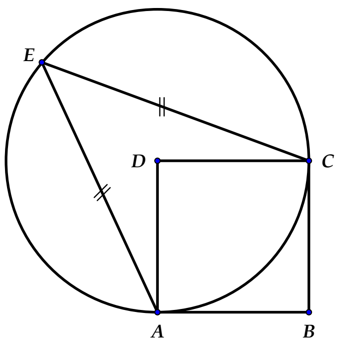
لدينا حسب علاقة شال: $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}\right) + \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)$ ومنه :

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{12}$

5. المستقيمين (AB) و (DC) متوازيان و المستقيمين $(A'B')$ و $(D'C')$ متعامدان

تمرين منزلي

في مستوي الموجه $ABCD$ مربع و ACE مثلث متساوي الساقين ، (C) الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها DC كما في الشكل المقابل .



1 عين قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)$

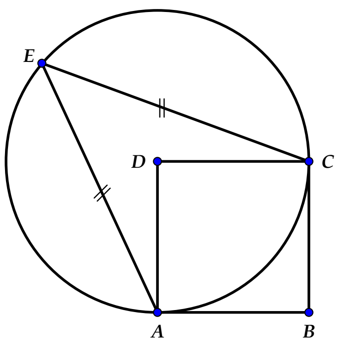
2 بين أن المثلثين EDC و EDA متقايسان

3 عين قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)$ و $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DA}\right)$

4 بين أن: $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\pi$

5 ماذا يمكنك القول عن النقط E ، D ، B؟ علل إجابتك.

حل



1 $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$; $\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

2 تبيان أن المثلثين EDC و EDA متقايسان

$EC=EA$ و $DC=DA$ و يشتركان في نفس الضلع ED

ومنه المثلثين EDC و EDA متقايسان

3 حساب قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)$ و $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DA}\right)$

$$\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)=2\left(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC}\right)=2\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}\right)$$

ومنه $\left(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC}\right)=\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)=\dfrac{\pi}{8}$

$$\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\pi-2\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

4 $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{4}=\pi$

5 النقط E ، D ، B في إستقامية لأن $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=$
$\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}\right)=\pi$

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 2ع+2تر+2ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة و حساب المثلثات
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : حساب المثلثات

المكتسبات القبليـة : تعليم نقطة على الدائرة المثلثية ، الدالتين cos و sin ،خواص الزوايا الموجهة و أقياس زاوية موجهة لشعاعين .
الكفاءات المستهدفة : تعيين قيم بعض الزوايا الشهيرة ، حساب جيب تام و جيب زاوية موجهة لشعاعين .
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

المراحل: مرحلة الإنطلاق — مرحلة بناء المعارف

1 نشاط مقترح

لتكن (C) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ و x عدد حقيقي. M نقطة من (C) حيث $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) = x$.

1) عبّر عن إحداثيي النقطة M بدلالة x في المعلم $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

2) علّم على الدائرة (C) النقط المرفقة بالأعداد التالية ،ثم عيّن احداثياتها :

$$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{25\pi}{6}; \frac{-39\pi}{4}$$

مناقشة النشاط :

1) التعبير عن إحداثيي النقطة M بدلالة x في المعلم $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:
$M(X;Y)$ نقطة من الدائرة المثلثية (C)
نضع : $OA = X$ و $AM = Y$.
في المثلث OAM القائم في A لدينا : $\cos x = \frac{OA}{OM}$ أي $\cos x = \frac{X}{OM}$.
بما أن $\|\overrightarrow{OM}\| = 1$ (لأنه نصف قطر للدائرة المثلثية (C)) فإن : $\cos x = X$.
و $\sin x = \frac{AM}{OM}$ أي $\sin x = \frac{Y}{OM}$ ومنه : $\sin x = Y$.
وبالتالي : $M(\cos x; \sin x)$.

2) لتكن M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 النقط المرفقة بالأعداد $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{25\pi}{6}; \frac{-39\pi}{4}$ على الترتيب .

- نعيّن النقط M_1 , M_2 , M_3 على الدائرة المثلثية (C) بإنشاء زوايا أقياسها بالدرجات $30°$, $45°$, $60°$ على الترتيب.
- النقطة M_4 :
$\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi + \pi}{6} = 2(2)\pi + \frac{\pi}{6}$ ، من الشكل $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ إذن النقطة M_4 تنطبق على النقطة M_1 .
- النقطة M_5 :
$\frac{-39\pi}{4} = \frac{-40\pi + \pi}{6} = 2(-5)\pi + \frac{\pi}{4}$ ، من الشكل $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ إذن النقطة M_5 تنطبق على النقطة M_2

• تعيين احداثيات النقط : $M_1\left(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}\right)$ أي $M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

$M_2\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$ أي $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$M_3\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)$ أي $M_3\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$M_5\left(\cos\frac{-39\pi}{4},\sin\frac{-39\pi}{4}\right)$ لها نفس احداثيات النقطة M_2 أي $M_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$M_4\left(\cos\frac{25\pi}{6},\sin\frac{25\pi}{6}\right)$ لها نفس احداثيات النقطة M_1 أي $M_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

1) حساب المثلثات:

1) توجيه المعلم :

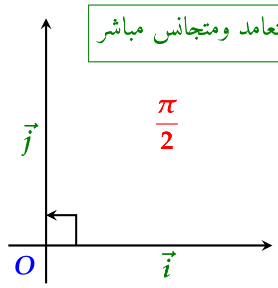
تعريــف

أظف إلى مطويتك

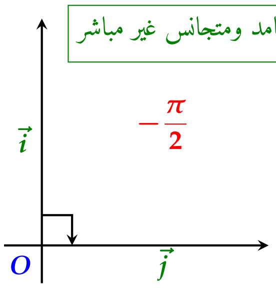
إذا كان $(\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ من المستوى مباشر .

إذا كان $(\vec{i},\vec{j})=-\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ من المستوى غير مباشر .

معلم متعامد ومتجانس مباشر



معلم متعامد ومتجانس غير مباشر



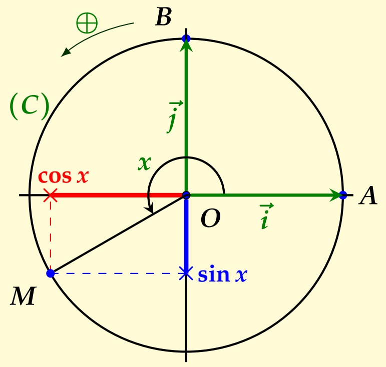
2) جيب تمام و جيب زاوية موجهة لشعاعين:

تذكير وتعريف

(C) دائرة مثلثية مركزها O ، لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) حيث أن $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ معلم متعامد و متجانس مباشر .

نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$ ، لكل عدد حقيقي x صورة M على الدائرة (C) حيث x قيس بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$.

نعلم أن جيب تمام العدد x هو فاصلة النقطة M ونكتب $\cos x$ و أن جيب العدد x هو ترتيب النقطة M ونكتب $\sin x$



. إذا كان x قيسا بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$ فإن كل عدد من الشكل $x+2k\pi$ حيث k عدد صحيح هو كذلك قيس بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$ و منه x و $x+2k\pi$ لهما نفس الصورة M على الدائرة (C) .

وبالتالي : $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ و $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

نقول أن الدالتين دوريتان و 2π دور لهما .

نتائج : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$-1\leq\cos x\leq 1 \quad ، \quad -1\leq\sin x\leq 1 \quad ، \quad \cos^2 x+\sin^2 x=1$$

3) جدول القيم الشهيرة:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

تعريف — أظف إلى مطويتك

جيب تمام زاوية موجهة $(\vec{u}, \vec{v})$ هو جيب تمام أحد أقياسها بالرديان و نرمز له بالرمز $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

جيب زاوية موجهة $(\vec{u}, \vec{v})$ هو جيب أحد أقياسها بالرديان و نرمز له بالرمز $\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

التقويم

مثال تطبيقي: بدون استعمال الآلة الحاسبة :

1) عيّن القيم المضبوطة لكل من: $\sin(-11\pi)$; $\cos\frac{-47\pi}{6}$; $\sin\frac{41\pi}{4}$; $\cos\frac{7\pi}{3}$.

2) عين القيمة المضبوطة لـ $\cos x$ إذا علمت أن $\sin x = \frac{3}{5}$ و $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

حل :

1) ■ $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

■ $\sin\frac{41\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{40\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

■ $\cos\frac{-47\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{48\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 8\pi\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

■ $\sin(-11\pi) = \sin(\pi - 12\pi) = \sin\pi = 0$

2) نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

بما أن $\sin x = \frac{3}{5}$ فإن $\sin^2 x = \frac{9}{25}$ ومنه $\frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$.

وبالتالي : $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25}$ أي $\cos^2 x = \frac{16}{25}$

ومنه $\cos x = \frac{4}{5}$ أو $\cos x = -\frac{4}{5}$.

بما أن $\frac{\pi}{2} < \cos x < \frac{3\pi}{2}$ فإن $\cos x < 0$ إذن $\cos x = -\frac{4}{5}$.

أنجز التمارين: من 32 إلى 35 الصفحة {229}

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 2ع+2تر+2ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة و حساب المثلثات
ميدان التعلم : الهندسة
موضوع الحصة : جيب تام و جيب الزوايا المرفقة

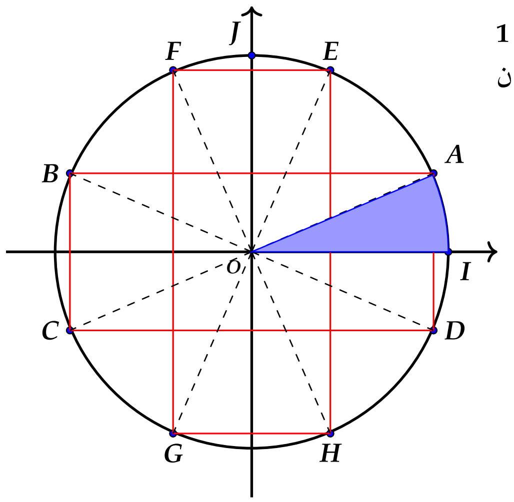
المكتسبات القبلية : جيب تام و جيب بعض الزوايا المشهورة
الكفاءات المستهدفة : توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب التام و الجيب في حل مسائل المثلثية .
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

1 نشاط 02 صفحة 210

في الرسم المقابل (C) الدائرة الموجهة التي مركزها O و نصف قطرها 1 الإتجاه الموجب المعاكس لإتجاه دوران عقارب الساعة. x قيس بالرديان للزاوية $\widehat{IOA}$
بعبارة أخرى A هي صورة x على الدائرة المثلثية .



1) ماذا تمثل النقطة C بالنسبة إلى A؟
2) ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى A؟
3) ماذا تمثل النقطة D بالنسبة إلى A؟
4) ماذا تمثل النقطة E بالنسبة إلى A؟
5) ماذا تمثل النقطة F بالنسبة إلى E؟
6) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة إلى E؟
7) ماذا تمثل النقطة H بالنسبة إلى E؟
8) أنقل و أكمل الجدول الآتي:

قيس الزاوية	$\pi - x$	$\frac{\pi}{2}$	$-x$	$\frac{3\pi}{2} - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$x - \frac{\pi}{2}$
النقطة المرفقة							

9) ضع على الدائرة المثلثية النقطة M صورة $\pi - \frac{5}{2}x$

مرحلة بناء المعارف

مناقشة النشاط

1) C نظيرة A بالنسبة لـ O (2، B نظيرة A بالنسبة لـ (yy') (3، D نظيرة A بالنسبة لـ (xx')
4) E نظيرة A بالنسبة لـ المنصف الأول $y = x$ (5، F نظيرة E بالنسبة لـ (yy') (6، G نظيرة E بالنسبة لـ O
7) ، H نظيرة E بالنسبة لـ (xx')
8)

قيس الزاوية	$\pi - x$	$\frac{\pi}{2}$	$-x$	$\frac{3\pi}{2} - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$x - \frac{\pi}{2}$
النقطة المرفقة	B	F	D	G	C	E	H

9) M منتصف القوس JF

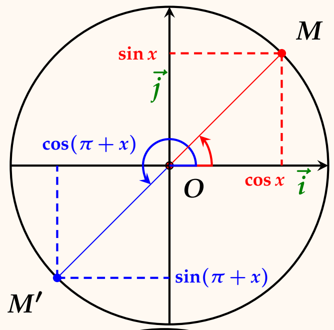
تعريــف — أظف إلى مطويتك

نسمي الزوايا المرفقة بزاوية موجهة حيث x قيس لها، الزوايا الموجهة التي أحد أقياسها: $-x,\ \pi - x,\ \pi + x,\ \frac{\pi}{2} - x,\ \frac{\pi}{2} + x$

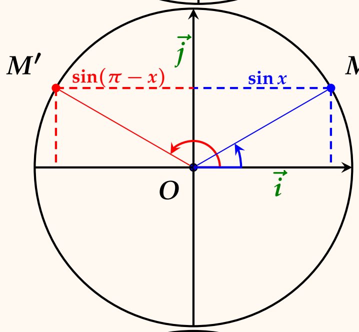
في ما يلي نأخذ عددا حقيقيا و صورته على دائرة مثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

مبرهنة 1 :

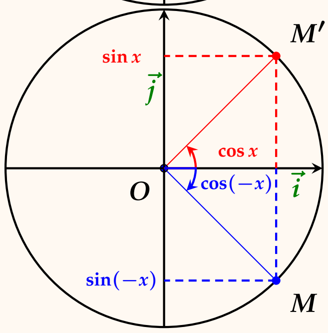
من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :



$$(1)\quad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$



$$(2)\quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$



$$(3)\quad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

ملاحظة:

من الجملة (3) نستنتج أن الدالة cos (جيب تمام) دالة زوجية و أن الدالة sin (جيب) دالة فردية .

مـــثال

أُحسب : $\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)$ ، $\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right)$ ، $\cos\left(\frac{-27\pi}{6}\right)$ ، $\sin\left(\frac{-27\pi}{6}\right)$

الحل: ★ حساب $\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)$ و $\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right)$:

$$\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{29\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{30\pi - \pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

★ حساب $\cos\left(\frac{-27\pi}{4}\right)$ و $\sin\left(\frac{-27\pi}{4}\right)$:

$$\sin\left(\frac{-27\pi}{4}\right) = \sin\left(-\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{-27\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{-28\pi+\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(-7\pi+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(-\pi+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

تطبيق: بسط العبارة التالية : $A = \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$

حل

$$\begin{aligned}A &= \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)\\ &= \sin x - 2\cos x\end{aligned}$$

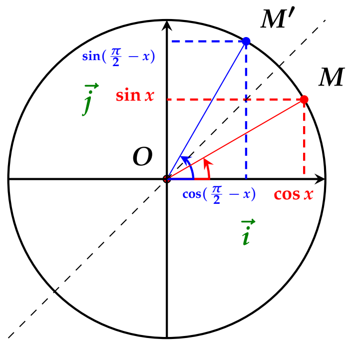
مبرهنة 2 :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x\end{cases}$$

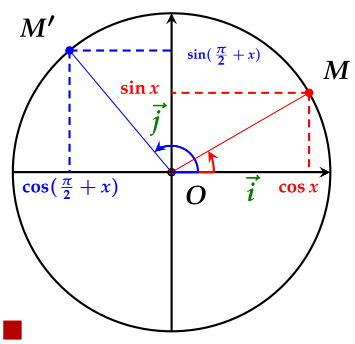
$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x\end{cases}$$

البـرهـان



M و M' نقطتان من الدائرة المثلثية، M و M' متناظرتان بالنسبة إلى المنصف الأول للمعلم. فاصلة M هي ترتيب M' و فاصلة M' هي ترتيب M و $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} - x$

و منه $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$



ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، نضع $y = x - \frac{\pi}{2}$ ومنه $x = y + \frac{\pi}{2}$. لدينا :

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(y+\pi)\\ &= -\cos y = -\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(y+\pi)\\ &= -\sin y = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x\end{aligned}$$

■

التقويم

تطبيق:

علمًا أن : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

• أُحسب $\sin\frac{\pi}{12}$ واستنتج $\cos\frac{7\pi}{12}$ ، $\sin\frac{7\pi}{12}$ ، وكذلك $\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$

الحل:

• حساب $\sin\frac{\pi}{12}$:

$\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ، ومنه : $\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

• الاستنتاج :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\\
&= -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\
\sin\frac{7\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\\
&= \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\
\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\\
&= \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\
\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\\
&= -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\\
&= -\cos\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

تمرين تطبيقي

حل تمرين 47 صفحة 230 .

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 2ع+2تر+2ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة و حساب المثلثات
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : حل المعادلات و المترجحات المثلثية

المكتسبات القبلية : جيب تام و جيب بعض الزوايا المشهورة
الكفاءات المستهدفة : القدرة على حل معادلات و مترجحات المثلثية و تمثيلها على الدائرة المثلثية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التهيئة النفسية

التذكير ب دساتير التحويل و زوايا الشهيرة

1 الأعداد الحقيقية التي لها نفس الجيب والجيب تمام

تعريــف — أظف إلى مطويتك

a و b عددين حقيقين .
✍ $\cos a = \cos b$ معناه $a = b + 2k\pi$ أو $a = -b + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.
✍ $\sin a = \sin b$ معناه $a = b + 2k\pi$ أو $a = \pi - b + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

مرحلة بناء المعارف

مـــثال

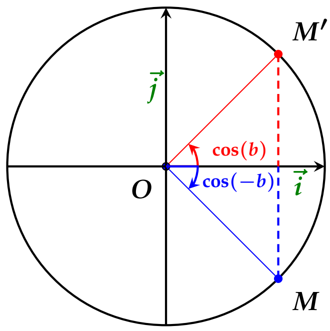
★ $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ معناه $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{K}$
★ $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ معناه $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ أو $x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{K}$

2 المعادلات المثلثية الأساسية

المعادلات من الشكل $cosx = a$

حيث a عدد حقيقي :
نعلم أن : $-1 \leq \cos x \leq 1$
❶ إذا كان : $a \neq [-1;1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$
❷ إذا كان : $a \in [-1;1]$ فإنه يوجد عدد حقيقي b بحيث $\cos b = a$ وحلول المعادلة هي :

الأعداد الحقيقية من الشكل $x = b + 2k\pi$
أو $x = -b + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
❖ إذن مجموعة حلول المعادلة $\cos x = a$ هي :
$S = \{b + 2k\pi; -b + 2k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}\}$
صور حلول هذه المعادلة هما نقطتين متناظرتين بالنسبة لحامل محور الفواصل .



مرحلة بناء المعارف

مــــثال

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

✍ نعلم أن : $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا : $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه : $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{6}$ إذن $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

ومنه : $S = \{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi ; -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\}$

المعادلات من الشكل $\sin x = a$

حيث a عدد حقيقي :

نعلم أن $-1 \leq \sin x \leq 1$

❶ إذا كان : $a \neq [-1;1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$:

❷ إذا كان : $a \in [-1;1]$ فإنه يوجد عدد حقيقي b بحيث $\sin b = a$

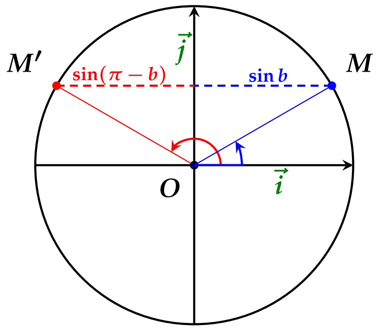
وحلول المعادلة هي : الأعداد الحقيقية من الشكل :

$x = b + 2k\pi$ أو $x = \pi - b + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

❖ إذن مجموعة حلول المعادلة $\sin x = a$ هي :

$S = \{b + 2k\pi ; \pi - b + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\}$

❖ صور حلول هذه المعادلة هما نقطتين متناظرتين بالنسبة لحامل محورالتراتيب .



مــــثال

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

✍ نعلم أن : $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا : $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه : $\sin x = \cos\dfrac{\pi}{3}$ إذن $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه : $S = \{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\}$

التقويم

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية ذات المجهول x

① $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

② $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

③ $\cos x \sin^2 x + \cos x \sin x - 2\cos x = 0$

تـــــمرين منزلي:

① حل في المجال $[0;2\pi[$ المعادلة : $2\cos^2 x = \sin x$ بوضع $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و $\sin x = y$

② حل في المجال $[-\pi;\pi]$ المعادلة : $\cos 2x + 2\sin x \cos x = 0$ بوضع : $\sin 2x = 2\cos x \sin x$

③ حل في المجال $[0;\pi[$ المعادلة : $\cos 7x = \cos^2 x - \sin^2 x$ بوضع : $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 2ع+2تر+2ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة و حساب المثلثات
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : حل المعادلات و المترجحات المثلثية

المكتسبات القبلية : جيب تام و جيب بعض الزوايا المشهورة
الكفاءات المستهدفة : القدرة على حل معادلات و مترجحات المثلثية و تمثيلها على الدائرة المثلثية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

المراحل: مرحلة الإنطلاق

التهيئة النفسية

التذكير ب دساتير التحويل و زوايا الشهيرة

المراحل: مرحلة بناء المعارف

1 حل المتراجحات المثلثية

حل متراجحات من الشكل $\cos x < a$

تمرين

في المجموعة $[0,2\pi[$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $(\cos x \leq a ...(1))$ حيث a عدد حقيقي

① أثبت انه إذا كان $a \leq -1$ المتراجحة (1) لا تقبل حلول في $[0,2\pi[$

② أثبت انه إذا كان $a \geq 1$ فإن $[0,2\pi[$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1).

③ أثبت انه إذا كان $-1 < a < 1$ فإنه يوجد عددين متعاكسان α و β من المجال $[0,2\pi[$ حيث أن $cos\alpha = cos\beta = a$.

④ نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية ونسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية .

- أثبت أن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.
- استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي فواصلها أصغر من a
- استنتج حلول المتراجحة (1) على المجال $[0,2\pi[$

المراحل: التقويم

تطبيق: حل في المجموعة : $[0,2\pi[$ المتراجحات ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على على الدائرة المثلثية :

❶ $2\cos x < 1$ ❷ $\sqrt{2}\cos 3x + 2 \leq 0$

❸ $2\cos 2x + \sqrt{3} \geq 0$ ❹ $\cos 4x - \dfrac{1}{2} > 0$

الحل

① لدينا: $2\cos x < 1$ ومنه : $\cos x < \dfrac{1}{2}$ ومنه : $\cos x < \cos\dfrac{\pi}{3}$

أي : $x \in]-\dfrac{\pi}{3};2\pi - \dfrac{\pi}{3}[$ أي : $x \in]-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}[$ ومنه: $S_1 =]-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}[$

② $\sqrt{2}\cos 3x + 2 \leq 0$ ومنه : $\cos 3x = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -1.41 < -1$ ومنه : $S_2 = \{\}$

③ $2\cos 2x - \sqrt{3} \geq 0$ ومنه : $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أي: $\cos x \geq \cos\dfrac{\pi}{6}$ ومنه : $2x \in [0;\dfrac{\pi}{6}] \cup [2\pi - \dfrac{\pi}{6};2\pi]$

ومنه: $2x \in [0;\dfrac{\pi}{6}] \cup [\dfrac{11\pi}{6};2\pi]$ أي: $x \in [0;\dfrac{\pi}{12}] \cup [\dfrac{11\pi}{12};\pi]$ ومنه: $S_3 = [0;\dfrac{\pi}{12}] \cup [\dfrac{11\pi}{12};\pi]$

④ $\cos 4x - \dfrac{1}{2} > 0$ ومنه : $\cos 4x > \cos\dfrac{\pi}{3}$ أي : $4x \in [0;\dfrac{\pi}{3}[\cup]2\pi - \dfrac{\pi}{3};2\pi]$

ومنه : $4x \in [0;\dfrac{\pi}{3}[\cup]\dfrac{5\pi}{3};2\pi]$ ومنه: $x \in [0;\dfrac{\pi}{12}[\cup]\dfrac{5\pi}{12};\dfrac{\pi}{2}]$ ومنه : $S_4 = [0;\dfrac{\pi}{12}[\cup]\dfrac{5\pi}{12};\dfrac{\pi}{2}]$

مرحلة .... معارف

حل متراجحات من الشكل $\sin x < a$

تمرين

في المجموعة $]-\pi,\pi]$ لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $(cosx < b ...(2))$ حيث a عدد حقيقي

① أثبت انه إذا كان $b < -1$ المتراجحة (b) لا تقبل حلول في $]-\pi,\pi]$

② أثبت انه إذا كان $b > 1$ فإن $]-\pi,\pi]$ هي مجموعة الحلول للمتراجحة (2).

③ أثبت انه إذا كان $-1 < a < 1$ فإنه يوجد عددين متعاكسان α و β من المجال $]-\pi,\pi]$ حيث أن $sin\alpha = sin\beta = b$.

③ نسمي M صورة α على الدائرة المثلثية ونسمي M' صورة β على الدائرة المثلثية .

- أثبت أن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب.
- استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي تراتيبها أصغر من b
- استنتج حلول المتراجحة (2) على المجال $]-\pi,\pi]$

التقويم

تطبيق:

حل في المجموعة $[0,2\pi[$ المتراجحات ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على على الدائرة المثلثية :

❶ $sinx < -\frac{1}{2}$ ❷ $\sqrt{2}sin4x - 1 \leq 0$

❸ $2sin5x + \sqrt{3} \geq 0$ ❹ $2sin4x - \sqrt{2} > 0$

الحل

① $\sin x < -\frac{1}{2}$ ومنه : $\sin x < -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{7\pi}{6}$

أي: $]\frac{7\pi}{6}; 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}[$ ومنه : $x \in]\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}[$: $S_1 =]\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}[$

② $\sqrt{2}\sin 4x - 1 \leq 0$ ومنه : $\sin 4x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$ أي: $4x \in [0;\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4};2\pi]$

ومنه: $x \in [0;\frac{\pi}{16}] \cup [\frac{3\pi}{16};\frac{\pi}{2}]$ ومنه: $S_2 \in [0;\frac{\pi}{16}] \cup [\frac{3\pi}{16};\frac{\pi}{2}]$

③ $2\sin 5x + \sqrt{3} \geq 0$ أي : $sin5x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ أي: $5x \in [0;\frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3};2\pi]$

و منه: $x \in [0;\frac{4\pi}{15}] \cup [\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{5}]$ ومنه: $S_3 = [0;\frac{4\pi}{15}] \cup [\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{5}]$

④ $2\sin 4x - \sqrt{2} > 0$ ومنه : $\sin 4x > \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$ أي : $4x \in]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}[$ ومنه: $x \in]\frac{\pi}{16};\frac{3\pi}{16}[$

ومنه: $S_4 =]\frac{\pi}{16};\frac{3\pi}{16}[$

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 2ع ج+2تر+2ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة و حساب المثلثات
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : حل المعادلات و المترجحات المثلثية

المكتسبات القبليــة : جيب تام و جيب بعض الزوايا المشهورة
الكفاءات المستهدفة : القدرة على حل معادلات و مترجحات المثلثية و تمثيلها على الدائرة المثلثية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية** التذكير ب دساتير التحويل و زوايا الشهيرة	
مرحلة بناء التعلمات	**حل المعادلات من الشكل $\cos u = \sin v$** **إرشادات للحل** لحل معادلة من الشكل $\cos u = \sin v$ يجب تحويل $\sin$ إلى $\cos$ او العكس باستعمال ما يلي : $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x\end{cases}$ لتمثيل الحلول على الدائرة المثلثية نعتمد على أقياس الزوايا الشهيرة . نشير هنا إلى أن القيم التي يأخذها k في العبارة $\frac{2k\pi}{n}$ هي من 0 إلى $n-1$ (k عدد صحيح و n طبيعي غير معدوم.) **تطبيق:** ★ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية ذات المجهول x : $cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ **حــــل** $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-3x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$ ومنه المعادلة (1) تكافئ $\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right) = cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ومنه حلول المعادلة هي : $x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}-3x+2k\pi$ أو $x-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}+3x+2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$ إذ ن $4x = \frac{5\pi}{12}+2k\pi$ أي $x = \frac{5\pi}{48}+\frac{2k\pi}{4}$ أو $-2x = \frac{\pi}{12}+2k\pi$ أي $x = -\frac{\pi}{24}-k\pi$ ومنه $S = \left\{x = \frac{5\pi+24k\pi}{48}, x = \frac{-\pi-24k\pi}{24}\right\}$	
التقويم	**تطبيق:** ★ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية ذات المجهول x : $cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right) = sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ ★ مثل الحلول على الدائرة المثلثية. **ملاحظات حول سير الدرس**	

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : 2تر+2ريا
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: الزوايا الموجهة و حساب المثلثات
- ميدان التعلم: الهندسة
- موضوع الحصة : حل معادلة $a\cos x+b\sin x=c$

- المكتسبات القبلية : حل معادلات من الشكل $\cos x=a$ ، $\sin x=a$ ، دساتير الجمع
- الكفاءات المستهدفة : تمكن من حل معادلات من الشكل $a\cos x+b\sin x=c$
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>مرحلة الإنطلاق

مرحلة بناء المعارف</td><td>

حل معادلات من الشكل $a\cos x+b\sin x=c$

أعمال موجهة صفحة 222:

لتكن في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x .

(1) $a\cos x+b\sin x=c$ حيث b,a و c أعداد حقيقية و $(a;b)\neq(0;0)$

1. أحسب $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$
2. إستنتج أنه توجد زاوية α حيث أن: $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
3. إستنتج أن المعادلة (1) تكتب على الشكل $\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
4. بإستعمال دساتير الجمع إستنتج أن (1) تكتب : $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مناقشة التمرين

1. $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$
2. بما أن $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ فإنه توجد زاوية α تحقق :
$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ و } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
3. مما سبق لدينا : $a=\sqrt{a^2+b^2}\,\cos\alpha$ و $b=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin\alpha$
إذن $a\cos x+b\sin x=c$ تكافئ $\sqrt{a^2+b^2}\,\cos x\cos\,\alpha+\sqrt{a^2+b^2}\,\sin x\,\sin\alpha=c$
تكافئ $\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
4. لدينا : $\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha=\cos(x-\alpha)$ ومنه $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ملاحظة

في السؤال الثالث كان بإمكاننا و ضع $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ، ثم إستعمال دساتير الجمع في سؤال الرابع ، نكتب المعادلة (1) على الشكل $\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

</td><td></td></tr>
</table>

تطبيق

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x في كل حالة من الحالات الأتية :

التقويم

1 $\cos x+\sin x=1$

2 $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$

3 $\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=-1$

4 $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=m$ (ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m)

الحل

1 $\cos x+\sin x=1$ تكافئ $\cos(x-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و بالتالي $\alpha=\frac{\pi}{4}$

إذن $\cos x+\sin x=1$ تكافئ $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$ تكافئ

$\begin{cases} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi & k\in\mathbb{Z}\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi & k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi\end{cases}$

ومنه : $S_1=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;2k\pi\quad /k\in\mathbb{Z}\right\}$

2 $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$ تكافئ $\cos(x-\alpha)=\frac{1}{2}$ حيث $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ و $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\alpha=\frac{\pi}{6}$

إذن $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$ تكافئ $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ تكافئ: $\begin{cases} x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi & k\in\mathbb{Z}\\ x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi & k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$ ومنه : $S_2=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;-\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad /k\in\mathbb{Z}\right\}$

3 $\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=-1$ تكافئ $\cos(2x-\alpha)=-\frac{1}{2}$ حيث $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

إذن $\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=-1$ تكافئ $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}=\frac{4\pi}{3}$

تكافئ: $\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi & k\in\mathbb{Z}\\ 2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{4\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi & k\in\mathbb{Z}\\ 2x=-\frac{19\pi}{12}+2k\pi\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x=\frac{13\pi}{24}+k\pi & k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{19\pi}{24}+k\pi\end{cases}$ ومنه : $S_3=\left\{\frac{13\pi}{24}+k\pi;-\frac{19\pi}{24}+k\pi\quad /k\in\mathbb{Z}\right\}$

4 $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=m$ تكافئ $\cos(3x-\alpha)=\frac{m}{2}$

• $\left|\frac{m}{2}\right|>1$ تكافئ $m\in\,]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ إذن من أجل $m>2$ أو $m<-2$ ، S_4 مجموعة خالية .

• من أجل $-2\leq m\leq 2$ نضع $\cos(3x-\alpha)=\frac{m}{2}$ و $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ ومنه $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

ومنه $\cos(3x+\frac{\pi}{3})=\frac{m}{2}=\cos(\beta)$ حيث $\beta\in[0;\pi[$ ، إذن $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\beta)$

تكافئ $\begin{cases} 3x+\frac{\pi}{3}=\beta+2k\pi & k\in\mathbb{Z}\\ 3x+\frac{\pi}{3}=-\beta+2k\pi\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=\frac{3\beta-\pi+6k\pi}{9} & k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{-3\beta-3\pi+6k\pi}{9}\end{cases}$

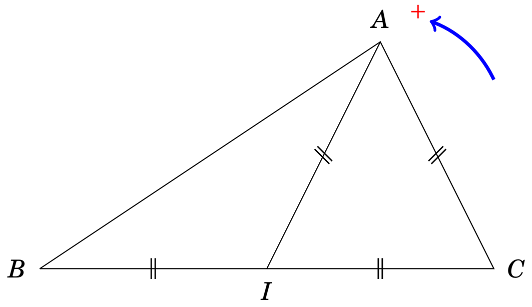
ومنه : $S_3=\left\{\frac{3\beta-\pi+6\pi}{9};\frac{-3\beta-3\pi+6k\pi}{9}\quad /k\in\mathbb{Z}\right\}$

ملاحظات حول سير الدرس ....

تمرين 1

أعطي القيس الرئيسي للزوايا التالية (حسب الشكل) :

$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}\right)$ $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}\right)$ $\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}\right)$ $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$



تمرين 2

بين أن x و y هما قيسين لنفس الزاوية الموجهة :

$x = 123\pi\ ,\ y =\ ;\ x = \frac{115\pi}{2}\ ,\ y = \frac{729\pi}{6}\ ;\ x = \frac{11\pi}{4}\ ,\ y = \frac{-5\pi}{4}$

$x = \frac{-3\pi}{2}\ ,\ y = \frac{\pi}{2}\ ;\ 3\pi$

تمرين 3

عين في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية التي قياسها $\alpha = \frac{14\pi}{3}\ ;\ \alpha = \frac{35\pi}{2}\ ;\ \alpha = \frac{721\pi}{5}\ ;\ \alpha = \frac{2012\pi}{3}$ ،ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية :

تمرين 4

في المستوي الموجه لدينا : $\left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}\right) = \frac{\pi}{3}$

عين قيسا لكل زاوية من الزوايا الموجهة التالية : $\left(\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}\right)$ $\left(3\overrightarrow{V};2\overrightarrow{U}\right)$

$\left(2\overrightarrow{V};-3\overrightarrow{U}\right)$ $\left(-3\overrightarrow{V};7\overrightarrow{U}\right)$ $\left(-\overrightarrow{V};-\overrightarrow{U}\right)$

تمرين 5

لتكن (C) الدائرة المثلثية مرفقة بمعلم متعامد و متجانس $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

لتكن A و B نقطتين من (C) حيث : $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right) = \frac{3\pi}{4}$

عين قيسا للزوايا الموجهة : $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)$ $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right)$ $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right)$

.$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

تمرين 6

DCB مثلث قائم في D و لتكن A نقطة من قطعة المستقيم $[DB]$ ،

حيث : $AC = AB = 2cm$

ولدينا : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ \ k \in \mathbb{Z}$.

1) أنشئ الشكل .

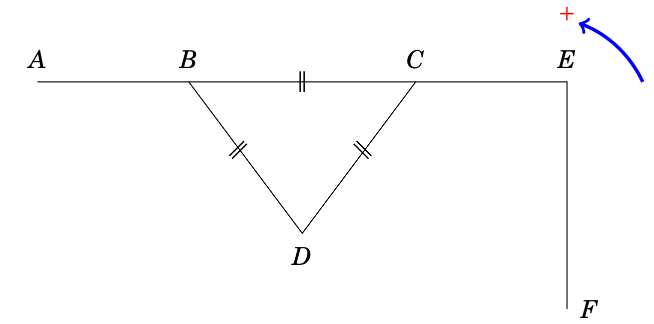
2) أحسب كل من $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

3) أحسب BC ، DB ، DA ، DC ،ثم إستنتج $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$.

تمرين 7

عين قيسا للزوايا الموجهة التالية التالية :

$\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF}\right)$; $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EF}\right)$; $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)$



تمرين 8

لدينا : $\cos x = \frac{1}{2}$

1) أحسب $\sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\sin(\pi - x)$

$\cos(\pi - x)$

2) أحسب $\tan x$; $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\tan(\pi - x)$

تمرين 9

أحسب A ، B و C حيث :

$A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(-x)$

$B = \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin(3\pi - x) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$

$C = \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

تمرين 10

حل في المجال $[0;2\pi]$ المعادلات التالية :

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\cos -2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin -2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ ، $\cos x + sin x = 0$

، $sin^2 x - sin x - 6 = 0$

تمرين 11

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

، $\sin 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ، $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ، $\sin^2 x - \sin x - 6 = 0$ ، $2\cos^2 x -$

$3\cos x - 2 = 0$ ، $4\cos^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$

تمرين 12

حل في المجموعة $[0;2\pi[$ المتراجحات التالية :

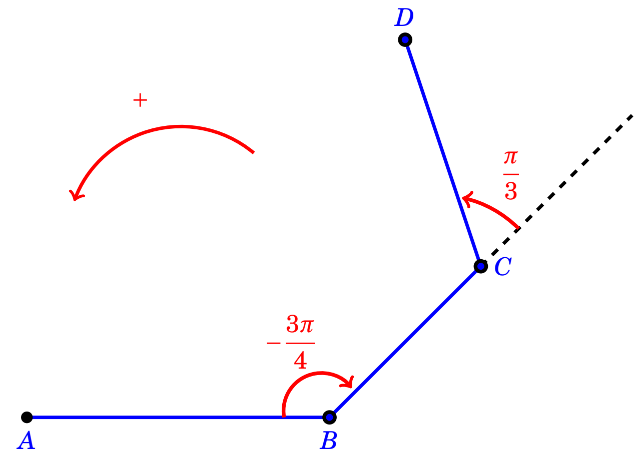
$2\cos x < 1$ ، $\sqrt{2}\cos 3x + 1 \le 0$ ، $2\cos 2x - \sqrt{3} \ge 0$

$\cos 4x - \frac{1}{2} \ge 0$ ، $2 < 1$ ، $\sqrt{2}\sin 4x - 1 \le 0$ ، $2\sin 5x + \sqrt{3} \ge 0$

$2\sin 4x - \sqrt{2} > 0$

تمرين 13

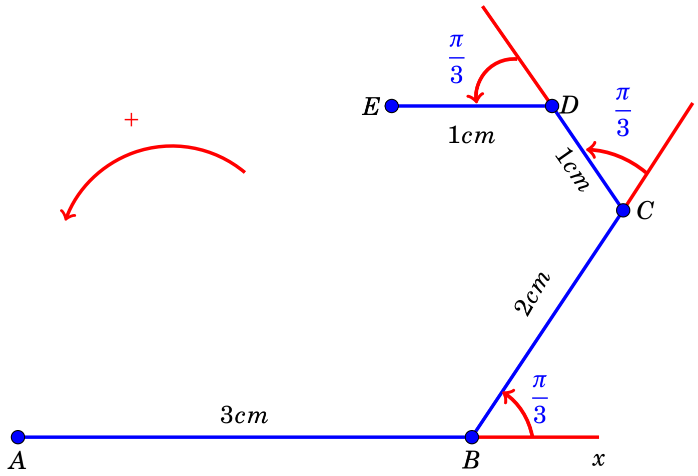
1) أحسب قيس الزاوية الموجهة : $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\right)$



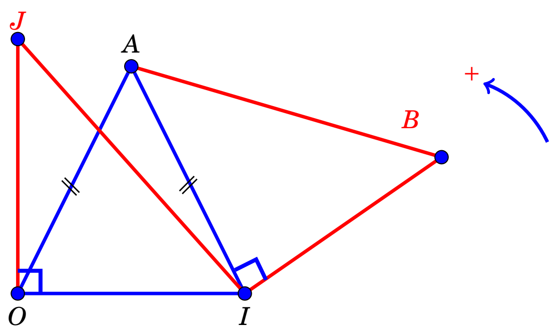
2) ❶ عين قيسا للزوايا الموجهة التالية : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)$ $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD}\right)$ $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DE}\right)$

❷ أحسب قيس الزاوية الموجهة : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}\right)$ و إستنتج أن المستقيمين (AB) و (DE) متوازيين

❸ أثبت أن : $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{DE}$



تمرين 14



AOI مثلث متساوي الأضلاع حيث $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI}\right)=\frac{\pi}{3}$.

OIJ و IBA مثلثين متساويا الساقين و قائمان ، حيث :

$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)=\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}\right)=\frac{\pi}{2}$.

1) أثبت أن:

$$\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{A0}\right)+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI}\right)+\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right)$$

2) أحسب القيس الهندسي لكل من الزوايا: $\widehat{OAI}$ و $\widehat{JAO}$ و $\widehat{IAB}$.

3) إستنتج القيس لكل من الزوايا : $\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{A0}\right)$ و $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI}\right)$ و $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right)$.

4) إستنتج قيس الزاوية : $\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}\right)$، ثم إستنتج أن النقط A ، B و J في إستقامية .

تمرين 15

لتكن العبارة الجبرية A المعرفة بـ: $A(x)=a\cos 3x+b\sin 3x$ حيث a و b عددين حقيقين .

1) عين العددين a و b حيث : $A\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3$ و $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$

2) • نعرف الدالة f بالعبارة : $f(x)=3\sqrt{2}\cos(3x-\theta)$ حيث θ عدد حقيقي يطلب تعينه .

• حل في : $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x)=3$ ، ثم عين الحلول التي تنتمي إلى المجال $[0;2\pi[$

3) • أثبت أن : $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

• إستنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة :

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1=0$$

تمرين 16

علما أن: $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$، أحسب $\cos^2\frac{\pi}{8}$

1) أحسب قيمة المجموع S_1 ، حيث :

$$S_1=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2 3\frac{7\pi}{8}$$

2) أحسب قيمة المجموع S_2 حيث :

$$S_2=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2 3\frac{7\pi}{8}$$

تمرين 17

لتكن الدالة g معرفة بالعبارة التالية : $g(x)=\cos^2 x-\cos^4 x$

1) حلل $g(x)$ إلى جداء .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $g(x)=0$.

3) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}$

• عين مجموعة تعريف الدالة f .

• بسط عبارة $f(x)$.

تمرين 18

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-\pi,,\pi]$ كما يلي : $f(x)=\sin x$

① مثل بيانيا الدالة f

② أرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}$ ، ثم عين فاصلتي A و B نقطتي تقاطع (Δ) و (C_f) منحنى الدالة f

سنة 2ر+2ت+2ع-ثانوية ساجي مختار السمار

③ أرسم المستقيم (Δ') الذي معادلته $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ، ثم عين فاصلتي C و D نقطتي تقاطع (Δ') و (C_f)

④ استنتج في المجال $[-\pi,,\pi]$ حلول المتراجحة $-\dfrac{1}{2}\leq sinx\leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين 19

الجزء الأول :

g الدالة العددية المعرفة كمايلي : $g(x)=\sin x-\cos x$

1) بين أن: $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

2) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$ ثم على $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{\sin 2x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) بين أن العدد 2π دورا للدالة f

3) برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\dfrac{\pi}{4}$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

4) بين أن النقطة $\omega\left(\dfrac{3\pi}{4};0\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

5) تحقق أنه يمكن إقتصار دراسة الدالة f على المجال $I=\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$

6) أحسب مايلي : $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{\pi}{2}}f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}f(x)$ ، ثم أعط تفسيرا هندسيا لذلك

7) • بين أن لكل x من D_f يكون لدينا :

$$f'(x)=\frac{g(x)(1+\sin(x)\cos(x))}{2\sin^2(x)\cos^2(x)}$$

• شكل جدول تغيرات الدالة f على :

$$I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$$

8) • أرسم (C_f) على المجال : $D_f\cap\left[-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]$

• ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $\cos x+\sin x-m\sin 2x=0$

9) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$ كمايلي :

$$h(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin 2x}$$

• أوجد العلاقة بين الدالتين f و h

• أرسم المنحنى (C_h)

تمرين 20

المستوي موجه في الإتجاه المباشر و لتكن (C) دائرة مركزها O و A نقطة منها .

ولتكن B، C، D ثلاثة نقط من (C) بحيث : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ و $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{35\pi}{6}$ و $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)=-\dfrac{5\pi}{6}$

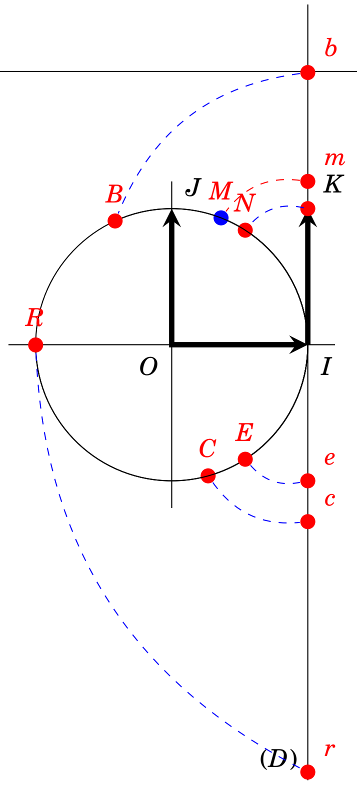
1) عين القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)$

2) حدد النقط B، C و D على الدائرة (C)

3) عين قيس للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD}\right)$، ماذا يمكنك القول عن النقط B، D، O ؟ إستنتج طبيعة المثلث BCD

4) عين القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)$، ثم إستنتج أن: $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

تمرين 21



لتكن الدائرة المثلثية (C) في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

(D) هو المماس للدائرة (C) في I و K هي النقطة من (D) حيث : $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{OJ}$

b ; m ; k ; e ; c و r نقط من المستقيم (D) تحقق : $\overrightarrow{Im}=1.2\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{Ib}=2\overrightarrow{IK}$;

$\overrightarrow{Ie}=-\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{Ir}=-\pi\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{Ic}=-1.3\overrightarrow{IK}$

وبلف المستقيم (D) على الدائرة (C) تنطبق النقط b ; m ; K ; e ; c و r على النقط B ; M ; N ; E ; C و R على الترتيب كما هو موضح في الشكل اعلاه

1) عين قيس الزوايا الموجهة التالية : $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)$

$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OR}\right)$

2) عين قيس الهندسي للزوايا التالية: $\widehat{NOI}$; $\widehat{MOI}$; $\widehat{BOI}$; $\widehat{COI}$; $\widehat{ROI}$; $\widehat{EOI}$

3) z نقطة كيفية من المستقيم (D) و بلف المستقيم (D) على الدائرة (C) تنطبق النقطة z على النقطة Z ، حيث $\overrightarrow{Iz}=\alpha\overrightarrow{IK}$ و α عدد حقيقي .

• هل $\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OZ}\right)=\cos\left(\widehat{ZOI}\right)$ ؟علل.

• هل $\sin\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OZ}\right)=\sin\left(\widehat{ZOI}\right)$ ؟علل.