الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الملخص الشامل في الدوال الأصلية Bac 2023

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

1 الدوال الأصلية

تعريف : f دالة معرفة على مجال I ، نقول أن F دالة أصلية للدالة f إذا وفقط إذا كانت F قابلة للإشتقاق على I ، ومن أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$

مثال :

$F(x) = 3x^2 - 6x + 7$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = 6x - 6$ على $\mathbb{R}$ لأن : $F'(x) = f(x)$

تمرين : نعتبر الدالتين F و f المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}$ ، $F(x) = \frac{x-1}{x+1} - 2x$

بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

طريقة : لإثبات أن F هي دالة أصلية لـ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للإشتقاق على I وأنه من أجل كل x من I فإن $F'(x) = f(x)$

حل التمرين : الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و لدينا :

$$F'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} - 2 = \frac{2}{(x+1)^2} - 2 = \frac{2 - 2(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 4x}{(x+1)^2} = f(x)$$

ومنه الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

خواص :

1. إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I ، فإن f تقبل دوال أصلية على I .
2. إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال المعرفة على I بـ : $x \mapsto F(x) + c$ حيث c عدد حقيقي ثابت .

نتيجة : دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط .

مثال : لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$

كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت .

خاصية : توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$ ، حيث x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي .

مثال :

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = 12x^2 - 2x + 3$

- ❖ عين F الدالة الأصلية للدالة f حيث $F(1) = 7$.
- ❖ لدينا : $F(x) = 4x^3 - x^2 + 3x + c$
- ❖ وبما أن $F(1) = 7$ فإن : $4(1)^3 - (1)^2 + 3(1) + c = 7$ ومنه $c = 1$
- ❖ ومنه $F(x) = 4x^3 - x^2 + 3x + 1$

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدالة f	الدالة الأصلية F	I
$f(x) = a$	$F(x) = ax + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{(n-1)}} + c$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = sin\ (x) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = sin\ (x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0; +\infty[$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

❶ $f(x) = 8x^3 - 4x + 7$ و $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ ، ❷ $g(x) = x^2 + \sin x - \frac{1}{x^2}$ و $\mathrm{I} =]0; +\infty[$

❸ $h(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \cos x$ و $\mathrm{I} =]0; +\infty[$

حل التطبيق :

❶ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ : $F(x) = 8 \times \frac{1}{3+1}x^{3+1} - 4 \times \frac{1}{1+1}x^{1+1} + 7x + c$

ومنه : $F(x) = 2x^4 - 2x^2 + 7x + c$ ، حيث c ثابت حقيقي .

❷ G دالة أصلية للدالة g على $]0; +\infty[$ معرفة بـ :

$$G(x)=\frac{x^{2+1}}{2+1}+(-\cos x)-\left(-\frac{1}{(2-1)x^{(2-1)}}\right)+c=\frac{1}{3}x^3-\cos x+\frac{1}{x}+c$$

❸ H دالة أصلية للدالة h على $]0;+\infty[$ معرفة بـ :

$$H(x)=3\left(\frac{-1}{(4-1)x^{(4-1)}}\right)+2\sqrt{x}-(\sin x)+c=-\frac{1}{x^3}+2\sqrt{x}-\sin x+c$$

العمليات على الدوال الأصلية

الدالة f	الدوال الأصلية	I
$u+v$	$U+V$	I
λu	λU	I
$u'u^n$	$F(x)=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	I
$u'e^u$	e^u	I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u+c$	$x\in I\,,u(x)>0$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{(n-1)}}+c$	$x\in I\,,u(x)\neq 0$ $n\geq 2$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	$x\in I\,;u(x)>0$

تطبيق 01 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

❶ $f(x)=(3x^2+2x)(x^3+x^2+7)^2$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ، ❷ $g(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

❸ $h(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+11)^3}$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

حل التطبيق :

❶ $f(x)=(3x^2+2x)(x^3+x^2+7)^2$ ، الدالة f من الشكل $u'u^n$ حيث :

$u'(x)=3x^2+2x$ و $u(x)=x^3+x^2+7$ و $n=2$

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ ومنه : $F(x)=\frac{1}{2+1}(x^3+x^2+7)^{2+1}+c=\frac{1}{3}(x^3+x^2+7)^3+c$

❷ $g(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ الدالة g من الشكل $\frac{u'}{u^n}$ حيث : $u'(x)=2x$ و $u(x)=x^2+1$ و $n=2$

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{-1}{(n-1)u^{(n-1)}}+c$ ومنه : $G(x)=\frac{-1}{(2-1)(x^2+1)^{(2-1)}}+c=\frac{-1}{x^2+1}+c$

❸ $h(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+11)^3}$ ، الدالة h من الشكل $\frac{u'}{u^n}$ حيث : $u'=2x+1$ و $u=x^2+x+11$ و $n=3$

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{-1}{(n-1)u^{(n-1)}}+c$ ومنه : $H(x)=-\frac{1}{(3-1)(x^2+x+11)^{(3-1)}}+c=-\frac{1}{2(x^2+x+11)^2}+c$

تطبيق 02 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

❶ $f(x)=(x+1)(2x^2+4x+1)^2$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ، ❷ $g(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

❸ $h(x)=\frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3}$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ، ❹ $t(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

حل التطبيق :

❶ $f(x)=(x+1)(2x^2+4x+1)^2$ تكافئ : $f(x)=\frac{1}{4}(4x+4)(2x^2+4x+1)^2$

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ ومنه : $F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}(2x^2+4x+1)^3+c=\frac{1}{12}(2x^2+4x+1)^3+c$

❷ $g(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$ تكافئ : $g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{(n-1)u^{(n-1)}}+c$ ومنه : $G(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2+1}+c=-\frac{1}{2x^2+2}+c$

❸ $h(x)=\frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3}$ تكافئ : $h(x)=\frac{1}{2}\times\frac{6x+2}{(3x^2+2x+7)^3}$

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{-1}{(n-1)u^{(n-1)}}+c$ ومنه : $H(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2(3x^2+2x+7)^2}+c=\frac{-1}{4(3x^2+2x+7)^2}+c$

❹ $t(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$ تكافئ : $t(x)=\frac{5}{2}\times\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

دوالها الأصلية من الشكل : $2\sqrt{u}+c$ ومنه : $T(x)=\frac{5}{2}\times2\sqrt{x^2+1}+c=5\sqrt{x^2+1}+c$

الدوال الأصلية من الشكل : $u'u^n$ هي : $[u'u^n]=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

❶ $f(x)=(x-3)^4$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ، ❷ $f(x)=\frac{(x+5)^3}{6}$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ، ❸ $f(x)=2(3x+4)^5$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

❹ $f(x)=e^x(e^x+4)^3$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ، ❺ $f(x)=x^2(x^3+4)^4$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ،

❻ $f(x)=-20x\left(8-\frac{x^2}{2}\right)^3$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ، ❼ $f(x)=e^{-2x}(e^{-2x}+2)^3$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

حل التطبيق :

❶ $F(x)=\frac{(x-3)^5}{5}+c$

❷ $F(x)=\frac{1}{6}\times\frac{(x+5)^4}{4}+c=\frac{(x+5)^4}{24}+c$

❸ $F(x)=\frac{2}{3}\times\frac{(3x+4)^6}{6}+c=\frac{(3x+4)^6}{9}+c$

❹ $F(x)=\frac{(e^x+4)^4}{4}+c$

❺ $F(x)=\frac{1}{3}\times\frac{(x^3+4)^5}{5}+c=\frac{(x^3+4)^5}{15}+c$

❻ $F(x)=20\times\frac{(8-\frac{x^2}{2})^4}{4}+c=5(8-\frac{x^2}{2})^4+c$

❼ $F(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{(e^{-2x}+2)^4}{4}+c=-\frac{(e^{-2x}+2)^4}{8}+c$

الدوال الأصلية من الشكل : $\frac{u'}{u^n}$ هي : $\left[\frac{u'}{u^n}\right]=-\frac{1}{(n-1)u^{(n-1)}}+c$

من أجل كل x من I : $u(x)\neq0$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

❶ $f(x)=\frac{5}{(x-2)^7}$ و $\mathrm{I}=]2;+\infty[$ ، ❷ $f(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}$ و $\mathrm{I}=]-1;+\infty[$ ،

❸ $f(x)=\frac{2}{(2x-1)^3}$ و $\mathrm{I}=]\frac{1}{2};+\infty[$ ، ❹ $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ و $\mathrm{I}=]0;+\infty[$ ،

❺ $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ، ❻ $f(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x+1)^2}$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}-\{1\}$ ،

❼ $f(x)=\frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}$ و $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

حل التطبيق :

❶ $F(x)=\frac{-5}{6(x-2)^6}+c$

❷ $F(x)=\frac{-(-2)}{2(x+1)^2}+c=\frac{1}{(x+1)^2}+c$

❸ $F(x)=\frac{-1}{2(2x-1)^3}+c$

❹ $F(x)=\frac{-1}{\ln x}+c$

❺ $F(x)=\frac{-1}{e^x+1}+c$

❻ $F(x)=\frac{-1}{2(x^2-2x+1)}+c$

❼ $F(x)=\frac{1}{e^x+2x}+c$

الدوال الأصلية من الشكل : $\frac{u'}{u}$ هي : $\left[\frac{u'}{u}\right]=\ln u+c$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

❶ $f(x)=\frac{1}{x-3}$ و $I=]3;+\infty[$ ،

❷ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ و $I=\mathbb{R}$ ،

❸ $f(x)=\frac{6x+3}{x^2+x+1}$ و $I=\mathbb{R}$ ،

❹ $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ و $I=]0;\pi[$ ،

❺ $f(x)=\frac{3e^x}{e^x+5}$ و $I=\mathbb{R}$ ،

❻ $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+1}$ و $I=\mathbb{R}-\{1\}$ ،

حل التطبيق :

❶ $F(x)=\ln(x-3)+c$

❷ $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

❸ $F(x)=3\ln(x^2+x+1)+c$

❹ $F(x)=\ln(\sin x)+c$

❺ $F(x)=3\ln(e^x+5)+c$

❻ $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+1)+c$

الدوال الأصلية من الشكل : $u'e^u$ هي : $[u'e^u]=e^u+c$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

❶ $f(x)=e^{4x+1}$ و $I=\mathbb{R}$ ،

❷ $f(x)=xe^{-x^2}$ و $I=\mathbb{R}$ ،

❸ $f(x)=\frac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ و $I=\mathbb{R}^*$ ،

❹ $f(x)=\sin x\, e^{\cos x}$ و $I=\mathbb{R}$ ،

❺ $f(x)=\frac{-1}{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}$ و $I=]-1;+\infty[$ ،

❻ $f(x)=x^2e^{x^3+4}$ و $I=\mathbb{R}$ ،

حل التطبيق :

❶ $F(x)=\frac{1}{4}e^{4x+1}+c$

❷ $F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$

❸ $F(x)=-3e^{\frac{1}{x}}+c$

❹ $F(x)=-e^{\cos x}+c$

❺ $F(x)=-2e^{\sqrt{x+1}}+c$

❻ $F(x)=\frac{1}{3}e^{x^3+4}+c$

الدوال الأصلية من الشكل : $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ هي : $\left[\frac{u'}{\sqrt{u}}\right]=2\sqrt{u}+c$

تطبيق : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية :

❶ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ و $I=]1;+\infty[$ ،

❷ $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ و $I=]0;+\infty[$ ، ❸ $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ و $I=]0;\pi[$ ، ❹ $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ و $I=]0;+\infty[$ ،

❺ $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3x+6}}$ و $I=]-2;+\infty[$ ، ❻ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ و $I=\mathbb{R}$ ،

حل التطبيق :

❶ $F(x)=2\sqrt{x-1}+c$ ❷ $F(x)=4\sqrt{e^x-1}+c$

❸ $F(x)=2\sqrt{\sin x}+c$ ❹ $F(x)=2\sqrt{\ln x}+c$

❺ $F(x)=\frac{4}{3}\sqrt{3x+6}+c$ ❻ $F(x)=\sqrt{x^2+5}+c$

2 المعادلات التفاضلية

تعريف : معادلة تفاضلية هي معادلة :

- ❖ المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز y ، z أو أي حرف آخر .
- ❖ تظهر فيها بعض المشتقات y (المشتقة الأولى y' أو المشتقات من رتب أكبر y'' ....)
- ❖ نسمي حلا لمعادلة تفاضلية (E) في مـجال I كـل دالة φ تحقق (E) في I .

مثال : الدالة $y=2x+3$ هي حل في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=x^2+3x$

الدالة $y=x\ln x-x+c$ هي حل في المـجال $]0;+\infty[$ للمعادلة التفاضلية $y'=\ln x$

المعادلات التفاضلية من الشكل : $y'=f(x)$

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I ، وكانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ هي الدوال y حيث : $y=F(x)+c$ ، مع c عدد حقيقي ثابت

تطبيق : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية الأتية :

❶ $y'=3x^2+x-3$ ❷ $y'=2x+4-\frac{1}{x^2}$

❸ $y'=\frac{x^2+1}{x^2}$ ❹ $y'=2\cos(3x)$

حل التطبيق :

❶ $y=x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+c$ ❷ $y=x^2+4x+\frac{1}{x}+c$ ❸ $y=x-\frac{1}{x}+c$

تذكير $[\cos(ax+b)]=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$

❹ $y=\frac{2}{3}\sin(3x)+c$

المعادلات التفاضلية من الشكل : $y''=f(x)$

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I ، وكانت F دالة أصلية لها على I ، وكانت G دالة أصلية للدالة F فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ هي الدوال y حيث : $y=G(x)+c_1x+c_2$

مع : c_1 وc_2 عددان حقيقيان ثابتان

تطبيق : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية الأتية :

❶ $y'' = 4x^3 - 3x^2 - 3$ ❷ $y'' = \cos(2x+3)$

❸ $y'' = \frac{x^4+x^3+1}{x^2}$ ❹ $y'' = \cos(2x) - 2\sin(x)$

حل التطبيق :

❶ $y'' = 4x^3 - 3x^2 - 3$ ، ومنه : $y' = 4\left(\frac{1}{4}x^4\right) - 3\left(\frac{1}{3}x^3\right) - 3x + c_1$

، $y' = x^4 - x^3 - 3x + c_1$ ومنه : $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + c_1x + c_2$

❷ $y'' = \cos(2x+3)$ ، ومنه : $y = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c_1$

، $y = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+3)\right] + c_1x + c_2$ ومنه $y = -\frac{1}{4}\cos(2x+3) + c_1x + c_2$

❸ $y'' = \frac{x^4+x^3+1}{x^2}$ ، أي : $y'' = x^2 + x + \frac{1}{x^2}$ ، ومنه : $y' = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c_1$

، $y = \frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) - \ln|x| + c_1x + c_2$ ومنه : $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \ln|x| + c_1x + c_2$

❹ $y'' = \cos(2x) - 2\sin(x)$ ، ومنه : $y' = \frac{1}{2}\sin(2x) + 2\cos(x) + c_1$

، $y = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right] + 2\sin(x) + c_1x + c_2$ ومنه $y = -\frac{1}{4}\cos(2x) + 2\sin(x) + c_1x + c_2$

المعادلات التفاضلية من الشكل : $y'' = -w^2y$

مبرهنة : إذا كان w عددا حقيقيا غير معدوم ، فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -w^2y$ هي الدوال y حيث : $y = c_1\cos wx + c_2\sin wx$ ، مع : c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان .

تطبيق : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية الأتية :

❶ $y'' + 4y = 0$ ، ❷ $y'' + 9y = 0$ ، ❸ $4y'' + \pi^2y = 0$

حل التطبيق :

❶ $y'' + 4y = 0$ ، أي أن $y'' = -4y$ ، ومنه $w = 2$ ومنه نستنتج

$y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$

❷ $y'' + 9y = 0$ ، أي أن $y'' = -9y$ ، ومنه $w = 3$ ومنه نستنتج

$y = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)$

❸ $4y'' + \pi^2y = 0$ ، أي أن $4y'' = -\pi^2y$ ، أي أن $y'' = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y$ ، ومنه $w = \frac{\pi}{2}$ ومنه نستنتج

$y = c_1\cos(\frac{\pi}{2}x) + c_2\sin(\frac{\pi}{2}x)$

3 التكامل

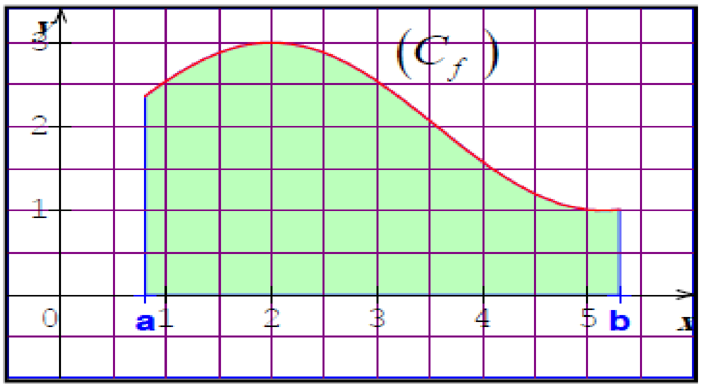
تعريف التكامل : f دالة مستمرة على المجال I ، a و b عددان حقيقيان من I ،
يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على I ، التكامل من a إلى b لـ f
ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ ، و نقرأ التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x

ملاحظة :

➢ عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على I يشمل العددين a و b ثم نكتب

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

➢ يمكن إستبدال المتغير x بأحد الأحرف t ، z ، ... ، فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$



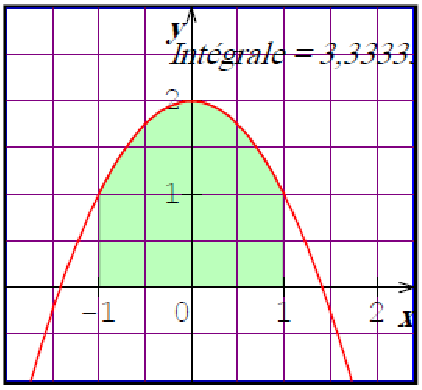
مثال 01 : لنحسب التكاملين التاليين :

$$\int_0^1 e^{2x-1}dx \qquad \int_{-1}^2(-3x^2+1)\,dx$$

$$\int_{-1}^{2}(-3x^2+1)\,dx = [-x^3+x]_{-1}^{2} = (-6)-(0) = -6$$

$$\int_0^1 e^{2x-1}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}[(e)-(e^{-1})] = \frac{e^2-1}{2e}$$

مثال 01 : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x^2+2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد



أ- في حالة المعلم متجانس

مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات $x=-1$ ، $x=1$

و $y=0$ (محور الفواصل)• بوحدة المساحة $(u.a)$ هي :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{-1}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}-2\right) = \frac{10}{3}(u.a)$$

ب- في حالة المعلم غير متجانس

مثلا نأخذ $2cm$ على محور الفواصل و $3cm$ على محور التراتيب

مساحة الحيز بـ cm^2 تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي : المساحة السابقة مضروبة في جداء الوحدتين ومعناه

$$\frac{10}{3}\times 3\times 2 = 20cm^2$$

خواص التكامل

❖ إذا كان $f(x)\geq 0$ على $[a;b]$ ، فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

❖ إذا كان $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

❖ $\int_a^a f(x)dx = 0$

❖ **علاقة شال :** $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

❖ **الخطية :** أ) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

ب) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

❖ **التناظر :** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

تطبيق : أحسب التكامل التالي : $\int_0^2 |x^2-1|dx$

أولا : نكتب $|x^2-1|$ دون رمز القيمة المطلقة

$$|x^2-1| = \begin{cases} -(x^2-1) & ; \quad x\in[0;1] \\ x^2-1 & ; \quad x\in[1;2] \end{cases}$$

$$\int_0^2 |x^2-1|dx = \int_0^1 (-x^2+1)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2 = \frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}-\frac{-2}{3}\right) = 2$$

تطبيق26 ص 186 : أحسب التكاملات التالية في كل حالة مما يأتي بإستعمال خواص التكامل

❶ $I = \int_1^e \ln t\,dt + \int_1^e \left(t+\ln\frac{1}{t}\right)dt$ ، ❷ $j = \int_1^e \ln\left(1+t^2\right)dt + \int_e^1 \ln\left(1+t^2\right)dt$

❸ $h = \int_1^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx - \int_1^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx$

حل التطبيق :

$$I = \int_1^e \ln t\,dt + \int_1^e \left(t+\ln\frac{1}{t}\right)dt = \int_1^e \left(\ln t + t + \ln\frac{1}{t}\right)dt = \int_1^e (\ln t + t - \ln t)dt = \int_1^e (t)dt =$$

$$\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

$$j = \int_1^e \ln(1+t^2)dt + \int_e^1 \ln(1+t^2)dt = \int_1^1 \ln(1+t^2)dt = 0$$

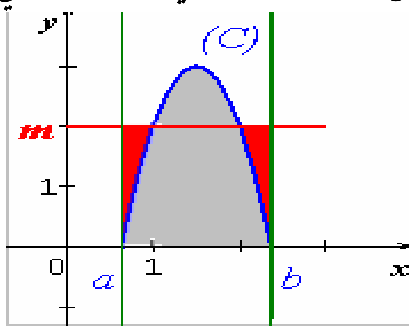
$$h = \int_1^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx - \int_1^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx = h = \int_1^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx - \left(\int_1^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx\right)$$

$$= -\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} = 0$$

القيمة المتوسطة لدالة على مـجال

f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ ، القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي m حيث :

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$



مثال : القيمة المتوسطة للدالة f المعرفة بـ $f(x)=2x+3$ على المجال $[-1;2]$ هي :

$$m=\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(2x+3)dx=\frac{1}{3}[x^2+3x]_{-1}^{2}=4$$

حصر قيمة متوسطة

f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ ، إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$ ، $m\le f(x)\le M$ فإن : $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

تطبيق : نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+\ln(x+1)$

1. أدرس إتجاه تغير الدالة f على $[0;\mathrm{e}-1]$.
2. إستنتج حصرا لـ $f(x)$.
3. إستنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_1^{e-1}f(x)dx$.

حل التطبيق :

1. لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x+1}$ ، إذن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;\mathrm{e}-1]$
2. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;\mathrm{e}-1]$ ، $0\le x\le e-1$ ، أي $f(0)\le f(x)\le f(e-1)$ ومنه $1\le f(x)\le 2$
3. بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\le\int_1^{e-1}f(x)dx\le 2(e-2)$

تطبيق 49 ص 188 : في كل حالة من الحالات التالية m هي القيمة المتوسطة لدالة مستمرة f على مجال I أحسب التكامل المطلوب

1. $m=2$ ، $I=[1;4]$ ، $\int_1^4 f(x)dx$
2. $m=\ln 2$ ، $I=[1;3]$ ، $\int_1^3 f(x)dx$

حل التطبيق :

لدينا $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ومنه $\int_a^b f(x)dx=m(b-a)$

1. بما أن $m=2$ ، $I=[1;4]$ ، فإن $\int_1^4 f(x)dx=2(4-1)=6$
2. بما أن $m=\ln 2$ ، $I=[1;3]$ فإن $\int_1^3 f(x)dx=(3-1)\ln 2=2\ln 2$

تطبيق : أحسب التكاملات الأتية :

1. $\int_1^2\left(2x-1+\frac{1}{x^2}\right)dx$
2. $\int_1^2(x+1)^3dx$
3. $\int_1^4\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$
4. $\int_3^4 x^2(x^3+1)dx$
5. $\int_1^3\left(\frac{7x}{(x^2-4)^3}\right)dx$
6. $\int_1^2\left(\frac{x^3}{x^4+1}\right)dx$
7. $\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)dx$
8. $\int_0^{\ln 2}e^{2x}(e^{2x}+4)\,dx$
9. $\int_0^1\left(\frac{-3x}{x^2+1}\right)dx$
10. $\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right)dx$

حل التطبيق :

$$\int_0^1 (2x-1+\frac{1}{x^2})\,dx=\left[x^2-x-\frac{1}{x}\right]_0^1=\left(2^2-2-\frac{1}{2}\right)-\left(1^2-1-\frac{1}{1}\right)=\frac{5}{2}$$

$$\int_1^2 (x+1)^3dx=\left[\frac{(x+1)^4}{4}\right]_1^2=\left(\frac{(2+1)^4}{4}\right)-\left(\frac{(1+1)^4}{4}\right)=\frac{81}{4}-4=16{,}25$$

$$\int_1^4 \left(\frac{3}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\left[3\ln|x|+\sqrt{x}\right]_1^4=\left(3\ln 4+\sqrt{4}\right)-\left(3\ln 1+\sqrt{1}\right)=1+3\ln 4=5{,}15$$

$$\int_3^4 x^2(x^3+1)dx=\left[\frac{1}{6}(x^3+1)^2\right]_3^4=\left(\frac{1}{6}(4^3+1)^2\right)-\left(\frac{1}{6}(3^3+1)^2\right)=10877{,}5$$

$$\int_1^3 \left(\frac{7x}{(x^2-4)^3}\right)dx=\frac{7}{2}\int_1^3\left(\frac{2x}{(x^2-4)^3}\right)dx=\frac{7}{2}\left[\frac{-1}{2(x^2-4)^2}\right]_1^3=\frac{7}{2}\left[\left(\frac{-1}{2(3^2-4)^2}\right)-\left(\frac{-1}{2(1^2-4)^2}\right)\right]$$

$$=0{,}12$$

$$\int_1^2 \left(\frac{x^3}{x^4+1}\right)dx=\frac{1}{4}\int_1^2\left(\frac{4x^3}{x^4+1}\right)dx=\frac{1}{4}\left[\ln(x^4+1)\right]_1^2=\frac{1}{4}\left[(\ln(2^4+1))-(\ln(1^4+1))\right]=0{,}53$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}}\right)dx=\left[\sqrt{2x+1}\right]_1^2=\left(\sqrt{2(2)+1}\right)-\left(\sqrt{2(1)+1}\right)=0{,}5$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}(e^{2x}+4)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} 2e^{2x}(e^{2x}+4)\,dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x}+4\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}\left[(e^{2\ln 2}+4)-(e^{2(0)}+4)\right]$$

$$=\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{-3x}{x^2+1}\right)dx=\frac{-3}{2}\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\frac{-3}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{-3}{2}\left[(\ln(1^2+1))-(\ln(0^2+1))\right]$$

$$=\frac{-3}{2}\ln 2$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}}\right)dx=\frac{2}{3}\left[\sqrt{3x+1}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{3(1)+1}\right)-\left(\sqrt{3(0)+1}\right)\right]=\frac{2}{3}$$

4 حساب المساحات

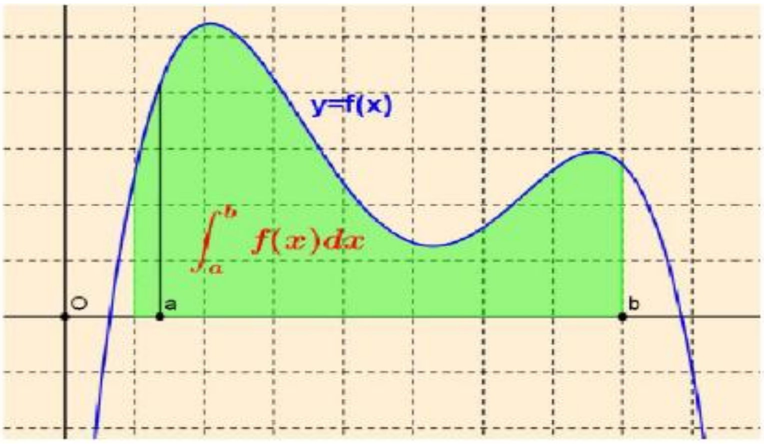
المستوي منسوب إلى معلم متعامد ، (C_f) و (C_g) المنحنيين الممثلان للدالتين f و g على الترتيب

نرمز بـ A إلى مساحة حيز D من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

لحساب المساحة A نميز ثلاث حالات :

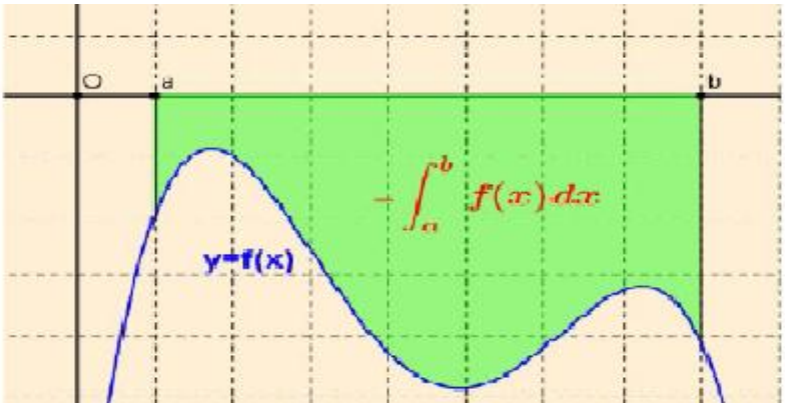
أ- حالة دالة موجبة على مجال $[a;b]$:

إذا كان (C_f) يقع فوق محور الفواصل على المجال $[a;b]$ فإن : $A=\int_a^b f(x)dx$



ب- حالة دالة سالبة على مـجال $[a;b]$:

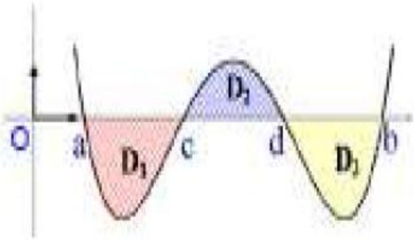
إذا كان (C_f) يقع تحت محور الفواصل على المـجال $[a;b]$ فإن : $A=\int_a^b -f(x)dx$



جـ - حالة دالة تغير إشارتها على مـجال $[a;b]$:

لـحساب المساحة A نقوم بحساب تكامل الدالة f على المجالات التي يكون فيها (C_f) فوق محور الفواصل وبحساب تكامل الدالة $-f$ على المجالات التي يكون فيها (C_f) تحت محور الفواصل ، ثم نقوم بـجمع هذه المساحات فمثلا في الشكل الموالي المساحة A تساوي :

$$\boxed{A=-\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx}$$



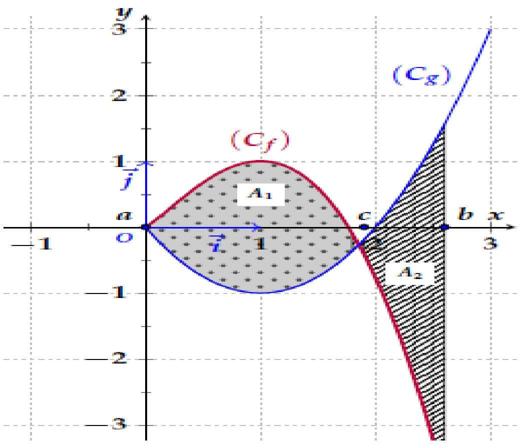
مساحة حيز محدد بمنحنيين :

نرمز بـ A إلى مساحة حيز D من المستوي الـمحدد بالمنحني (C_f) و (C_g) والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

إذا كان (C_f) يقع فوق (C_g) على المـجال $[a;b]$ فإن :

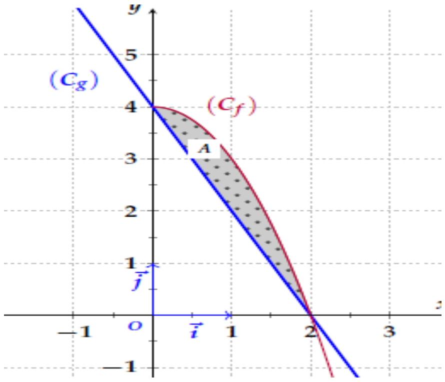
$$A=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

والعكس صحيح



مثال :

f و g دالتين معرفتين على المجال $[0;2]$ بـ : $f(x) = -x^2 + 4$ ، $g(x) = -2x + 4$ ، (C_f) و (C_g)
تمثيلهما البيانيين لهما على الترتيب



❖ لنحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g)
والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 2$
لدينا من أجل كل x من $[0;2]$: $f(x) \geq g(x)$ ومنه

$$A = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx$$

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}(u.a)$$

مبرهنة : لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق على I ، بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I من أجل كل عددين حقيقين a و b من I لدينا : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

ملاحظات :

- ✓ يمكننا التكامل بالتجزئة من إيجاد التكامل في بعض الحالات التي لا يمكن إيجاد التكامل عن طريق القواعد .
- ✓ تذكر دائما أن التكامل بالتجزئة لا يصلح في كل الحالات .
- ✓ في بعض الحالات لا يكفي تطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة مرة واحدة .

مثال : لنحسب التكامل : $\int_0^1 (x+2)e^x dx$

لحساب التكامل يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x) = x + 2$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$$\int_0^1 (x+2)e^x dx = [(x+2)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [(x+2)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 =$$

$$\left((1+2)e^1\right) - \left((0+2)e^0\right) - [(e^1) - (e^0)] = 2e - 1$$

تطبيق : بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات الأتية :

❶ $\int_1^e x\ln x \, dx$ ❸ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

❷ $\int_2^3 \ln(x-1) \, dx$ ❹ $\int_0^\pi (x\cos x)dx$

حل التطبيق :

❶ لحساب $\int_1^e x\ln x \, dx$ ، يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = \frac{1}{2}x^2$	$v'(x) = x$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e =$$

$$\left(\frac{1}{2}e^2\ln e\right) - \left(\frac{1}{2}1^2\ln 1\right) - \frac{1}{4}[(e^2)-(1^2)] = \frac{e^2+1}{4}$$

❷ لحساب $\int_2^3 \ln(x-1)\,dx$ ، يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x)=\ln(x-1)$	$u'(x)=\frac{1}{x-1}$
$v(x)=x-1$	$v'(x)=1$

$$\int_2^3 \ln(x-1)\,dx = [(x-1)\ln(x-1)]_2^3 - \int_2^3 1dx = [(x-1)\ln(x-1)]_2^3 - [x]_2^3 =$$

$$((3-1)\ln(3-1)) - \big((2-1)\ln(2-1)\big) - [(3)-(2)] = -1+2\ln 2$$

❸ لحساب $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ ، يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x)=\ln x$	$u'(x)=\frac{1}{x}$
$v(x)=-\frac{1}{x}$	$v'(x)=\frac{1}{x^2}$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e =$$

$$\left(-\frac{1}{e}\ln e\right) - \left(-\frac{1}{1}\ln 1\right) - \left[\left(\frac{1}{e}\right)-\left(\frac{1}{1}\right)\right] = 1-2e^{-1}$$

❹ لحساب $\int_0^\pi (x\cos x)dx$ ، يمكننا أن نستعين بالجدول التالي

$u(x)=x$	$u'(x)=1$
$v(x)=\sin x$	$v'(x)=\cos x$

$$\int_0^\pi (x\cos x)dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = [x\sin x]_0^\pi - [-\cos x]_0^\pi =$$

$$(\pi\sin\pi) - (0\sin 0) + [(\cos\pi) - (\cos 0)] = -2$$

ملاحظة : الدوال الأصلية للدالة $\ln(x+a)$ هي : $(x+a)\ln(x+a) - x + c$

تصلي وتصوم وتقرأ القرآن وتتعب في العمل ويأتي
من يأخذ حسناتك مرتاحا ، فقط لأنك أغتبته .
حذاري من فاكهة المجالس