الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الحل المفصل لسلسلة المتتاليات

التمرين 01

a، b، c ثلاث أعداد متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a+b+c=9$

❶ أ/ أحسب b ثم أكتب a و c بدلالة r

ب/ علما أن $a\times c=-16$ ، عين الأساس r ثم a و c

❷ (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها 5

أ/ عبر عن الحد العام u_n بدلالة n

ب/ أحسب u_{15} ثم استنتج المجموع: $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{15}$

❸ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على N بالعلاقة: $v_n-8u_n=0$

أحسب المجموع: $S'=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{15}$

حل التمرين 01

❶ أ/ أحسب b لدينا $a+b+c=9\ldots\ldots(1)$

حسب خاصية الوسط الحسابي لدينا $a+c=2b\ldots\ldots(2)$ ومنه بتعويض (2) في (1) نـجد

$2b+b=9$ ، ومنه $3b=9$ ومنه نستنتج أن $b=3$

أكتب a و c بدلالة r

نعلم أن $a+r=b$ ، أي $a=b-r$ وبما أن $b=3$ ، فإن $a=3-r$

نعلم أن $b+r=c$ ، وبما أن $b=3$ ، فإن $3+r=c$

ب/ علما أن $a\times c=-16$، عين الأساس r ثم a و c

$a\times c=-16$ أي، $(3-r)(3+r)=-16$ ، أي $-r^2=-25$ ، أي $r^2=25$ ، أي $\begin{cases} r=5\\ r=-5\end{cases}$

وبما أن المتتالية حسابية متزايدة فإن $r=5$

تعيين a و c

لدينا $\begin{cases} a=3-r\\ c=3+r\end{cases}$ ومنه بالتعويض بقيمة r نجد $\begin{cases} a=3-5\\ c=3+5\end{cases}$ ، ومنه نستنتج أن $\begin{cases} a=-2\\ c=8\end{cases}$

❷ (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها 5

أ/ عبر عن الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا $u_n=u_0+nr$ ومنه $u_n=-2+5n$ ، أي أن $u_n=5n-2$

ب/ أحسب u_{15} ثم استنتج المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$

لدينا $u_{15} = 5(15) - 2$ ، ومنه $u_{15} = 73$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5 وعليه

$$S = \frac{16}{2}(u_0 + u_{15}) = 8(-2 + 73) = 568$$

❸ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على N بالعلاقة: $v_n - 8u_n = 0$

أحسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{15}$

نلاحظ أن S' هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية عددية وعليه لحساب المجموع S' يمكن أن نتبع مايلي

لدينا $v_n - 8u_n = 0$ ، أي أن $v_n = 8u_n$ بالتعويض في S' نـجد

$$S' = 8u_0 + 8u_1 + 8u_2 + \cdots + 8u_{15} = 8(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15})$$

ومنه $S' = 8 \times 568 = 4544$

التمرين 02

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$

❶ أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3

❷ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n < 2$

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم إستنتج أنها متقاربة

❸ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$

أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج/ ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

❹ أحسب المجموع S_n ، حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

ثم استنتج المجموع T_n حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

حل التمرين 02

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$

❶ أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3

- لـحساب u_1 نقوم بـتعويض $n = 0$ فـنجد $u_{0+1} = \frac{3u_0+2}{4}$ ، ومنه $u_1 = \frac{3(1)+2}{4} = \frac{5}{4}$
- لـحساب u_2 نقوم بـتعويض $n = 1$ فـنجد $u_{1+1} = \frac{3u_1+2}{4}$ ، ومنه $u_2 = \frac{3\left(\frac{5}{4}\right)+2}{4} = \frac{23}{16}$
- لـحساب u_3 نقوم بـتعويض $n = 2$ فـنجد $u_{2+1} = \frac{3u_2+2}{4}$ ، ومنه $u_3 = \frac{3\left(\frac{23}{16}\right)+2}{4} = \frac{101}{64}$

❷ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n < 2$

➢ من أجل $n = 0$: لدينا $u_0 = 1 < 2$ ومنه الـخاصية محققة من أجل $n = 0$

➢ نفرض أن الـخاصية محققة من أجل n كيفي ، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي نبرهن أن $u_{n+1} < 2$

لدينا : $u_n < 2$ ، بالضرب في العدد 3 ، نـجد $3u_n < 6$ ، بإضافة العدد 2 نجد $3u_n + 2 < 8$

بالضرب في العدد $\frac{1}{4}$ نـجد $\frac{3u_n+2}{4} < 2$ ، أي $u_{n+1} < 2$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$ ، ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n < 2$

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما : يكفي أن ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - 4u_n}{4} = \frac{-u_n + 2}{4}$$

إشارة الفرق من إشارة $-u_n + 2$

لدينا من السؤال ❷ أ/ أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n < 2$ ومنه $-u_n > -2$ ، أي $-u_n + 2 > 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على N

إستنتاج أنها متقاربة : بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة .

❸ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$

أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $v_{n+1} = v_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$

لدينا $v_n = u_n - 2$ ، أي $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ ، أي $v_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4} - 2$ ، أي $v_{n+1} = \frac{3u_n+2-8}{4}$

ومنه $v_{n+1} = \frac{3u_n-6}{4}$ ، ومنه $v_{n+1} = \frac{3}{4}(u_n - 2)$ ، ومنه $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

ومنه نستنتج أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ ، وحدها الأول $v_0 = -1$ حيث

$$v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$$

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا $v_n = u_n - 2$ ، ومنه $u_n = v_n + 2$

ومنه بتعويض عبارة v_n نـجد $u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$

ج/ ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

بما أن $-1 < \frac{3}{4} < 1$ ، فإن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ ، ومنه $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 = 2$ ، أي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

❹ أحسب المجموع S_n ، حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

نلاحظ أن S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ ، وحدها الأول $v_0 = -1$ ومنه

$$S_n = v_0\left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}\right) = -\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1}\right) = -\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{-1}{4}}\right) = 4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right)$$

ثم استنتج المجموع T_n حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

نلاحظ أن T_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية عددية ، وعليه لحساب T_n يمكن أن نتبع الخطوات التالية

لدينا $v_n = u_n - 2$ ، ومنه $u_n = v_n + 2$ ومنه بالتعويض في T_n نـجد

$$T_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + \cdots + v_n + 2$$
$$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + (2 + 2 + \cdots + 2)$$
$$T_n = S_n + 2(n+1) = 4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right) + 2(n+1)$$

التمرين 03

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدهاالأول $u_0 = 6$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

❶ أ/ أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ماذا تخمن بالنسبة لإتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$

❷ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 3$

ب/ برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة

❸ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي

عين العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

❹ أ/ أكتب v_n بدلالة n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية u_n

ب/ نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ، أحسب S_n بدلالة n

حل التمرين 03

❶ أ/ أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ماذا تخمن بالنسبة لإتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

- لـحساب u_1 نقوم بـتعويض $n = 0$ فنـجد $u_{0+1} = \frac{1}{3}u_0 + 2$ ، ومنه $u_1 = \frac{1}{3} \times 6 + 2 = 4$
- لـحساب u_2 نقوم بـتعويض $n = 1$ فنـجد $u_{1+1} = \frac{1}{3}u_1 + 2$ ، ومنه $u_2 = \frac{1}{3} \times 4 + 2 = \frac{10}{3}$
- لـحساب u_3 نقوم بـتعويض $n = 2$ فنـجد $u_{2+1} = \frac{1}{3}u_2 + 2$ ، ومنه $u_3 = \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} + 2 = \frac{28}{9}$

بما أن $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ، فإن المتتالية (u_n) متناقصة

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$$

و . هـ . م

❷ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 3$

- من أجل $n = 0$: لدينا $u_0 = 6 > 3$ ومنه الـخاصية محققة من أجل $n = 0$
- نفرض أن الـخاصية محققة من أجل n كيفي ، ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$ ، أي نبرهن أن $u_{n+1} > 3$

لدينا : $u_n \geq 3$ ، بالضرب في العدد $\frac{1}{3}$ ، نـجد $\frac{1}{3}u_n \geq 1$ ، بإضافة العدد 2 نجد $\frac{1}{3}u_n + 2 \geq 3$

أي $u_{n+1} > 2$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$ ، ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \geq 3$

ب/ برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة : يكفي أن ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \frac{u_n + 6 - 3u_n}{3} = \frac{-2u_n + 6}{3}$$

إشارة الفرق من إشارة $-2u_n + 6$

لدينا مما سبق أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \geq 3$ ومنه $-2u_n < -6$ ، أي $-2u_n + 6 < 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N

إستنتاج أنها متقاربة : بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 فهي متقاربة

3 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي

عين العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $v_{n+1} = v_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$ ، أي $v_{n+1} = (u_n + \alpha) \times q$

لدينا $v_n = u_n + \alpha$ ، أي $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$ ، أي $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha$

ط 01 :

لدينا $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha$ ، نستخرج $\frac{1}{3}$ كعامل مشترك ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 6 + 3\alpha)$

نعلم أنه لكي تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن تكون $v_{n+1} = (u_n + \alpha) \times q$

ومنه بالمطابقة نـجد $6 + 3\alpha = \alpha$ ، أي $2\alpha = -6$ ، أي $\alpha = -3$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

ط 02 : لدينا $(1) \ldots . v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha$

يمكن كتابة α على الشكل التالي $\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha$ (الهدف هو لكي يسهل علينا إستخراج $\frac{1}{3}$ كعامل مشترك)

ومنه بالتعويض في (1) نـجد $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha$ ، أي $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}\alpha + 2 + \frac{2}{3}\alpha$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + \alpha) + 2 + \frac{2}{3}\alpha$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2 + \frac{2}{3}\alpha$$

ومنه $2 + \frac{2}{3}\alpha = 0$ ، أي $\frac{2}{3}\alpha = -2$ ، ومنه $\alpha = -3$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ حدها الأول $v_0 = u_0 + \alpha$ ، $v_0 = 6 - 3 = 3$

4 أ/ أكتب v_n بدلالة n : لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا $v_n = u_n - 3$ ، ومنه $u_n = v_n + 3$

ومنه بتعويض عبارة v_n نـجد $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$

نهاية المتتالية (u_n) ؟

بما أن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ ، فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ ، ومنه $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3 = 3$ ، أي $\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$

ب/ نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ، أحسب S_n بدلالة n

نلاحظ أن S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية عددية وعليه لحساب S_n يمكن أن نتبع الخطوات التالية

لدينا $v_n = u_n - 3$ ، ومنه $u_n = v_n + 3$ ومنه بالتعويض في S_n نـجد

$$S_n = v_0 + 3 + v_1 + 3 + \cdots + v_n + 3$$
$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + (3 + 3 + \cdots + 3)$$

❖ لدينا $3 + 3 + \cdots + 3 = 3(n+1)$

❖ نعلم أن $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ حدها الأول 3 ومنه

$$S_n = 3\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right) + 3(n+1) = 3\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{-2}{3}}\right) + 3(n+1)$$

$$S_n = \frac{-9}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right) + 3(n+1)$$

التمرين 04

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

❶ أ/ عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 3}$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-1 < u_n < 0$

❷ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم إستنتج أن (u_n) متقاربة

❸ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

أ/ بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول

ب/ أكتب v_n و u_n بدلالة n ، إستنتج ثانية أن (u_n) متقاربة.

❹ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$

$$T_n = e^{\frac{u_0}{u_0+1}} \times e^{\frac{u_1}{u_1+1}} \times \ldots \times e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$$

عين S_n و T_n بدلالة n ، هل المتتالية (T_n) متقاربة ؟ برر إجابتك

حل التمرين 04

❶ أ/ عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 3}$

$$u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 3} = \frac{a u_n + 3a + b}{u_n + 3}$$

بالمطابقة نـجد $\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = -1 \end{cases}$ ، أي $3 \times 1 + b = -1$ ، أي $b = -4$

ومنه يمكن كتابة u_{n+1} على الشكل التالي $u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-1 < u_n < 0$

➢ من أجل $n = 0$: لدينا $-1 < u_0 = 0 \leq 0$ ومنه الـخاصية محققة من أجل $n = 0$

➢ نفرض أن الـخاصية محققة من أجل n كيفي ، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي نبرهن أن $-1 < u_{n+1} < 0$ ؟ ؟

لدينا : $-1 < u_n < 0$ ، بإضافة العدد 3 ، نـجد $2 < u_n + 3 < 3$ ، بأخذ المقلوب نجد

$\frac{1}{3} < \frac{1}{u_n+3} < \frac{1}{2}$ ، بالضرب في العدد -4 نـجد $-2 < \frac{-4}{u_n+3} < \frac{-4}{3}$ ، بإضافة العدد 1 نجد

$$-1 < 1 - \frac{4}{u_n+3} < \frac{-1}{3} < 0$$

ومنه بالتعدي نـجد $-1 < u_{n+1} < 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$ ، ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-1 < u_n < 0$

❷ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم إستنتج أن (u_n) متقاربة: يكفي أن ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{u_n - 1 - u_n{}^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{-u_n{}^2 - 2u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{-(u_n+1)^2}{u_n + 3}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-1 < u_n < 0$ ، أي $2 < u_n + 3 < 3$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-(u_n+1)^2 < 0$ ، ومنه نستنتج أن $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N

إستنتاج أنها متقاربة : بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد -1 فهي متقاربة

❸ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n+1}$

أ/ بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول

لإثبات أن (v_n) متتالية حسابية يجب أن نكتب $v_{n+1} = v_n + r$ حيث $r \in \mathbb{R}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n+3} + 1} = \frac{1}{\frac{u_n - 1 + u_n + 3}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}} = \frac{u_n + 3}{2u_n + 2}$$

ط 01 :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2u_n + 2} = \frac{u_n + 2 + 1}{2u_n + 2} = \frac{u_n + 1}{2(u_n+1)} + \frac{2}{2(u_n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n + 1} = v_n + \frac{1}{2}$$

ط 02 : إذا تعذر علينا كتابة $v_{n+1} = v_n + r$ يمكن أن نحسب الفرق $v_{n+1} - v_n = r$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3}{2u_n + 2} - \frac{1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 3 - 2}{2u_n + 2} = \frac{u_n + 1}{2(u_n+1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ ، وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0+1} = 1$

ب/ أكتب v_n بدلالة n : لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_0 + r$ ومنه $v_n = \frac{1}{2}n + 1$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا $v_n = \frac{1}{u_n+1}$ ، ومنه $u_n + 1 = \frac{1}{v_n}$ ، أي $u_n = \frac{1}{v_n} - 1$

ومنه بتعويض عبارة v_n نـجد $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2}n+1} - 1$

إستنتج ثانية أن (u_n) متقاربة $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}n+1} - 1 = -1$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$

ومنه نستنتج أن (u_n) متقاربة

❹ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$

$$T_n = e^{\frac{u_0}{u_0+1}} \times e^{\frac{u_1}{u_1+1}} \times \ldots \times e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$$

عين S_n و T_n بدلالة n

❖ لحساب S_n يجب أولا أن نجد عبارة u_nv_n

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n+1}$ ، ومنه $v_n(u_n+1) = 1$ ، أي $u_nv_n = 1 - v_n$ ومنه بالتعويض في S_n نجد

$$S_n = 1 - v_0 + 1 - v_1 + \cdots + 1 - v_n = (1 + 1 + \cdots + 1) - (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$

لدينا $(1 + 1 + \cdots + 1) = n + 1$

لدينا $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ ، وحدها الأول $v_0 = 1$ ومنه

$$S_n = (n+1) - \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = (n+1) - \frac{(n+1)}{2}\left(1 + \frac{1}{2}n + 1\right)$$

$$S_n = (n+1) - \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{n+4}{2}\right) = (n+1) - \frac{(n+1)(n+4)}{4} = (n+1)\left[1 - \frac{(n+4)}{4}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{4-n-4}{4}\right] = (n+1)\left(\frac{-n}{4}\right) = \frac{-n^2-n}{4}$$

❖ لحساب T_n يجب أولا أن نجد عبارة $\frac{u_n}{u_n+1}$

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n+1}$ ، بضرب طرفي المعادلة في u_n نجد $u_nv_n = \frac{u_n}{u_n+1}$ ، ومنه بالتعويض في T_n نجد

$$T_n = e^{\frac{u_0}{u_0+1}} \times e^{\frac{u_1}{u_1+1}} \times \ldots \times e^{\frac{u_n}{u_n+1}} = e^{u_0v_0} \times e^{u_1v_1} \times \ldots \times e^{u_nv_n} = e^{u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n}$$

$$T_n = e^{S_n} = e^{\left(\frac{-n^2-n}{4}\right)}$$

هل المتتالية (T_n) متقاربة ؟ برر إجابتك

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n^2-n}{4} = -\infty$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{-n^2-n}{4}\right)} = 0$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$

ومنه المتتالية (T_n) متقاربة

التمرين 05

I- المتتالية (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على N بالعبارة: $\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

❶ عين أساس هذه المتتالية مستنتجا إتجاه تغيرها

❷ أكتب u_n بدلالة n

❸ أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$

II- (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية: $\begin{cases} v_{n+1} = (a^2-3)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ حيث a عدد حقيقي

❶ عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

❷ عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية

حل التمرين 05

I- المتتالية الحسابية المعرفة على N بالعبارة: $\begin{cases} u_2+u_4=4 \\ u_0=-1 \end{cases}$

❶ عين أساس هذه المتتالية مستنتجا إتجاه تغيرها

يجب أن نكتب كلا من u_2 و u_4 بدلالة u_0

نعلم أن $\begin{cases} u_2=u_0+2r \\ u_4=u_0+4r \end{cases}$ ، أي $\begin{cases} u_2=-1+2r \\ u_4=-1+4r \end{cases}$ بالتعويض في المعادلة $u_2+u_4=4$ نـجد

$$-1+2r-1+4r=4$$
$$r=1$$

بما أن $r=1>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على N .

❷ أكتب u_n بدلالة n لدينا $u_n=u_0+nr$ ومنه $u_n=-1+1n$ ، أي أن $u_n=n-1$

❸ أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$

$$S_n=u_1+\frac{1}{2}+u_2+\frac{1}{2}+\cdots+u_n+\frac{1}{2}$$
$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}$$

لدينا $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n)$

نعلم أن $u_1+u_2+\cdots+u_n$ هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r=1$ وحدها الأول $u_0=-1$ ومنه

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=\frac{n}{2}(n-1)$$

ومنه نستنتج أن $S_n=\frac{n}{2}(n-1)+\frac{1}{2}n=\frac{n}{2}[n-1+1]$

$$S_n=\frac{n^2}{2}$$

II- (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية: $\begin{cases} v_{n+1}=(a^2-3)v_n+2a^2-a \\ v_0=\frac{1}{2} \end{cases}$ حيث a عدد حقيقي

❶ عين قيم a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

تكون (v_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كانت $v_{n+1}=v_n+r$ حيث $r\in\mathbb{R}$

لدينا $v_{n+1}=(a^2-3)v_n+2a^2-a$ و ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=2a^2-a$ ومنه

$a^2-3=1$ ، $a^2=4$ ، ومنه $\begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases}$

❷ عين قيم a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كانت $v_{n+1}=v_n\times q$ حيث $q\in\mathbb{R}^*$

لدينا $v_{n+1}=(a^2-3)v_n+2a^2-a$ و ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=a^2-3$ ومنه

$2a^2-a=0$ ، أي $a(2a-1)=0$ ، ومنه $\begin{cases} a=0 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$

التمرين 06

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على N بالعلاقة: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

1. أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)
2. أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \leq n+3$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج/ استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة ؟

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بالعلاقة: $v_n = u_n - n$

أ/ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول

ب/ أكتب v_n بدلالة n . واستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية (u_n) عند $+\infty$

ج/ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

4. لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على N بالعلاقة: $t_n = ln(v_n)$

أ/ برهن أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب/ أحسب بدلالة n المجموع: $A_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$

ج/ استنتج بدلالة n الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

حل التمرين 06

1. أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

- لحساب u_1 نقوم بتعويض $n = 0$ فنجد $u_{0+1} = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1$ ، ومنه $u_1 = \frac{2}{3} \times 2 + 1 = \frac{7}{3}$
- لحساب u_2 نقوم بتعويض $n = 1$ فنجد $u_{1+1} = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1$ ، ومنه $u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{4}{3} = \frac{26}{9}$
- لحساب u_3 نقوم بتعويض $n = 2$ فنجد $u_{2+1} = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1$ ، ومنه $u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{26}{9} + \frac{5}{3} = \frac{97}{27}$

بما أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، فإن المتتالية (u_n) متزايدة

2. أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \leq n+3$

- من أجل $n = 0$: لدينا $u_0 = 2 < 3$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$
- نفرض أن الخاصية محققة من أجل n كيفي ، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي نبرهن أن $u_{n+1} \leq n+4$ ؟ ؟

لدينا : $u_n \leq n+3$ ، بالضرب في $\frac{2}{3}$ ، نجد $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n + 2$ ، بإضافة العدد $\frac{1}{3}n + 1$ نجد

$$\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq n + 3 \leq n + 4$$

ومنه بالتعدي نجد $u_{n+1} \leq n+4$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$ ، ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n+3$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) : يكفي أن ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=\frac{-1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1=\frac{-u_n+n+3}{3}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n+3$ ، بالضرب في -1 ، نـجد $-u_n \geq -n-3$

ومنه $-u_n+n+3 \geq 0$ ، ومنه نستنتج أن $u_{n+1}-u_n \geq 0$ ، ومنه المتتالية (u_n) متزايدة على N

ج/ استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل

بما أن $u_0<u_1<u_2<u_3\dots\dots<u_n$ ، فإن $u_n>u_0$ ، أي أن $u_n>2$

ومنه (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2

هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة ؟ بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأسفل بالعدد 2 فهي متباعدة

3 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بالعلاقة: $v_n=u_n-n$

أ/ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $v_{n+1}=v_n\times q$ حيث $q\in\mathbb{R}^*$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-n-1=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ حدها الأول $v_0=u_0-0$ ، أي $v_0=2$

ب/ أكتب v_n بدلالة n : لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n لدينا $v_n=u_n-n$ ، ومنه $u_n=v_n+n$ ، ومنه $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$

أحسب نهاية (u_n) عند $+\infty$

بما أن $-1<\frac{2}{3}<1$ ، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ ، أي $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n=+\infty$ ، أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

ج/ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

نلاحظ أن S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية عددية وعليه لحساب S_n يمكن أن نتبع الخطوات التالية

لدينا $v_n=u_n-n$ ، ومنه $u_n=v_n+n$ ومنه بالتعويض في S_n نـجد

$$S_n=v_0+0+v_1+1+\cdots+v_n+n$$
$$S_n=(v_0+v_1+\cdots+v_n)+(0+1+\cdots+n)$$

❖ لدينا $0+1+\cdots+n$ ، هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 0 ومنه

$$0+1+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

❖ نعلم أن $v_0+v_1+\cdots+v_n$ هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ حدها الأول 2 ومنه

$$S_n=2\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{3}-1}\right)+\frac{n^2+n}{2}=2\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{-1}{3}}\right)+\frac{n^2+n}{2}=-6\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right]+\frac{n^2+n}{2}$$

4 لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على N بالعلاقة: $t_n=ln(v_n)$

أ/ برهن أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

نعلم أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ ، هذا يعني أن $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$

لإثبات أن (t_n) متتالية حسابية يجب أن نكتب $t_{n+1}=t_n+r$ حيث $r\in\mathbb{R}$

$$t_{n+1}=\ln(v_{n+1})=\ln\left(\frac{2}{3}v_n\right)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)+ln(v_n)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)+t_n$$

ومنه (t_n) متتالية حسابية أساسها $r=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ، حدها الأول $t_0=ln(v_0)=\ln 2$

أكتب t_n بدلالة n لدينا $t_n=u_0+nr$ ومنه $t_n=\ln 2+n\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

ب/ أحسب بدلالة n المجموع: $A_n=t_0+t_1+\cdots+t_n$

$$A_n=\frac{(n+1)}{2}(t_0+t_n)=\frac{(n+1)}{2}\left(\ln 2+\ln 2+n\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{(n+1)}{2}\left(2\ln 2+n\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

ج/ استنتج بدلالة n الجداء: $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$

لدينا $t_n=ln(v_n)$ ، ومنه $v_n=e^{t_n}$ ، ومنه بالتعويض في P_n نجد

$$P_n=e^{t_0}\times e^{t_1}\times\ldots\times e^{t_n}=e^{t_0+t_1+\cdots+t_n}=e^{A_n}=e^{\frac{(n+1)}{2}\left(2\ln 2+n\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)}$$

التمرين 07

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0=\frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$

1. أ/ عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+4}$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2<u_n<1$

2. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم إستنتج أن (u_n) متقاربة

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$

أ/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول

ب/ أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4. أحسب المجموع: $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{5}{v_1}+\frac{5^2}{v_2}+\cdots+\frac{5^n}{v_n}$

حل التمرين 07

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0=\frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$

1. أ/ عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+4}$

$$u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+4}=\frac{au_n+4a+b}{u_n+4}$$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}a=3\\4a+b=2\end{cases}$ ، أي $4\times 3+b=2$ ، أي $b=-10$

ومنه يمكن كتابة u_{n+1} على الشكل التالي $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2<u_n<1$

➢ من أجل $n=0$: لدينا $-2<u_0=\frac{1}{4}<1$ ومنه الـخاصية محققة من أجل $n=0$

➢ نفرض أن الـخاصية محققة من أجل n كيفي ، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي نبرهن أن

$-2 < u_{n+1} < 1$ ؟ ؟

لدينا : $-2 < u_n < 1$ ، بإضافة العدد 4 ، نـجد $2 < u_n + 4 < 5$ ، بأخذ المقلوب نجد

$\frac{1}{5} < \frac{1}{u_n+4} < \frac{1}{2}$ ، بالضرب في العدد -10 نجد $-5 < \frac{-10}{u_n+4} < -2$ ، بإضافة العدد 3 نجد

$$-2 < 3 - \frac{10}{u_n+4} < 1$$

ومنه بالتعدي نـجد $-2 < u_{n+1} < 1$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$ ، ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

❷ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) : يكفي أن ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n{}^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n{}^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$ ، أي $2 < u_n + 4 < 5$ ،

ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط

لدينا $-u_n{}^2 - u_n + 2 = 0$ ، ومنه $\Delta = 9 > 0$ ، ومنه $\begin{cases} u_{n1} = -2 \\ u_{n2} = 1 \end{cases}$

u_n	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن $-2 < u_n < 1$ ، فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على N

إستنتاج أنها متقاربة : بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة

❸ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$

أ/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $v_{n+1} = v_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4} + 2}{1 - \frac{3u_n+2}{u_n+4}} = \frac{\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4}}{\frac{u_n+4-3u_n-2}{u_n+4}} = \frac{5u_n + 10}{2 - 2u_n} = \frac{5}{2}\left(\frac{u_n + 2}{1 - u_n}\right) = \frac{5}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{2}$ ، حدها الأول $v_0 = 3$ لأن

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{4}} = 3$$

ب/ أكتب v_n بدلالة n : لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^n$

أكتب u_n بدلالة n : لدينا $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$ ، ومنه $v_n(1 - u_n) = u_n + 2$

ومنه $v_n - v_n u_n = u_n + 2$ ، أي $v_n u_n + u_n = v_n - 2$ ، أي $u_n(v_n + 1) = v_n - 2$

ومنه $u_n = \frac{v_n-2}{v_n+1}$ ، ومنه نستنتج أن $u_n = \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n + 1}$

أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ لدينا $\lim_{n\to+\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = 1$ ، ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

4 أحسب المجموع: $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \cdots + \frac{5^n}{v_n}$

نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على N بـ $t_n = \frac{5^n}{v_n}$

$$t_n = \frac{5^n}{v_n} = \frac{5^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \frac{5^n}{3\times\frac{5^n}{2^n}} = 5^n \times \frac{2^n}{3\times 5^n} = \frac{1}{3}(2)^n$$

ومنه (t_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ ، وحدها الأول $t_0 = \frac{1}{3}$ ، ومنه بالتعويض في S_n نجد

$$S_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n = \frac{1}{3}\left[\frac{(2)^{n+1}-1}{2-1}\right] = \frac{1}{3}\left[(2)^{n+1}-1\right]$$

التمرين 08

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+2}$

1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \leq u_n < 2$

2 أدرس رتابة المتتالية (u_n). هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

أ/ بين أن (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول ثم عبر عن v_n بدلالة n

ب/ استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

ج/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$ ، احسب S_n بدلالة n

4 أ/ بين أن: $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$ من أجل كل عدد طبيعي n

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

حل التمرين 08

1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \leq u_n < 2$

أولا عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n+4}$

$$u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n+2} = \frac{au_n + 2a + b}{u_n+2}$$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} a = 4 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ ، أي $2\times 4 + b = 0$ ، أي $b = -8$

ومنه يمكن كتابة u_{n+1} على الشكل التالي $u_{n+1} = 4 - \frac{8}{u_n+2}$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \leq u_n < 2$

- من أجل $n = 0$: لدينا $1 \leq u_0 = 1 < 2$ ومنه الـخاصية محققة من أجل $n = 0$
- نفرض أن الـخاصية محققة من أجل n كيفي ، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي نبرهن أن

$1 < u_{n+1} < 2$ ؟ ؟

لدينا : $1 \le u_n < 2$ ، بإضافة العدد 2 ، نـجد $3 \le u_n + 2 < 4$ ، بأخذ المقلوب نـجد

$\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n+2} \le \frac{1}{3}$ ، بالضرب في العدد -8 نجد $-\frac{8}{3} \le \frac{-8}{u_n+2} < -2$ ، بإضافة العدد 4 نجد

$$1 \le \frac{4}{3} \le 4 - \frac{-8}{u_n+2} < 2$$

ومنه بالتعدي نـجد $1 \le u_{n+1} < 2$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$ ، ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \le u_n < 2$

2 أدرس رتابة المتتالية (u_n) : : يكفي أن ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n+2} - u_n = \frac{4u_n - u_n{}^2 - 2u_n}{u_n+2} = \frac{-u_n{}^2 + 2u_n}{u_n+2} = \frac{u_n(-u_n+2)}{u_n+2}$$

لدينا مما سبق : $1 \le u_n < 2$ ، أي $3 \le u_n + 2 < 4$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $-u_n + 2$

لدينا مما سبق : $1 \le u_n < 2$ ، أي $-2 < -u_n \le -1$ ، أي $0 < -u_n + 2 \le 1$

ومنه نستنتج أن $u_{n+1} - u_n > 0$ ، ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على N

هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة

3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

أ/ بين أن (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $v_{n+1} = v_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$

$$v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{4u_n}{u_n+2}} = 1 - \frac{2(u_n+2)}{4u_n} = 1 - \frac{2}{4}\left(\frac{u_n+2}{u_n}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u_n}{u_n} + \frac{2}{u_n}\right)$$

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{u_n}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{u_n}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ ، وحدها الأول $v_0 = -1$ ، لأن $v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = 1 - \frac{2}{1} = -1$

عبر عن v_n بدلالة n لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

أكتب u_n بدلالة n : لدينا $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ ، ومنه $v_n - 1 = -\frac{2}{u_n}$ ، أي $-v_n + 1 = \frac{2}{u_n}$

ومنه $u_n = \frac{2}{-v_n+1}$ ، ومنه بالتعويض نـجد $u_n = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 2$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

ج/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$ ، احسب S_n بدلالة n

لدينا $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ ، ومنه $v_n - 1 = -\frac{2}{u_n}$ ، أي $-v_n + 1 = \frac{2}{u_n}$ ، ومنه $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_n$ ، بالتعويض نجد

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_1 + \cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$

$$\frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{2}\left(-1\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right]\right) = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}(n+1) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)$$

❹ أ/ بين أن: $|u_{n+1}-2| \le \frac{2}{3}|u_n-2|$: لحل هذا السؤال نمر بمرحلتين

المرحلة الأولى :

$$|u_{n+1}-2| = \left|\frac{4u_n}{u_n+2}-2\right| = \left|\frac{4u_n-2u_n-4}{u_n+2}\right| = \left|\frac{2u_n-4}{u_n+2}\right| = \left|\frac{2(u_n-2)}{u_n+2}\right|$$

بما أن $2>0$ ، و $|u_n+2|>0$ فإن $|u_n+2| = u_n+2$ ومنه

$$|u_{n+1}-2| = \frac{2}{u_n+2}|u_n+2| \dots\dots(1)$$

المرحلة الثانية : ننطلق من البرهان بالتراجع

لدينا $1 \le u_n < 2$ ، ومنه $3 \le u_n+2 < 4$ ، ومنه $\frac{1}{4} < \frac{2}{u_n+2} \le \frac{1}{2}$ ، ومنه $\frac{1}{2} < \frac{2}{u_n+2} \le \frac{2}{3}$

ومنه $\frac{1}{2}|u_n+2| < \frac{2}{u_n+2}|u_n+2| \le \frac{2}{3}|u_n+2|$ ، ومنه $\frac{2}{u_n+2}|u_n+2| \le \frac{2}{3}|u_n+2| \dots(2)$

بتعويض (1) في (2) نجد $|u_{n+1}-2| \le \frac{2}{3}|u_n-2|$

و . هـ . م

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $|u_n-2| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا مما سبق $|u_{n+1}-2| \le \frac{2}{3}|u_n-2|$

من أجل $n=0$ لدينا : $|\cancel{u_1-2}| \le \frac{2}{3}|u_0-2|$

من أجل $n=1$ لدينا : $|\cancel{u_2-2}| \le \frac{2}{3}|\cancel{u_1-2}|$

من أجل $n=2$ لدينا : $|\cancel{u_3-2}| \le \frac{2}{3}|\cancel{u_2-2}|$

.

.

. من أجل $n=n-1$ لدينا : $|u_n-2| \le \frac{2}{3}|\cancel{u_{n-1}-2}|$

بما أن أطراف المتراجحات كلها موجبة وبضرب طرفي المتراجحة نجد

$$|u_n-2| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0-2|$$

$$|u_n-2| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n |1-2|$$

$$|u_n-2| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

و . هـ . م

استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$: لدينا مما سبق $|u_n-2| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، ومنه $-\left(\frac{2}{3}\right)^n \le u_n-2 \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ، لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ ، ومنه نستنتج أن $\lim_{n\to+\infty} u_n - 2 = 0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

التمرين 09 تقني رياضي وشعبة رياضيات

لتكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على N^* بـ : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$

1. أحسب u_2 ، u_1 و u_3 ، ثم عين q أساس المتتالية (u_n)
2. عبر عن الحد العام u_n بدلالة n
3. أحسب بدلالة n كلا من المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

والجداء: $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

4. أ/ أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على العدد 5

ب/ بين أن العدد $2016^{2017} + 49^{2n} + 5n - 2017$ يقبل القسمة على 5

ج/ نضع من أجل كل عدد طبيعي nغير معدوم: $S'_n = \frac{1}{ln\,2}[ln\,4 + ln\,4^2 + \cdots + ln\,4^n]$

أحسب S'_n بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S'_n + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$

حل التمرين 09

1. أحسب u_2 لدينا $u_1 \times u_3 = {u_2}^2$ ، لأن u_2 هو الوسط الهندسي للحدين u_1 و u_3

ومنه ${u_2}^2 = 256$ يكافئ $u_2 = 16$ أو $u_2 = -16$

و بما أن حدود (u_n) موجبة فإن $u_2 = 16$

حساب u_1 و u_3 :

لدينا $\begin{cases} u_1 + 2 \times 16 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} u_1 + u_3 = 68 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$

معلومة مهمة : لدينا $ax^2 + bx + c = 0$ ، مع $a \neq 0$ ، إذا كان $\Delta > 0$

فإن للمعادلة حلان متمايزان x_1 و x_2

إذا كان $S = x_1 + x_2$ ، و $P = x_1 \times x_2$ ، فإن $x^2 - Sx + p = 0$

لدينا $\begin{cases} u_1 + u_3 = 68 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$ ومنه u_1 و u_3 هما حلي المعادلة $x^2 - 68x + 256 = 0$

إذن $\Delta = 3600 > 0$ ، ومنه المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1 = 4$ ، أو $x_2 = 64$

وبما أن (u_n) متتالية متزايدة فإن $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_3 = 64 \end{cases}$

تعيين q أساس المتتالية (u_n) : الأساس q هو حاصل قسمة حدين متتابعين

لدينا : $q = \frac{u_2}{u_1}$ ، ومنه $q = \frac{16}{4} = 4$

2. عبر عن الحد العام u_n بدلالة n لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه $v_n = 4(4)^{n-1}$

ومنه $v_n = (4)^n$

3. أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_1\left[\frac{q^n-1}{q-1}\right] = 4\left[\frac{4^n-1}{4-1}\right] = \frac{4}{3}(4^n-1)$$

حساب الجداء: $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

$$P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = 4 \times 4^2 \times \ldots\ldots \times 4^n = 4^{1+2+\cdots+n} = (4)^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

4 أ/ أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على العدد 5

لدينا $7^0 \equiv 1[5]$ ، $7^1 \equiv 2[5]$ ، $7^2 \equiv 4[5]$ ، $7^3 \equiv 3[5]$ ، $7^4 \equiv 1[5]$

ومنه بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على العدد 5 هي 1 ، 2 ، 4 ، 3

ومنه بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على العدد 5 تشكل متتالية دورية دورها $p = 4$ ويمكن تلخيصها في جدول

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$7^n \equiv$	1	2	4	3

ب/ بين أن العدد $2016^{2017} + 49^{2n} + 5n - 2017$ يقبل القسمة على 5

لدينا $2016 \equiv 1[5]$ ، ومنه $2016^{2017} \equiv 1^{2017}[5]$ ، أي $2016^{2017} \equiv 1[5]$

لدينا $49^{2n} \equiv (7^2)^{2n}[5]$ ، ومنه $49^{2n} \equiv 7^{4n}[5]$ ، أي $49^{2n} \equiv 1[5]$

لدينا $5n - 2017 \equiv -2[5]$ ، أي $5n - 2017 \equiv 3[5]$

وبالتالي $2016^{2017} + 49^{2n} + 5n - 2017 \equiv (1+1+3)[5]$

إذن $2016^{2017} + 49^{2n} + 5n - 2017 \equiv 5[5]$ ، أي $2016^{2017} + 49^{2n} + 5n - 2017 \equiv 0[5]$

ومنه العدد $2016^{2017} + 49^{2n} + 5n - 2017$ يقبل القسمة على 5

ج/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S'_n = \frac{1}{ln\,2}[ln\,4 + ln\,4^2 + \cdots + ln\,4^n]$

$$S'_n = \frac{1}{ln\,2}[ln\,4 + ln\,4^2 + \cdots + ln\,4^n] = S'_n = \frac{1}{ln\,2} \times \ln(4 \times 4^2 \times \ldots\ldots \times 4^n) = \frac{1}{ln\,2} \times \ln P_n$$

$$S'_n = \frac{1}{ln\,2} \times \ln(4)^{\frac{n}{2}(n+1)} = \frac{1}{ln\,2} \times \ln(2^2)^{\frac{n}{2}(n+1)} = \frac{1}{ln\,2} \times \ln(2)^{n(n+1)} = \frac{1}{\cancel{ln\,2}} \times (n^2+n)\cancel{\ln 2}$$

$$S'_n = n^2 + n$$

عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S'_n + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$

لدينا $S'_n + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$ ، يعني $n^2 + n + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$

ومنه $5n^2 + n + 1 \equiv 0[5]$ ، أي أن $n \equiv -1[5]$ ، ومنه $n \equiv 4[5]$ ،

وبالتالي $n = 5k + 4$ ، حيث $k \in N$

التمرين 10 بكالوريا فرنسية

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بحدهما الأول $u_0 = 1$ و $v_0 = 6$ من أجل كل عدد طبيعي n

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$$

1 نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة كما يلي: $w_n = u_n - v_n$ من أجل كل n من N

بين أن المتتالية (w_n) هندسية ثم استنتج عبارة w_n بدلالة n

❷ نعرف المتتالية (t_n) من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $t_n = 8v_n + 3u_n$

بين أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم استنتج عبارة الحد العام لها

❸ عبر عن v_n بدلالة w_n و t_n ، ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n و أحسب نهايتها

❹ ما هي نهاية المتتالية (u_n)

حل التمرين 10

❶ نعتبر المتتالية (w_n)المعرفة كما يلي: $w_n = u_n - v_n$ من أجل كل n من N

بين أن المتتالية (w_n) هندسية ثم استنتج عبارة w_n بدلالة n

لإثبات أن (w_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $w_{n+1} = w_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n - \left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}v_n$$
$$= \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{4}u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{3}{4}v_n = \frac{1}{12}u_n - \frac{1}{12}v_n = \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12}w_n$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ ، وحدها الأول $w_0 = -5$ لأن $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 6 = -5$

لدينا عبارة الحد العام هي : $w_n = w_0 \times q^n$ ومنه $w_n = -5\left(\frac{1}{12}\right)^n$

❷ نعرف المتتالية (t_n) من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $t_n = 8v_n + 3u_n$

بين أن المتتالية (t_n) ثابتة

تكون (t_n) إذا وفقط إذا كان $t_{n+1} = t_n = t_0$

$$t_{n+1} = 8v_{n+1} + 3u_{n+1} = 8\left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) + 3\left(\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n\right) = 2u_n + 6v_n + u_n + 2v_n$$
$$8v_n + 3u_n = t_n$$

ومنه المتتالية (t_n) ثابتة

استنتاج عبارة الحد العام لها : بما أن (t_n) ثابتة فإن $t_n = t_0 = 8v_0 + 3u_0 = 51$

❸ عبر عن v_n بدلالة w_n و t_n

لدينا $\begin{cases} w_n = u_n - v_n \\ t_n = 8v_n + 3u_n \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} -3w_n = -3u_n + 3v_n \\ t_n = 8v_n + 3u_n \end{cases}$ ، بالجمع نجد $11v_n = -3w_n + t_n$

ومنه $v_n = \frac{-3}{11}w_n + \frac{1}{11}t_n$

استنتج عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = \frac{-3}{11}w_n + \frac{1}{11}t_n = v_n = \frac{-3}{11}\left(-5\left(\frac{1}{12}\right)^n\right) + \frac{1}{11}(51) = \frac{15}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{51}{11}$$

أحسب نهاية v_n

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{15}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{51}{11} = \frac{51}{11}$$

لأن $-1 < \frac{1}{12} < 1$

❹ ما هي نهاية المتتالية (u_n)

لدينا $w_n = u_n - v_n$ ، هذا يعني أن $u_n = w_n + v_n$ ومنه $u_n = -5\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{15}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{51}{11}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -5\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{15}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{51}{11} = \frac{51}{11}$$

التمرين 11 بكالوريا أجنبية

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$

1. أحسب u_2 ، u_3 و u_4
2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن المتتالية (u_n) موجبة تماما
   ب/ بين أن المتتالية (u_n)متناقصة
   ج/ ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n).
3. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع: $v_n = \frac{u_n}{n}$
   أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_1
   ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن : $u_n = \frac{n}{2^n}$
4. نعتبر الدالة fالمعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln x - x\ln 2$
   أ/ أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$
   ب/ استنتج نهاية المتتالية (u_n)

حل التمرين 11

1. أحسب u_2 ، u_3 و u_4

لحساب u_2 نعوض $n = 1$ ، ومنه $u_{1+1} = \frac{1+1}{2\times1} u_1$ ، أي $u_2 = \frac{1}{2}$

لحساب u_3 نعوض $n = 2$ ، ومنه $u_{2+1} = \frac{2+1}{2\times2} u_2$ ، أي $u_3 = \frac{3}{8}$

لحساب u_4 نعوض $n = 3$ ، ومنه $u_{3+1} = \frac{3+1}{2\times3} u_3$ ، أي $u_4 = \frac{1}{4}$

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن المتتالية (u_n) موجبة تماما أي أن $u_n > 0$

➢ من أجل $n = 1$: لدينا $u_1 = \frac{1}{2} > 0$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 1$.

➢ نفرض أن الخاصية محققة من أجل n كيفي ، ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$ ، أي نبرهن أن

؟ ؟ $u_{n+1} > 0$

لدينا : $u_n > 0$ ، و $\frac{n+1}{2n} > 0$ ومنه $\frac{n+1}{2n} u_n > 0$ ، أي $u_{n+1} > 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n + 1$ ، ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $u_n > 0$

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة : نقارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2n} u_n}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \le 1$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة

ج/ ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n) :

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة .

❸ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع: $v_n = \frac{u_n}{n}$

أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_1

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $v_{n+1} = v_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n \times \frac{1}{n+1} = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ ، وحدها الأول $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$

عبر عن v_n بدلالة n لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه $v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن : $u_n = \frac{n}{2^n}$

لدينا $v_n = \frac{u_n}{n}$ ، أي $u_n = nv_n$ ، وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n = n \times \frac{1}{2^n}$

أي $u_n = \frac{n}{2^n}$

❹ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln x - x\ln 2$

أ/ أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \ln 2\right) = -\infty$$

ب/ استنتج نهاية المتتالية (u_n)

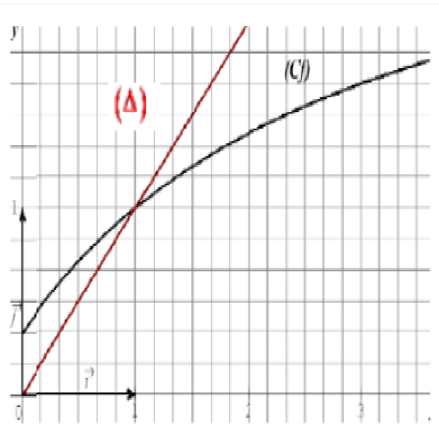
$$u_n = \frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln(n)}}{e^{\ln(2)^n}} = \frac{e^{\ln(n)}}{e^{n\ln(2)}} = e^{\ln(n) - n\ln 2} = e^{f(n)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{f(n)} = 0$$

التمرين 12

نعتبر الدالة f المعرفة والمتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كمايلي: $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$



❶ عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

❷ نضع في كل ما يلي $\alpha = 0$

أ/ أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1، u_2 و u_3. (دون حساب الحدود)

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

❸ أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

4 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ/ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها

ب/ عبر بدلالة n عن v_n و u_n. ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

5 أ/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + \frac{v_{2021}}{v_{2020}} + \cdots + \frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$. ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

ب/ أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n = ln(|v_n|) + ln(|v_{n+1}|) + \cdots + ln(|v_{n+2019}|)$

حل التمرين 12

1 عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

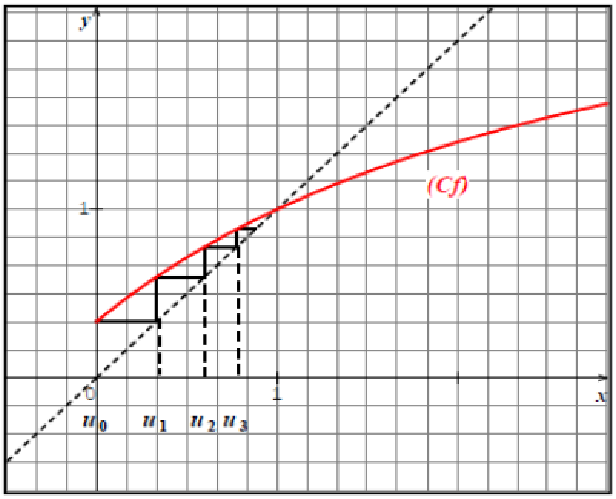
تكون (u_n) متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ ومنه $u_{n+1} = \alpha$ ، أي أن $f(\alpha) = \alpha$

$\frac{3\alpha+1}{\alpha+3} = \alpha$ ، إذن $3\alpha + 1 = \alpha^2 + 3\alpha$ ، ومنه $\alpha^2 = 1$ ، أي أن $\alpha = 1$ ، أو $\alpha = -1$ (مرفوض)

لأن α عدد حقيقي موجب ، ومنه $\alpha = 1$

2 نضع في كل ما يلي $\alpha = 0$

أ/ أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1، u_2 و u_3. (دون حساب الحدود)



ب/ ضع تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

من خلال تمثيل الحدود لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة

3 أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

من أجل $n = 0$ لدينا $0 \le u_0 = 0 < 1$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن الخاصية محققة من أجل n كيفي ، ونبرهن صحتها

من أجل $n+1$ ، أي نبرهن أن $0 < u_{n+1} < 1$ ؟ ؟

لدينا $0 < u_n < 1$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ، فإن $f(0) < f(u_n) < f(1)$

ومنه $0 < \frac{1}{3} < f(u_n) < 1$ ، بالتعدي نـجد $0 < u_{n+1} < 1$ ، ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{3u_n + 1 - {u_n}^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{1 - {u_n}^2}{u_n + 3} = \frac{-(u_n - 1)(u_n + 1)}{u_n + 3}$$

لدينا مما سبق $0 < u_n < 1$ ، ومنه $3 < u_n + 3 < 4$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $-(u_n - 1)$

لدينا $0 < u_n < 1$ ، ومنه $-1 < u_n - 1 < 0$ ، ومنه $0 < -(u_n - 1) < 1$ ، ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على N

برر تقاربها : بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 ، فهي متقاربة

4 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ/ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $v_{n+1} = v_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1} = \frac{\frac{3u_n+1-u_n-3}{u_n+3}}{\frac{3u_n+1+u_n+3}{u_n+3}} = \frac{2u_n-2}{4u_n+4} = \frac{2}{4}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ ، وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = -1$

ب/ عبر بدلالة n عن v_n : لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

التعبير عن u_n بدلالة n :

لدينا $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$ ومنه، $v_n(u_n+1) = u_n - 1$ ، ومنه $v_nu_n + v_n = u_n - 1$

ومنه $v_nu_n - u_n = -v_n - 1$ ، أي أن $u_n(v_n-1) = -v_n - 1$ ، ومنه $u_n = \frac{-v_n-1}{v_n-1}$

ومنه نستنتج أن $u_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ ، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ ، ومنه نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-\left(\frac{1}{2}\right)^n-1} = 1$ ، أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

5 أ/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + \frac{v_{2021}}{v_{2020}} + \cdots + \frac{v_n}{v_{2020}}$.

$$S_n = 1 + \frac{v_{2021}}{v_{2020}} + \cdots + \frac{v_{n+2019}}{v_{2020}} = \frac{v_{2020}}{v_{2020}} + \frac{v_{2021}}{v_{2020}} + \cdots + \frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$$

$$= \frac{1}{v_{2020}}(v_{2020} + v_{2021} + \cdots + v_{n+2019}) = \frac{1}{\cancel{v_{2020}}}\left(\cancel{v_{2020}}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}\right]\right)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1} = -2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]$$

أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} -2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right] = 2$$

ب/ أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n = ln(|v_n|) + ln(|v_{n+1}|) + \cdots + ln(|v_{n+2019}|)$

لدينا $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ومنه $|v_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ومنه $ln(|v_n|) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، أي أن $ln(|v_n|) = n\,ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$ln(|v_n|) = -nln(2)$$

وهو حد عام لمتتالية حسابية أساسها $r = -\ln 2$ ، ومنه

$$T_n = \frac{2020}{2}(ln(|v_n|) + ln(|v_{n+2019}|))$$

$$T_n = 1010[-nln(2) - (n+2019)\ln 2] = 1010(-2n\ln 2 - 2019\ln 2)$$

التمرين 13

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$

والمتتالية (v_n) المعرفة على N بـ: $v_n = (\alpha+3)u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي

1. عين قيمة α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) ثابتة
2. نفرض $\alpha \neq -3$ ، عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
3. نضع $\alpha = -2$

أ/ عين عبارة u_n بدلالة n ، هل (u_n) متقاربة ؟ برر اجابتك

ب/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

بين أن $S_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

حل التمرين 13

1. عين قيمة α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) ثابتة

تكون المتتالية (v_n) ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_{n+1} = v_n = v_1 = v_0$

نحسب أولا كلا من v_1 و v_0

$$v_0 = (\alpha+3)u_0 + \alpha = (\alpha+3)(1) + \alpha = 2\alpha + 3$$

$$v_1 = (\alpha+3)u_1 + \alpha = (\alpha+3)\left(\frac{5}{4}\right) + \alpha = \frac{5}{4}\alpha + \frac{15}{4} + \alpha$$

إذن $v_1 = v_0$ ، يعني $2\alpha + 3 = \frac{5}{4}\alpha + \frac{15}{4} + \alpha$ ، $\alpha = -3$

2. نفرض $\alpha \neq -3$ ، عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $v_{n+1} = v_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$

$$v_{n+1} = (\alpha+3)u_{n+1} + \alpha = (\alpha+3)\left(\frac{3u_n+2}{4}\right) + \alpha = \frac{3(\alpha+3)u_n + 2(\alpha+3) + 4\alpha}{4}$$

$$v_{n+1} = \frac{3(\alpha+3)u_n + 6\alpha + 6}{4} \ldots\ldots(1)$$

لدينا مما سبق $v_n = (\alpha+3)u_n + \alpha$ ، بالضرب في 3 نجد $3v_n = 3(\alpha+3)u_n + 3\alpha$

ومنه $3v_n - 3\alpha = 3(\alpha+3)u_n \ldots\ldots(2)$

بتعويض (2) في (1) نجد

$$v_{n+1} = \frac{3v_n - 3\alpha + 6\alpha + 6}{4} = \frac{3v_n + 3\alpha + 6}{4} = \frac{3}{4}v_n + \frac{3\alpha+6}{4}$$

(v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $\frac{3\alpha+6}{4} = 0$ ، أي أن $3\alpha + 6 = 0$ ، ومنه $\alpha = -2$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ ، وحدها الأول $v_0 = -1$

لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$

3. نضع $\alpha = -2$

أ/ عين عبارة u_n بدلالة n ، هل (u_n) متقاربة ؟ برر اجابتك

لدينا $v_n = (\alpha+3)u_n + \alpha$ ، وبما أن $\alpha = -2$ ، فإن $v_n = u_n - 2$ ، ومنه $u_n = v_n + 2$

$$u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$$

بما أن $-1 < \frac{3}{4} < 1$ ، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ ، ومنه نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

ومنه المتتالية (u_n) متقاربة نحو 2

ب/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

بين أن $S_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$ ،

بما أن $u_n = v_n + 2$ ، فإن بالتعويض نجد $S_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + \cdots + v_n + 2$

$$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (2 + 2 + \cdots + 2)$$

$$S_n = 2(n+1) + v_0\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1}\right] = 2(n+1) - 1\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{-1}{4}}\right]$$

$$S_n = 2(n+1) + 4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] = 2n + 2 + 4\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 = 2n - 2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

و . هـ . م

أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n} + \frac{2n-2}{n} = 2$$

التمرين 14

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بـ : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{7}u_n + \frac{5}{7^{n+1}}$

ولتكن المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n: $\begin{cases} v_n = 7^n u_n \\ w_n = e^{v_n} \end{cases}$

1 أ/ أحسب v_0 ، v_1، v_2

ب/ بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها

جـ/ عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n

د/ أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = 3 + 8 + \cdots + 5n + 3$

2 أ/ أحسب w_0 ، w_1، w_2

ب/ بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ج/ أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S'_n = e^3 + e^8 + \cdots + e^{5n+3}$

3 أ/ عين عبارة u_n بدلالة n

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، حيث $n \geq 2$ فإن $u_n \leq 5n + 3$

ج/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، حيث $n \geq 2$ فإن $0 \leq u_n \leq \left(\frac{5}{7}\right)^n$

د/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

حل التمرين 14

❶ أ/ أحسب v_0 ، v_1، v_2

نحسب أولا u_1 و u_2

لدينا $u_{0+1} = \frac{1}{7}u_0 + \frac{5}{7^{0+1}} = \frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{8}{7}$ ، و لدينا أيضا $u_{1+1} = \frac{1}{7}u_1 + \frac{5}{7^{1+1}} = \frac{1}{7} \times \frac{8}{7} + \frac{5}{49} = \frac{13}{49}$

لدينا $v_0 = 7^0 u_0 = 3$ ، $v_1 = 7^1 u_1 = 7 \times \frac{8}{7} = 8$ ، $v_2 = 7^2 u_2 = 49 \times \frac{13}{49} = 13$

ب/ بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها

لإثبات أن (v_n) متتالية حسابية يجب أن نكتب $v_{n+1} = v_n + r$ حيث $r \in \mathbb{R}$

$$v_{n+1} = 7^{n+1}u_{n+1} = 7^{n+1}\left(\frac{1}{7}u_n + \frac{5}{7^{n+1}}\right) = 7^n u_n + 5 = v_n + 5$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 5$

ج/ عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n : لدينا عبارة الحد العام هي : $v_n = v_0 + r$ ومنه $v_n = 5n + 3$

د/ أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = 3 + 8 + \cdots + 5n + 3$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \frac{(n+1)}{2}(v_0 + v_n) = \frac{(n+1)(5n+6)}{2}$$

❷ أ/ أحسب w_0 ، w_1 ، w_2

$w_0 = e^{v_0} = e^3$ ، ولدينا أيضا $w_1 = e^{v_1} = e^8$ ، ولدينا أيضا $w_2 = e^{v_2} = e^{13}$

ب/ بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

لإثبات أن (w_n) متتالية هندسية يجب أن نكتب $w_{n+1} = w_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$

$$w_{n+1} = e^{v_{n+1}} = e^{v_n+5} = e^5 \times e^{v_n} = e^5 w_n$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^5$

ج/ أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S'_n = e^3 + e^8 + \cdots + e^{5n+3}$

$$S'_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = e^3\left[\frac{(e^5)^{n+1} - 1}{e^5 - 1}\right] = \frac{e^3}{e^5 - 1}(e^{5n+5} - 1)$$

❸ أ/ عين عبارة u_n بدلالة n

لدينا $v_n = 7^n u_n$ ، ومنه $u_n = \frac{v_n}{7^n}$ ، ومنه بالتعويض نـجد $u_n = \frac{5n+3}{7^n}$

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، حيث $n \geq 2$ فإن $u_n \leq 5n + 3$

طريقة 01

لدينا $7^0 < 7^1 < 7^2 < 7^n$ ، ومنه $7^0 < 7^n$ ، أي أن $1 < 7^n$ ، ومنه بأخذ المقلوب نـجد $1 > \frac{1}{7^n}$

بضرب طرفي المتباينة في $5n + 3$ نجد $5n + 3 > \frac{5n+3}{7^n}$ ، ومنه $u_n < 5n + 3$

و . هـ . م

طريقة 02 لإثبات أن $u_n < 5n+3$ يكفي أن نثبت أن $u_n - (5n+3) \leq 0$

$$u_n - (5n+3) = \frac{5n+3}{7^n} - (5n+3) = \frac{5n+3-(5n+3)7^n}{7^n} = \frac{(5n+3)(1-7^n)}{7^n}$$

بما أن $7^n > 0$ ، و $5n+3 > 0$ ، و $1-7^n < 0$ ، فإن $\frac{(5n+3)(1-7^n)}{7^n} < 0$

ومنه نستنتج أن $u_n - (5n+3) < 0$ ، ومنه $u_n < 5n+3$

و . هـ . م

ج/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، حيث $n \geq 2$ فإن $0 \leq u_n \leq \left(\frac{5}{7}\right)^n$

يـجب أن نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، حيث $n \geq 2$ ، فإن $\begin{cases} 0 < u_n \\ u_n \leq \left(\frac{5}{7}\right)^n \end{cases}$

لدينا $u_n = \frac{5n+3}{7^n}$ ، بما أن n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ فإن $u_n \geq 0$

من أجل $n = 2$ ، فإن $u_2 = \frac{13}{49} \leq \left(\frac{5}{7}\right)^2$ ، ومنه الـخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن الـخاصية محققة من أجل n كيفي ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

أي نبرهن أن $u_{n+1} \leq \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$ ؟ ؟ ، أي $u_{n+1} \leq \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}}$ ؟ ؟

لدينا $u_n \leq \frac{5^n}{7^n}$ ، ومنه $\frac{1}{7}u_n \leq \frac{5^n}{7^n} \times \frac{1}{7}$ ، ومنه $\frac{1}{7}u_n \leq \frac{5^n}{7^{n+1}}$ ، ومنه $\frac{1}{7}u_n + \frac{5}{7^{n+1}} \leq \frac{5^n}{7^{n+1}} + \frac{5}{7^{n+1}}$

ومنه $u_{n+1} \leq \frac{5^n+5}{7^{n+1}}$

الآن يـجب أن نثبت أن $\frac{5^n+5}{7^{n+1}} \leq \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}}$ ، أي أن نثبت أن $5^n + 5 \leq 5^{n+1}$ ؟ ؟

من أجل $n = 2$ لدينا $5^2 + 5 \leq 5^{2+1}$ ، ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن الـخاصية محققة من أجل n كيفي ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي نبرهن أن

$5^{n+1} + 5 \leq 5^{n+2}$

لدينا $5^n + 5 \leq 5^{n+1}$ ، بالضرب في 5 نجد $5^{n+1} + 25 \leq 5^{n+2}$

وبما أن $5^{n+1} + 5 \leq 5^{n+1} + 25$ ، ومنه بالتعدي نـجد $5^{n+1} + 5 \leq 5^{n+2}$

وبالتالي نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، حيث $n \geq 2$ فإن $u_n \leq \left(\frac{5}{7}\right)^n$

و . هـ . م

د/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا مما سبق $0 \leq u_n \leq \left(\frac{5}{7}\right)^n$ ، وبما أن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{5}{7} < 1$ فإنه حسب مبرهنة الحصر فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة