سلسلة الأنسب للمراجعة في البكالوريا

من كتابة الأستاذ

NAAM

# الموافقات و القسمة في Z

3

AS

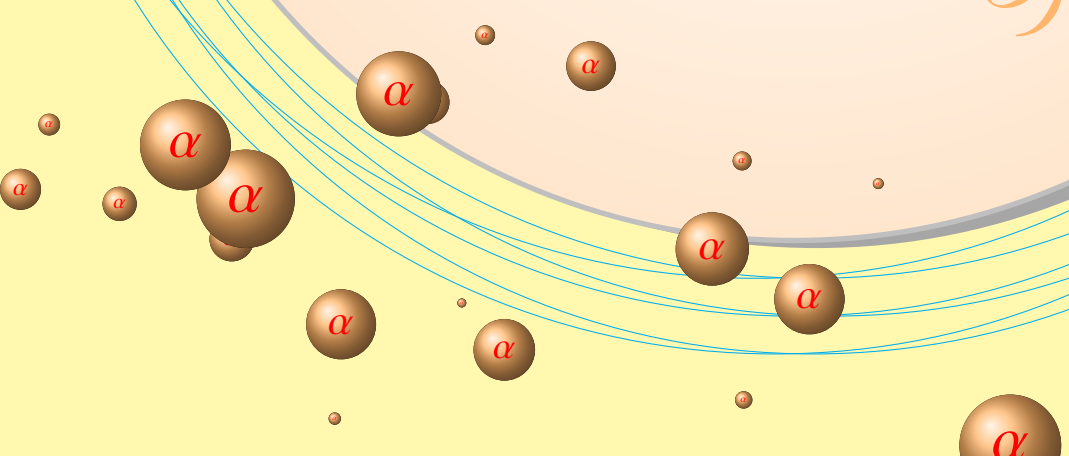
## تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الشعب : رياضيات ، تقني رياضي

$$a \equiv b[n]$$

$$9 \equiv -1[10]$$

$$d = PGCD(a, b)$$



# الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

## تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة



## التمرين 01 تمرين من إختبارات فصلية — الحل من هنا

$a$ ؛ $b$ ؛ $n$ أعداد طبيعيّة غير معدومة حيث : $a = 2n + 3$ و $b = 5n - 2$.

1/ بيّن أنّه إذا كان $a$ و $b$ غير أوّليين فيما بينهما فإنّ : $PGCD(a;b) = 19$.

2/ عيّن قيم $n$ التي من أجلها يكون : $PGCD(a;b) = 19$.

## التمرين 02 بكالوريا تقني رياضي 2008 — الحل من هنا

$n$ عدد طبيعي أكبر من 5 .

1/ $a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث : $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$ .

أ) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$.

ب) بيّن أنّ العددين $a$ و $b$ من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان $n + 5$ مضاعف للعدد 7 .

ج) عيّن قيم $n$ التي يكون من أجلها $PGCD(a;b) = 7$.

2/ نعتبر العددين الطبيعيين $p$ و $q$ حيث : $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$ .

أ) بيّن أنّ العددين $p$ و $q$ يقبلان القسمة على $n - 5$.

ب) عيّن تبعا لقيم $n$ و بدلالة $n$ ؛ $PGCD(p;q)$ .

## التمرين 03 Nouvèlle calédonie 2002 — الحل من هنا

$x$ و $y$ عددان طبيعيان غير معدومين أوّليين فيما بينهما ، نضع : $S = x + y$ و $P = xy$ .

1/ أ) برهن أنّ $x$ و $S$ أوّليان فيما بينهما و كذلك $y$ و $S$ .

ب) استنتج أنّ $S$ و $P$ أوّليان فيما بينهما .

ج) برهن أنّ العددين $S$ و $P$ من شفعيتين مختلفتين (أحدهما فردي و الآخر زوجي.) .

2/ عيّن القواسم الموجبة للعدد 84 .

3/ عيّن الأعداد الأوّليّة فيما بينها $x$ و $y$ حيث : $SP = 84$ .

4/ عيّن عددين طبيعيين $a$ و $b$ يحققان الشرطين التّاليين :

$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases}$ ؛ مع $d = \mathbf{PGCD(a,b)}$ .

## التمرين 04 بكالوريا علوم طبيعة و حياة 2001 — الحل من هنا

$n$ عدد طبيعي .

1/ أ) أدرس تبعا لقيم العدد $n$ بواقي القسمة الإقليديّة للعدد $3^n$ على 10 .

ب) استنتج باقي القسمة الإقليديّة للعدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$ على 10 .

2/ أ) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ يكون :

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}[10]$ .

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ .

## التمرين 05 Métropole juin 2011 — الحل من هنا

### الجزء الأول :

تذكير:

**مبرهنة بيزو :**

$a$ و $b$ عددان صحيحان أوّليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان نسبيان $u$ و $v$ بحيث : $au + bv = 1$ .

**مبرهنة غوص :**

$a, b, c$ ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة ، إذا كان $a$ يقسم $bc$ و $a$ أولي مع $b$ فإنّ $a$ يقسم $c$ .

1/ باستعمال مبرهنة بيزو ، أثبت مبرهنة غوص.

2/ $p$ و $q$ عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

– باستعمال مبرهنة غوص بيّن أنّه إذا كان $a \equiv 0[p]$ و $a \equiv 0[q]$ حيث $a$ عدد صحيح نسبي فإنّ : $a \equiv 0[pq]$ .

### الجزء الثاني :

$S$ مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $n$ التي تحقق الجملة التالية :

$\begin{cases} n \equiv 9[17] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$ .

1/ $(u, v)$ ثنائية من الأعداد الصحيحة النسبية حيث :

# الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

## تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة



$17u + 5v = 1$

أ) برر وجود الثنائية $(u; v)$ .

ب) نضع : $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ .

– أثبت أنّ : $n_0$ عنصر من $S$ .

ج) أعط مثالا عن عدد $n_0$ ينتمي إلى $S$ .

2/ أ) $n$ عدد صحيح نسبي من $S$ .

– بيّن أنّ : $n - n_0 \equiv 0[85]$ .

ب) بيّن أنّ العدد الصحيح $n$ من $S$ إذا و فقط إذا كان $n$ يكتب على الشّكل $n = 43 + 85k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ .

## التمرين 06

Amérique du Sud nov 2010 — الحل من هنا

$n$ عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 ، نضع : $A(n) = n^4 + 1$ .

1/ أدرس شفعية $A(n)$ حسب شفعية $n$ .

2/ أثبت أنّه مهما كان العدد الطبيعي $n$ أكبر أو تساوي 2 فإنّ $A(n)$ غير مضاعف لـ 3 .

3/أثبت أنّه من أجل كلّ قاسم $d$ لـ $A(n)$ فإنّ $d$ أولي مع $n$ و $n^8 \equiv 1[d]$

4/ $d$ قاسم لـ $A(n)$ ، $s$ أصغر الأعداد الطبيعية غير المعدومة $k$ التي تحقق : $n^k \equiv 1[d]$ .

أ) باستخدام القسمة الإقليدية لـ $k$ على $s$ ، بيّن أنّ : $s$ يقسم $k$ .

ب) استنتج أنّ $s$ قاسم لـ 8 .

## التمرين 07

Pondichéry avril 2010 — الحل من هنا

$a$ و $b$ عددان طبيعيان يحققان مايلي : $a^2 = b^3$ ، نضع $d = PGCD(a, b)$ ، $u, v$ عددان صحيحان أوليان فيما بينهما حيث : $a = du$ و $b = dv$

1/ أثبت أنّ: $u^2 = dv^3$ .

2/ استنتج أنّ : $v$ يقسم $u$ ، ثمّ بيّن أنّ : $v = 1$ .

3/ $a$ و $b$ عددان طبيعيان ، أثبت أنّ : $a^2 = b^3$ إذا و فقط إذا كان كلّ من $a$ و $b$ على التّرتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي .

4/ أثبت أنّه إذا كان $n$ مربع عدد طبيعي و مكعب عدد طبيعي فإنّ : $n \equiv 0[7]$ أو $n \equiv 1[7]$ .

## التمرين 08

Métropole sept 2009 — الحل من هنا

1/ أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009 على 11 .

ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^{10}$ على 11 .

ج) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^{2009} + 2009$ على 11 .

2/ $p$ عدد طبيعي و $n$ عدد طبيعي غير معدوم نضع $A_n = 2^n + p$ ، $d_n = PGCD(A_n, A_{n+1})$

أ) بيّن أنّ : $d_n$ يقسم $2^n$ .

ب) أثبت أنّ شفعية $A_n$ من شفعية $p$ .

3/ أ) بيّن أنّ شفعية $d_n$ من شفعية $p$ .

ب) استنتج $PGCD(2^{2009} + 2009, 2^{2010} + 2009)$ .

## التمرين 09

Amérique du Nord juin 2009 — الحل من هنا

1/ لتكن $A$ مجموعة الأعداد الطبيعية التي تنتمي إلى المجال $[1; 46]$ .

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) : \cdots\cdots 23x + 47y = 1$ .

أ) عيّن حلا خاصا $(x_0, y_0)$ لـ $(E)$ .

ب) عين الثنائيات $(x, y)$ حلول المعادلة $(E)$ .

ج) استنتج أنّه يوجد عدد طبيعي وحيد $x$ من $A$ حيث $23x \equiv 1[47]$ .

2/ $a$ و $b$ عددان صحيحان .

أ) أثبت أنّه إذا كان $ab \equiv 0[47]$ فإنّ : $a \equiv 0[47]$ أو $b \equiv 0[47]$ .

ب) استنتج أنّه إذا كان $a^2 \equiv 1[47]$ فإنّ : $a \equiv 1[47]$ أو $a \equiv -1[47]$ .

3/ أ) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $p$ من $A$ يوجد عدد صحيح $q$ بحيث : $p \times q \equiv 1[47]$ .

ب) نقبل أنّه من أجل كلّ $p$ من $A$ يوجد عدد طبيعي وحيد من $A$ نرمز له بالرمز $inv(p)$ بحيث : $p \times inv(p) \equiv 1[47]$ .

مثال : $inv(3) = 16$ لأنّ : $3 \times 16 \equiv 1[47]$

– عيّن الأعداد الطبيعية $p$ من $A$ التي تحقق $p = inv(p)$ .

ج) أثبت أنّ : $46! \equiv -1[47]$

# الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

## تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة



### التمرين 10

تمرين من إمتحانات فصلية — الحل من هنا

$n$ عدد طبيعي .

1/ أدرس تبعا لقيم العدد $n$ بواقي القسمة الإقليديّة للعدد $5^n$ على 7 .

2/ عيّن باقي القسمة الإقليديّة للعدد $6^{2n}$ على 7 .

3/ عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها العدد $5^n + 6^{2n} + 3$ قابلا للقسمة على 7 .

### حل التمرين 1

العودة إلى نص التمرين

1/ $a = 2n+3$ و $b = 5n-2$ ، نضع $d = \mathbf{PGCD(a,b)}$ ، و منه $d/a$ و $d/b$ ، إذن $d/5a$ و $d/2b$ و منه : $d/5a-2b$ أي : $d/19$ و منه $d \in \{1, 19\}$ و بما أن $a$ و $b$ غير أوليين فيما بينهما فإنّ : $\boxed{d = 19}$ .

2/ $d = 19$ ، إذن $19/a$ و $19/b$ و منه $19/2a$ أي $19/4n+6$ و $19/5n-2$ و منه $19/5n-2-4n-6$ أي : $19/n-8$ و منه $n-8 = 19k$ مع $k \in \mathbb{N}$ أي قيم $n$ التي من أجلها $d = 19$ هي $\boxed{n = 19k+8 \quad ,k \in \mathbb{N}}$ .

### حل التمرين 2

العودة إلى نص التمرين

$a = n-2$ و $b = 2n+3$ .

أ) نضع : $d = PGCD(a,b)$ ، لدينا $d/a$ و $d/b$ و منه $d/2a$ أي $d/2n-4$ و منه $d/2n+3-2n+4$ أي $d/7$ و منه قيم $d$ هي $\boxed{1,7}$ .

ب) نفرض أن $a,b$ من مضاعفات 7 و نثبت أنّ $n+5$ مضاعفات 7 .

$a,b$ من مضاعفات 7 إذن يوجد عددان طبيعيان غير معدومين $k,k'$ حيث $a = 7k$ و $b = 7k'$ مع $b > a$ و منه $b-a = 7(k'-k)$ أي $b-a = 7\ell$ و من جهة أخرى $b-a = n+5$ و منه $\boxed{n+5 = 7\ell}$

و منه $n+5$ مضاعف لـ 7

نفرض أن $n+5$ مضاعفات 7 و نثبت أنّ $a,b$ من مضاعفات 7 .

$n+5 = 7k$ و منه $n = 7k-5$ و منه $a = 7k-5-2$ و $b = 14k-7$

و منه $a = 7(k-1)$ و $b = 7(2k-1)$ أي $a$ و $b$ من مضاعفات 7 .

ج) $PGCD(a,b) = 7$ و منه $n+5$ من مضاعفات 7 حسب ب) و منه $n = 7k-5$ أي $n+5 = 7k$ أي $\boxed{n = 7m+2 \quad ,m \in \mathbb{N}}$ .

2/ أ) $p = (n-5)b$ و $q = (n-5)a$ (يمكن التأكد من ذلك باستخدام القسمة الإقليدية) و منه $n-5$ يقسم كلا من $p$ و $q$ .

ب) $PGCD(p,q) = (n-5)PGCD(a,b)$ و منه :

من أجل $n = 7m+2$ فإن $PGCD(p,q) = 7(n-5)$ .

من أجل $n \neq 7m+2$ فإن $PGCD(p,q) = (n-5)$ .

### حل التمرين 3

العودة إلى نص التمرين

1/ أ) $x$ و $y$ أوليان فيما بينهما .

نفرض بالخلف أنّ : $x$ و $S$ غير أوليين فيما بينهما ، إذن فهما يقبلان على الأقل قاسما مشتركا $d$ يختلف عن 1 و منه $d/S-x$ أي $d/y$ و منه $d$ قاسم مشترك لـ $x$ و $y$ يختلف عن 1 و هذا تناقض لأنّ $x$ و $y$ أوليان فيما بينهما و منه $x$ و $S$ أوليان فيما بينهما ، نفس الطريقة تستخدم لإثبات أنّ $y$ و $S$ أوليان فيما بينهما .

ب) $x$ و $S$ أوليان فيما بينهما و منه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان $u$ و $v$ حيث $ux+vS = 1$ و أيضا يوجد عددان صحيحان $u'$ و $v'$ حيث $u'y+v'S = 1$ لأنّ $y$ و $S$ أوليان فيما بينهما .

و منه $(ux+vS)(u'y+v'S) = 1$

و منه $uu'xy+uv'xS+u'vyS+vv'S^2 = 1$

و منه $uu'P+(uv'x+u'vy+vv'S)S = 1$ و منه حسب مبرهنة بيزو فإنّ $P$ و $S$ أوليان فيما بينهما حيث $S = x+y$ و $P = xy$ .

ج) إذا كان كل من $x$ و $y$ زوجي و هذا غير ممكن لأنّ $x$ و $y$ أوليان فيما بينهما .

إذا كان كل من $x$ و $y$ فردي فإنّ $S$ زوجي و $P$ فردي .

إذا كان $x$ و $y$ من شفعيتين مختلفتين فإنّ $S$ فردي و $P$ زوجي .

و منه في كل الحالات $S$ و $P$ من شفعيتين مختلفتين.

2/ $84 = 7 \times 12 = 7 \times 4 \times 3 = 2^2 \times 3 \times 7$ و منه القواسم الموجبة لـ 84 هي : $1,2,3,4,6,7,12,14,21,28,42,84$ .

3/ نفرض أن : $S = 2$ ومنه $P = 42$ غير ممكن (لأنّ $S$ و $P$ من شفعيتين مختلفتين ) ، نفس الشيء بالنسبة $S = 6,14,42$ .

نفرض أن $S = 3$ أي $x = 1, y = 2$ أو العكس فإنّ $P = 2$ و هذا

# الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

## تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة



غير ممكن لأنّ $P = 28$ ، نفس الكلام بالنسبة إلى $S = 4,6$ .
نفرض أن $S = 42$ فإنّ $x = 28, y = 14$ أو العكس و منه $P$ أكبر من 2 و هذا غير ممكن لأنّ $P = 2$ .
نفرض أن $S = 21$ فإنّ $x = 7, y = 14$ أو العكس و منه $P = 98$ غير ممكن.
نفرض أن $S = 7$ فإنّ $x = 3, y = 4$ أو $x = 4, y = 3$ و منه $P = 12$ و منه $Sp = 84$ و منه الأعداد الأولية فيما بيها $x, y$ حيث $SP = 84$ هي $x = 3, y = 4$ أو $x = 4, y = 3$ .

4/ $\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases}$ ؛ مع $d = \mathbf{PGCD(a, b)}$ .

يوجد عددان طبيعيان $x$ و $y$ أوليان فيما بينهما حيث $a = xd$ و $y = yd$ ، بما أن $ab = d^3$ فإنّ $xy = d$ و لدينا $a + b = 84$ و منه $(x + y)(xy) = 84$ ، إعتمادا على نتيجة السؤال السابق نجد $x = 3, y = 4$ أو $x = 4, y = 3$ و منه $d = 12$ ، إذن $a = 36, b = 48$ أو $a = 48, b = 36$ .

## حل التمرين 4

العودة إلى نص التمرين

1/ أ)

| $n =$ | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ | $k \in \mathbb{N}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3^n \equiv$ | 1 | 3 | 9 | 7 | [10] |

ب) $63 \equiv 3[10]$ و $9 \equiv -1[10]$ و منه $63 \times 9^{2001} \equiv -3[10]$ .
$7 \equiv -3[10]$ و منه $7^{1422} = 3^{1422}[10]$ ، حسب الجدول السابق فإنّ : $7^{1422} \equiv 9[10]$ و منه
$63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv -12[10]$ أي $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8[10]$
و منه باقي قسمة العدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$ على 10 هو 8 .

2/ أ) $7 \equiv -3[10]$ و $3n \times 9^n \equiv n \times 3^{2n+1}[10]$ و منه
$7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$ لأنّ $2n + 1$ فردي و منه
$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$ .

ب) $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ ومنه $(n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$ و منه $n - 1 \equiv 0[10]$ أي $\boxed{n = 10k + 1 \quad , k \in \mathbb{N}}$

## حل التمرين 5

العودة إلى نص التمرين

الجزء الاول :

1/ $a$ و $b$ أوّليان فيما بينهما ، حسب بيزو فإنه يوجد عددان صحيحان $u$ و $v$ حيث $au + bv = 1$ و منه $acu + bcv = c$ ن بما أنّ $a/bc$ فإنّ $a/bcv$ و $a/acu$ و منه $a/auc + bvc$ أي $a/c$ .
$a \equiv 0[p]$ و منه يوجد $k \in \mathbb{N}$ حيث $a = pk$ و $b \equiv 0[q]$ و منه يوجد $k' \in \mathbb{N}$ حيث $a = qk'$ و منه $pk = qk'$ لكن $p$ و $q$ أوّليان فيما بينهما و $p/qk'$ و منه يوجد $k'' \in \mathbb{N}$ حيث $k' = pk''$ و منه $a = pqk''$ و منه $\boxed{a \equiv 0[pq]}$ .

الجزء الثاني :

1/ أ) $17u + 5v = 1$ ن $u$ و $v$ موجودان حسب بيزو لأنّ 17 و 5 أوليان فيما بينهما .
ب) $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ .
$5v = 1 - 17u$ أي $5v \equiv 1[17]$ و منه $9 \times 5v \equiv 9[17]$ و لدينا $3 \times 17u \equiv 0[17]$ و منه $\boxed{n_0 \equiv 9[17]}$ ، لدينا $17u = 1 - 5v$ و منه $17u \equiv 1[5]$ و منه $3 \times 17u \equiv 3[5]$ و لدينا $9 \times 5v \equiv 0[5]$ و منه $\boxed{n_0 \equiv 3[5]}$ ، إذن $n_0$ عنصر من $S$ .
ج) بتطبيق خوارزمية إقلدس نجد $17 = 3 \times 5 + 2$ و $5 = 2 \times 2 + 1$ و منه $1 = 5 - 2 \times 2$ أي $1 = 5 - (17 - 5 \times 3) \times 2$ و منه $1 = 17 \times (-2) + 5 \times 7$ أي $(u, v) = (-2, 7)$ و منه $n_0 = 213$ .

2/ أ) $n \equiv 9[17]$ و $n_0 \equiv 9[17]$ و منه $n - n_0 \equiv 0[17]$ ، بنفس الطريقة نجد $n - n_0 \equiv 0[5]$ ، بما أنّ 5 و 17 أوليان فيما بينهما فإنّ $n - n_0 \equiv 0[17 \times 5]$ (حسب نتيجة سؤال سابق ) و منه $\boxed{n - n_0 \equiv 0[85]}$ .
ب) لدينا $n - 213 \equiv 0[85]$ أي $n \equiv 213[85]$ لكن $213 \equiv 43[85]$ و منه $n \equiv 43[85]$ أي $\boxed{n = 85k + 43 \quad , k \in \mathbb{N}}$ .

## حل التمرين 6

العودة إلى نص التمرين

1/ إذا كان $n$ زوجي فإنّ $A(n)$ فردي ، و إذا كان $n$ فردي فإنّ $A(n)$ زوجي .
2/ $n$ عدد طبيعي أكبر أو تساوي 2 .
إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإنّ $n^4 + 1 \equiv 1[3]$ .
إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإنّ $n^4 + 1 \equiv 2[3]$ .

# الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

## تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الملف موجود في : elite of latex and python

إذا كان $n \equiv 2[3]$ فإنّ $n^4+1 \equiv 2[3]$ .

و منه $n$ ليس مضاعف لـ 3 .

3/ $d$ قاسم لـ $A(n)$ و منه يوجد عدد طبيعي $k$ حيث $n^4+1=kd$

و منه $kd-n^3\times n=1$ و منه حسب بيزو فإنّ $d$ و $n$ أوليان فيما بينهما و منه كل قاسم لـ $A(n)$ أولي مع $n$ .

$d$ قاسم لـ $A(n)$ و منه $n^4+1\equiv 0[d]$ و منه $n^4\equiv -1[d]$ و منه $\boxed{n^8\equiv 1[d]}$ .

4/ أ) $n^k\equiv 1[d]$ حسب القسمة الإقليدية لـ $k$ على $s$ توجد ثنائية وحيدة $(q,r)$ حيث $k=sq+r$ مع $0\le r<s$ و منه $n^k=(n^s)^q\times n^r$

لكن $n^s\equiv 1[d]$ و منه $(n^s)^q\equiv 1[d]$ لكن $n^k\equiv 1[d]$ و منه $n^r\equiv 1[d]$ حيث $r<s$ لكن $s$ أصغر عدد طبيعي يحقق $n^s\equiv 1[d]$

و منه $r=0$ و منه $s$ يقسم $k$ .

ب) وجدنا سابقا أنّ $n^8\equiv 1[d]$ و منه $s$ يقسم 8 لأنّ $s$ يقسم $k$ .

## حل التمرين 7

العودة إلى نص التمرين

1/ لدينا $a^2=b^3$ و $a=du, b=dv$ حيث $d=PGCD(a,b)$ و منه $(du)^2=(bv)^3$ و منه $d^2u^2=d^3v^3$ و منه $\boxed{u^2=dv^3}$ .

2/ وجدنا $u^2=dv^3$ و منه $v/u^2$ و $u$ و $v$ أوليان فيما بينهما و منه $v$ يقسم $u$ ، $PGCD(u,v)=1$ لكن $PGCD(u,v)=v$ أي $v$ يقسم $u$

و منه $\boxed{v=1}$ .

3/ نفرض أنّ $a^2=b^3$ ، و $a=du$ ، $b=dv$ ، وجدنا $v=1$ و منه $u^2=d$ و $b=d$ و منه $b=u^2$ و $a=du=u^3$ و منه كل من $a$ و $b$ على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي .

نفرض أنّ كل من $a$ و $b$ على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي $m$ أي $a=m^3$ و $b=m^2$ و منه $a^2=m^6$ و $b^3=m^6$ و منه $a^2=b^3$ ، نستنتج أنّ $a^2=b^3$ معناه كل من $a$ و $b$ على الترتيب مكعب و مربع نفس العدد الطبيعي .

4/ $n=a^2=b^3$ ، من نتيجة السؤال السابق يوجد عدد طبيعي $d$ حيث $a=d^3$ و $b=d^2$ و منه $n=d^6$

| $d\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d^6\equiv$ | 0 | 1 | 64 | 729 | 4096 | 15625 | 46656 |
| $n\equiv ...[7]$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

و منه $\boxed{n\equiv 0[7]}$ أو $\boxed{n\equiv 1[7]}$

## حل التمرين 8

العودة إلى نص التمرين

1/ أ) $2009=11\times 182+7$ و منه الباقي يساوي 7 .

ب) $2^5=32$ و منه $2^5\equiv 10[11]$ أي $2^5\equiv -1[11]$ و منه $2^{10}\equiv 1[11]$ و منه الباقي يساوي 1 .

ج) $2^{009}=2^{10\times 200+9}=(2^{10})^{100}\times 2^9$ ، لدينا $2^{10}\equiv 1[11]$ و منه $(2^{10})^{100}\equiv 1[11]$ و لدينا $2^9=2^5\times 2^4$ و $2^5\equiv -1[11]$ و $2^4\equiv 5[11]$ و منه $2009\equiv 7[11]$ و منه

$2^{009}+2009\equiv -5+7[11]$ أي الباقي هو 2 .

2/ أ) كل قاسم لـ $A_n$ و $A_{n+1}$ يقسم الفرق بينهما لكن $A_{n+1}-A_n=2^n$ و منه $d_n$ يقسم $2^n$ .

ب) $A_n=2^n+p$ ، $2^n$ عدد طبيعي زوجي و منه شفعية $A_n$ من شفعية $p$ .

3/ أ) من نتيجة السؤال السابق $A_n$ و $A_{n+1}$ لهما نفس شفعية $p$ و منه :

– إذا كان $p$ فردي فإنّ $A_n$ و $A_{n+1}$ كذلك و منه قاسمهما المشترك الأكبر أيضا نفس النتيجة إذا كان $p$ زوجي و منه $d_n$ له نفس شفعية $p$ .

ب) $A_{2009}$ و $A_{2010}$ فرديان لأنّ 2009 فردي و منه $d_n$ أيضا فردي وجدنا أنّ $d_n$ يقسم $2^n$ ، كل قواسم $2^n$ زوجية إلا العدد 1 نستنتج أنّ $d_n=1$ و منه العددان $2^{2009}+2009$ و $2^{2010}+2009$ أوليان فيما بينهما .

## حل التمرين 9

العودة إلى نص التمرين

1/ أ) $(x_0,y_0)=(-2,1)$ حل خاص لـ $(E)$ لأنّ $-2\times 23+47\times 1=1$ .

ب) $(x,y)$ حل لـ $(E)$ ، لدينا $\begin{cases}23x+47y=1\\-2\times 23+47\times 1=1\end{cases}$ و منه

# الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

## تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

الملف موجود في : elite of latex and python

$23(x+2)=47(1-y)$ ، بتطبيق غوص نجد 23 يقسم $47(1-y)$ و 23 و 47 أوليان فيما بينهما ومنه 23 يقسم $y-1$ و منه $1-y=23k$ أي $y=1-23k$ ، بالتعويض نجد $x=47k-2$ و منه حلول $(E)$ هي $\boxed{\{(47k-2,1-23k) \quad ,k\in\mathbb{Z}\}}$ .

ج) $23x\equiv 1[47]$ و منه يوجد عدد صحيح $y$ حيث $32x=1-47y$ أي $23x+47y=1$ ، حسب نتيجة السؤال السابق فإنّ $x=47k-2$ و $y=1-23k$ لكن $1\leq x\leq 47$ و منه $1\leq 47k-2\leq 47$ و منه $3\leq 47k\leq 47$ و منه $k=1$ أي $\boxed{x=45}$ ومنه العدد الطبيعي الوحيد $x$ من $A$ الذي يحقق $23x\equiv 1[47]$ هو 45 .

2/ أ) $ab\equiv 0[47]$ و منه 47 يقسم $ab$ ، لكن 47 أولي و منه فهو يقسم إما $a$ أو يقسم $b$ و منه $a\equiv 0[47]$ أو $b\equiv 0[47]$ .

ب) $a^2\equiv 1[47]$ و منه $a^2-1\equiv 0[47]$ و منه

$(a-1)(a+1)\equiv 0[47]$ حسب نتيجة السؤل السابق فإنّ

$a-1\equiv 0[47]$ أو $a+1\equiv 0[47]$ و منه $\boxed{a\equiv 1[47]}$ أو $\boxed{a\equiv -1[47]}$

3/ أ) من أجل كل $p$ من $A$ يكون أولي مع 47 لأنّ 47 أولي و منه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان $q$ و $m$ حيث $pq+47m=1$ و منه $\boxed{pq\equiv 1[47]}$ .

ب) $p=inv(p)$ و منه $p^2\equiv 1[47]$ و منه $p\equiv 1[47]$ أو $p\equiv -1[47]$ و منه $\boxed{p=1}$ أو $\boxed{p=46}$ .

ج) من أجل كل $p$ من $A$ حيث $2\leq p\leq 45$ يوجد $inv(p)$ حيث $p\times inv(p)\equiv 1[47]$ حسب نتيجة سؤال سابق لكن $45!\equiv 1[45]$ و منه $45!=1\times 2\times 3\times\cdots\times 45$ .

لدينا $46!=46\times 45!$ و منه $46!\equiv 46[47]$ أي $\boxed{46!\equiv -1[45]}$ .

### حل التمرين 10

العودة إلى نص التمرين

سهل يترك للقارئ .

الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

تمارين نموذجية مرفقة بالحلول المفصلة

من كتابة الأستاذ : NAAM