مذكرة رقم :39	السنة الدراسية : 2025-2024	الأستاذة : جلام جميلة

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة– **ميدان التعلم :** التحليل

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية **المحور:** الدوال الأصلية والحساب التكاملي

المدة : ساعة **الموضوع :** الدوال الأصلية

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال .

المراجع : الكتاب المدرسي

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق : بناء المفاهيم:	**نشاط رقم1 ص 146** **الدالة الأصلية لدالة على مجال** **تعريف:** f و F دالتان معرفتان على مجال I و f قابلة للاشتقاق على I. إذا كان من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$ نقول أن: ○ f هي الدالة المشتقة للدالة F. ○ F دالة أصلية للدالة f على I. **امثلة:** **1-** الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $F(x)=x^2+2x-5$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=2x+2$ **2-** الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بِـ $F(x)=\sqrt{x}+\cos x$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بِـ $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x$ **نتيجة:** دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط. **خواص (دون برهان):** **1)** إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I. 2) إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال: $x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت. **مثال:** الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $F(x)=x^2-3x+1$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة	

تقويم :

على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=2x-3$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x)=2x-3=f(x)$.

*الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $F(x)=x^2-3x-\sqrt{2}$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f

لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x)=2x-3=f(x)$.

*كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \to F(x)+k$ أي $x \mapsto x^2-3x+1+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

تمرين: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x \quad \text{و} \quad f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

الحل: F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا: $F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$

و منه: $F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$

و بالتالي: $F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$

و هكذا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$. إذن F دالة أصلية لِـ f على المجال $]-1;+\infty[$.

طريقة: لإثبات أن F دالة أصلية لِـ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$.

تمرين: نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$G(x)=\frac{2x-1}{x-2}+x \quad \text{و} \quad F(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2}$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة

الحل: __الطريقة الأولى:__ نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ و $G'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

__الطريقة الثانية:__ نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right)-\left(\frac{2x-1}{x-2}+x\right)=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

تمرين 1 ، 2، 3 صفحة 158

تمارين منزلية من 11 إلى 17 صفحة 159

مذكرة رقم: 40	السنة الدراسية : 2024-2025	الأستاذة : جلاح جميلة

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة–

ميدان التعلم : التحليل

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية

المحور: الدوال الأصلية والحساب التكاملي

المدة : ساعة

الموضوع : الدوال الأصلية " تابع "

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : تعيين الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة y_0 من أجل قيمة للمتغير x_0

المراجع : الكتاب المدرسي

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق :	تمهيد	
بناء المفاهيم:	**الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير** **خاصية:** f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي. توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$ **البرهان:** بما أن الدالة f مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I و لتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية. إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)+k$ حيث k عدد حقيقي. الشرط $F(x_0)=y_0$ يعني أن $G(x_0)+k=y_0$ أي أن $k=y_0-G(x_0)$. لقد تم هكذا تحديد العدد الحقيقي k. توجد إذن دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$ و لدينا: $F(x)=G(x)+y_0-G(x_0)$	
تقويم :	**تطبيق:** نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x^2+\cos x$ **1.** عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. **2.** عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(\pi)=1$. تمرين 6 صفحة 158 . تمرين 51 صفحة 162 تمارين منزلية 6 إلى 10 صفحة 158	

مذكرة رقم: 41	السنة الدراسية : 2024-2025	الأستاذة : جلام جميلة

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة–

ميدان التعلم : التحليل

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية

المحور: الدوال الأصلية والحساب التكاملي

المدة : ساعة

الموضوع : حساب الدوال الأصلية

المكتسبات القبلية : حساب الدوال الأصلية

المكتسبات المستهدفة : تعيين الدوال الأصلية لدوال مألوفة والعمليات عليها .

المراجع : الكتاب المدرسي

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق : بناء المفاهيم:	تمهيد حساب الدوال الأصلية دوال الأصلية لدوال مألوفة تم الحصول على النتائج الملخصةفي الجدول الموالي انطلاقامن قراءةعكسية لمشتقات دوال مألوفة. الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.	

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\ (k\in\mathbb{Z})$

خواص

1) إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لِـ f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية لِـ $f+g$ على I.

2) إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k\in\mathbb{R})$.

تمرين عين الدالة الأصلية على المجال المعطى لكل دالة

1) $f(x)=x^3-5x+3$ و $I=\mathbb{R}$

2) $g(x)=\dfrac{3}{x^2}$ و $I=]-\infty;0[$

3) $h(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$

الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

شروط على الدالة u	الدوال الأصلية للدالة f على I	الدالة f
	$\frac{1}{2}u^2+c$	$u'u$
	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	$u'u^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$
من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$	$-\frac{1}{u}+c$	$\frac{u'}{u^2}$
من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	$\frac{u'}{u^n}$ $(n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2)$
من أجل كل x من I، $u(x)>0$	$2\sqrt{u}+c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
	e^u+c	$u'e^u$

تقويم :

تمرين 28. 29. 27. 26 صفحة 159 . تمرين 53 .57 صفحة 162

تمارين منزلية 19 إلى 30 صفحة 160

تمارين منزلية 36 إلى 56 صفحة 161. 162

الأستاذة : جلام جميلة	السنة الدراسية : 2024-2025	مذكرة رقم : 42

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة– **ميدان التعلم :** التحليل

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية **المحور:** الدوال الأصلية والحساب التكاملي

المدة : ساعة **الموضوع :** المعادلات التفاضلية

المكتسبات القبلية : حساب الدوال الأصلية

المكتسبات المستهدفة : حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ او $y''=f(x)$

المراجع : الكتاب المدرسي

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق :	**تمهيد**	
بناء المفاهيم:	**المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$** **مبرهنة:** إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=F(x)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت. **مثال:** حلول المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{x^2}$ في $]0;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=-\frac{1}{x}+c$ مع c ثابت حقيقي. **تمرين:** **1.** حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y'=3x^2-3x+1......(E)$. **2.** عين F حل المعادلة التفاضلية (E) بحيث: $F(1)=\frac{3}{2}$. **المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$** **مبرهنة:** إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=G(x)+c_1x+c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان. **مثال:** حلول المعادلة التفاضلية $y''=\sin x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=-\sin x+ax+b$ ، a ، b ثابتان.	

	تمرين: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E).....$y''=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.ثم عين الحل F الذي يحقق: $F(0)=1-\frac{\sqrt{2}}{4}$. و $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ **المعادلات التفاضلية من الشكل** $y''=-\omega^2 y$ **مبرهنة (دون برهان):** إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2 y$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان. **تمرين:** نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $y''+\pi^2 y=0$. **1.** حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) . **2.** عين الحل F الذي يحقق الشرطين: $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$ و $F'\left(\frac{2}{3}\right)=0$. تمارين منزلية 31 إلى 35 صفحة 161	تقويم :

مذكرة رقم :43	السنة الدراسية : 2024-2025	الأستاذة : جلاج جميلة

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة– **ميدان التعلم :** التحليل

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية **المحور:** الدوال الأصلية والحساب التكاملي

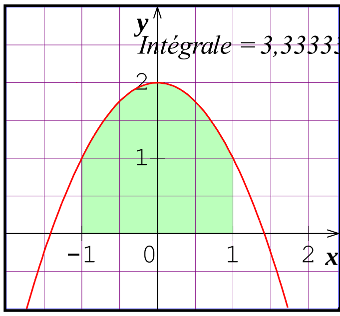
المدة : ساعة **الموضوع :** الحساب التكاملي

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : تعريف التكامل و توظيف خواصه.

المراجع : الكتاب المدرسي

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق : بناء المفاهيم:	**نشاط رقم1 ص 166** الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I . a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لِـ f على I. مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$. ملاحظات: 1. الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$. 2. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OAKB$ حيث K هي النقطة التي إحداثياها $(1;1)$. تمرين : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=2-x^2$ 1. أرسم التمثيل البياني للدالة f . 2. أحسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز المحدد بِـ (C) و المستقيمات $x=-1$ ، $x=1$ و $y=0$. 3. المعلم الذي مثلت فيه الدالة f متعامد حيث الوحدات كما يلي: $2cm$ على محور الفواصل و	

	على محور التراتيب.أحسب بِـ cm^2 مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1. 1,5cm **الحل :** الدالة f موجبة على المجال $[-1;1]$ و دالة أصليةلها على $[-1;1]$ هي الدالة F حيث: $F(x)=2x-\frac{1}{3}x^3$ مساحة الحيز، بوحدة المساحة $(u.a)$، تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي:  $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}(u.a)$ 3. وحدة المساحة هي $2cm\times 1,5cm$ أي $3cm^2$ و بالتالي فإن مساحة الحيز، بِـ cm^2، تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي: $\frac{10}{3}\times 3cm^2$ أي $10cm^2$ **تعريف التكامل** تعريف: f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I. يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لِـ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$. نقرأ: "التكامل من a إلى b لِـ $f(x)$ تفاضل x". ملاحظة: 1. لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب: $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$ 2. يمكن استبدال المتغير x بأحد الحروف t، q،.... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$ تمرين (1): أحسب التكاملات التالية: 1) $\int_{-1}^{2}\left(-3x^2+2x-1\right)dx$ 2) $\int_0^2\left(e^{2x+1}+x\right)dx$ 3) $\int_{-\pi}^{0}\cos x dx$ **الحل :** $\int_{-1}^{2}\left(-3x^2+2x-1\right)dx=\left[-x^3+x^2-x\right]_{-1}^{2}=(-8+4-2)-(1+1+1)=-9$ $\int_0^2\left(e^{2x+1}+x\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x+1}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=\frac{1}{2}e^5+2-\frac{1}{2}e$ $\int_{-\pi}^{0}\cos x dx=\left[\sin x\right]_{-\pi}^{0}=0$ تمارين منزلية من 8 إلى 17 صفحة 184	تقويم :

الأستاذة : جلام جميلة	السنة الدراسية : 2024–2025	مذكرة رقم :44

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة–

ميدان التعلم : التحليل

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية

المحور: الدوال الأصلية والحساب التكاملي

المدة : ساعة

الموضوع : خواص التكامل

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : تطبيق خواص الحساب التكاملي .

المراجع : الكتاب المدرسي

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق : بناء المفاهيم:	**تهيئة نفسية :** خواص التكامل 1. علاقة شال خاصية: f دالة مستمرة على مجال I . من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا: $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$ البرهان: إذا كانت F دالة أصلية لِـ f على I فإن: $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = [F(b)-F(a)]+[F(c)-F(b)]=[F(c)-F(a)]=\int_a^c f(x)dx$$ نتائج: من الواضح أن $\int_a^a f(x)dx = 0$ ومنه إذا أخذنا $c=a$ نحصل على $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$ تمرين (2): أحسب التكامل التالي: $\int_{-3}^{1} \lvert x^2-4\rvert dx$ طريقة: نكتب، حسب قيم x، عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة لنتمكن من تعيين دوال أصلية للدالة f . الحل: x^2-4 كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه -2، 2 و بالتالي:	

	• من أجل كل x من $[-3;-2]$، $x^2-4\geq 0$ إذن $\|x^2-4\|=x^2-4$. • من أجل كل x من $[-2;1]$، $x^2-4\leq 0$ إذن $\|x^2-4\|=-x^2+4$. باستعمال علاقة شال يكون لدينا: $\int_{-3}^{1}\|x^2-4\|dx=\int_{-3}^{-2}\|x^2-4\|dx+\int_{-2}^{1}\|x^2-4\|dx=\int_{-3}^{-2}(x^2-4)dx+\int_{-2}^{1}(-x^2+4)dx$ و منه $\int_{-3}^{1}\|x^2-4\|dx=\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{1}=\left[\left(-\frac{8}{3}+8\right)-(-9+12)\right]+\left[\left(-\frac{1}{3}+4\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right]=\frac{34}{3}$ الخطية خاصية: f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي.من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا: (1) $\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$. (2) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ مثال $\int_0^1(2x+1)dx=\int_0^1 2xdx+\int_0^1 1dx=\left[x^2\right]_0^1+[x]_0^1=1-0+1-0=2$ تمرين:نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\,dx$ أحسب $A+B$ و $A-B$ ثم استنتج A و B. المقارنة خواص: f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$. (1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ (2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$ تمرين (1): نعتبر التكامل $I=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$ 1. بين أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{t^2+1}\leq 1$. 2. استنتج حصرا للعدد I الحل: 1. من أجل كل t من $[0;1]$، $1+t^2\geq 1$ و منه من أجل كل t من $[0;1]$، $\frac{1}{1+t^2}\leq 1$. 2. بما أن $0<1$ و بتطبيق خاصية المحافظة على الترتيب نستنتج أن $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\leq\int_0^1 1dt$ و بما أن $\int_0^1 1dt=[t]_0^1=1$ فإن $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\leq 1$. من الواضح كذلك أنه من أجل كل t من $[0;1]$،	تقويم :

	$\frac{1}{1+t^2}>0$ و منه $I>0$. نستنتج هكذا الحصر التالي: $0<I\leq 1$. تمرين 1 ، 2، 3 صفحة 184 تمارين منزلية من 26 إلى 35 صفحة 186		

الأستاذة : جلاب جميلة	السنة الدراسية : 2024-2025	مذكرة رقم :45

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة–
ميدان التعلم : التحليل

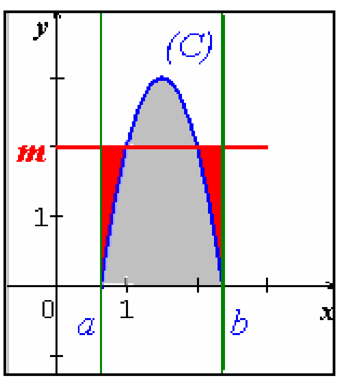
المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية
المحور: الدوال الأصلية والحساب التكاملي

المدة : ساعة
الموضوع : القيمة المتوسطة لدالة

المكتسبات القبلية :

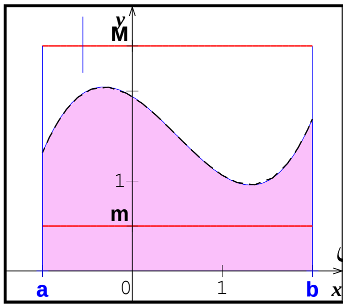
المكتسبات المستهدفة : تعيين القيمة المتوسطة لدالة على مجال .

المراجع : الكتاب المدرسي

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق : بناء المفاهيم:	**تهيئة نفسية** **القيمة المتوسطة لدالة على مجال** **تعريف:** f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ **التفسير البياني في حالة دالة موجبة:** نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.  ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$. $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يعني $m(b-a)=\int_a^b f(x)dx$ نعلم أن $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b. $m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m (القيمة المتوسطة). و هكذا فإن m، القيمة المتوسطة لِـ f على $[a;b]$، هي " ارتفاع " المستطيل الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b. نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة. **حصر القيمة المتوسطة** **خواص:** f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل	

x من $[a;b]$ ، $m \le f(x) \le M$ فإن: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل x من I ، $|f(x)| \le M$ فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$.



التفسير البياني في حالة f موجبة و $m \ge 0$: مساحة الحيز تحت المنحنيالممثل لِـ f بين a و b محصورة بين مساحتي المستطيلين اللذين ارتفاعهما m و Mو عرضهما $b-a$. كما أن القيمة المتوسطة μ هي الأخرى محصورة بين a و b.

تقويم :

تمرين : نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بِـ $f(x)=1+\ln(x+1)$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;e-1]$.
2. استنتج حصرا لِـ $f(x)$.
3. استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_1^{e-1} f(x)dx$

الحل:

1. لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$. إذن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و منه على المجال $[0;e-1]$.
2. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;e-1]$، $f(0) \le f(x) \le f(e-1)$ أي $1 \le f(x) \le 2$.
3. بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2) \le \int_1^{e-1} f(x)dx \le 2(e-2)$.

تمارين منزلية 38 ،47 ، 51 صفحة 188

الأستاذة : جلاج جميلة

السنة الدراسية : 2024-2025

مذكرة رقم :46

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة–

ميدان التعلم : التحليل

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية

المحور: الدوال الأصلية والحساب التكاملي

المدة : ساعة

الموضوع : حساب المساحات

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : حساب مساحة حيز .

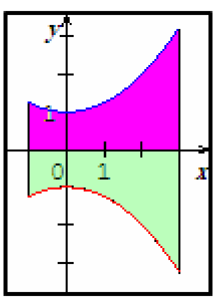
المراجع : الكتاب المدرسي

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr>
<td>الانطلاق :

بناء المفاهيم:</td>
<td>
تهيئة نفسية

تكامل دالة سالبة على مجال

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.



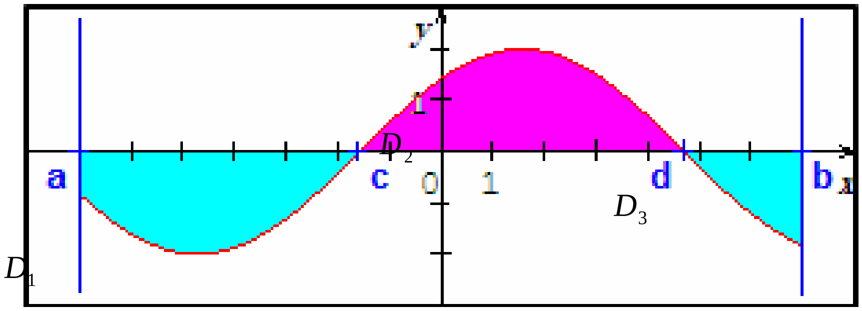
نرمز بِ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بِ A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f}) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.

بما أن f سالبة على $[a;b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a;b]$ و بالتالي $A'=\int_a^b -f(x)dx$ D
الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل فمساحتاهما متساويتان أي $A'=A$.
و بالتالي فإن $A=\int_a^b -f(x)dx$ أو $\int_a^b f(x)dx=-A$. نقول أحيانا أن $\int_a^b f(x)dx$ هي المساحة الجبرية للحيز D فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$.

تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

لتكن مثلا f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$. نرمز بِـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.



نلاحظ مثلا في الشكل أعلاه أن f موجبة على $[c;d]$ و سالبة على المجالين $[a;c]$ و $[d;b]$.

نرمز بِـ A_1 إلى مساحة الحيز D_1، بِـ A_2 إلى مساحة الحيز D_2 و بِـ A_3 إلى مساحة الحيز D_3.

لدينا $A=A_1+A_2+A_3$ و بما أن $A_1=-\int_a^C f(x)dx$ ، $A_2=\int_c^d f(x)dx$ و $A_3=-\int_d^b f(x)dx$

فإن $$A=-\int_a^C f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$$

ملاحظة:

بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بمنحن ممثل لدالة f

تغير إشارتها على $[a;b]$ نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارة ثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات.

تمرين : نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بِـ $f(x)=\frac{1}{2}+\cos x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.
2. أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.
3. أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\pi$ و $y=0$.

مساحة حيز محدد بمنحنيين :

نتيجة: إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq g(x)$، مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي: $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

تقويم :	تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الطول هي $2cm$. 1. أدرس تغيرات الدالة f محددا نهايتيها عند0 و عند $+\infty$. 2. بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له. 3. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (Δ). 4. أحسب بـِ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـِ (C_f)، (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{e}$ و $x=e$. تمارين منزلية من 54إلى 95 صفحة 188 85 ، 98صفحة 190	

الأستاذة : جلام جميلة	السنة الدراسية : 2024-2025	مذكرة رقم :47

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة– **ميدان التعلم :** التحليل

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية **المحور:**الدوال الأصلية والحساب التكاملي

المدة : ساعة **الموضوع :** التكامل بالتجزئة

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : حساب التكامل بالتجزئة .

المراجع : الكتاب المدرسي

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق : بناء المفاهيم:	**تهيئة نفسية** **المكاملة بالتجزئة** **مبرهنة:** لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا: $\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$ **تمرين : باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب:** $I=\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$ **و** $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin x\,dx$ **طريقة:** لاستعمال المكاملة بالتجزئة نكتب f على الشكل $u\times v'$. **الحل:** 1. نضع $u(x)=x-1$ ، $v'(x)=e^x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=e^x$ بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $I=\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$ و منه $I=1-\left[e^x\right]_0^1=1-(e-1)=-e$. إذن $I=-e$. **ملاحظة:** كان بالإمكان وضع $u(x)=e^x$ ، $v'(x)=x-1$ و من تم $u(x)=e^x$ ، $v(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ إلا أننا بعد التعويض نحصل على تكامل أكثر تعقيدا من الأول.	

	2. نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\sin x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=-\cos x$ بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $J=[-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}-\cos x\,dx$ ومنه $J=-\frac{\pi}{6}+[\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. إذن $J=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة** **مبرهنة:** f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I. الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة $F:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ **تمرين :عين، باستعمال المكاملة بالتجزئة، الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ و التي تنعدم عند** 1. **طريقة:** يمكنا دائما وضع $u(x)=u(x)v'(x)$ حيث $v'(x)=1$. **الحل:** الدالة $x\mapsto\ln x$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$. و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ $F(x)=\int_1^x\ln(t)dt$. نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$ بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $F(x)=[t\ln t]_1^x-\int_1^x\frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-\int_1^x dt$ و منه $F(x)=x\ln x-[t]_1^x=x\ln x-(x-1)=x\ln x-x+1$ الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ $F(x)=x\ln x-x+1$. **ملاحظة:** الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto x\ln x-x+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$ و بصفة عامة نثبت بإتباع نفس الطريقة أن الدوال ألأصلية للدالة $x\mapsto\ln(x+a)$ على المجال $]-a;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto(x+a)\ln(x+a)-x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت تمارين منزلية من 64 إلى 71 صفحة 189 105 ، 106 صفحة 193	تقويم :

مذكرة رقم :48

السنة الدراسية : 2025-2024

الأستاذة : جلاج جميلة

ثانوية : محمد حسين بن زيان –واد الجمعة–

ميدان التعلم : التحليل

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية

المحور: الدوال الأصلية والحساب التكاملي

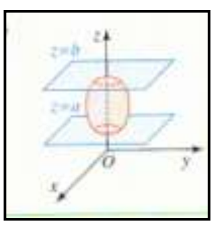
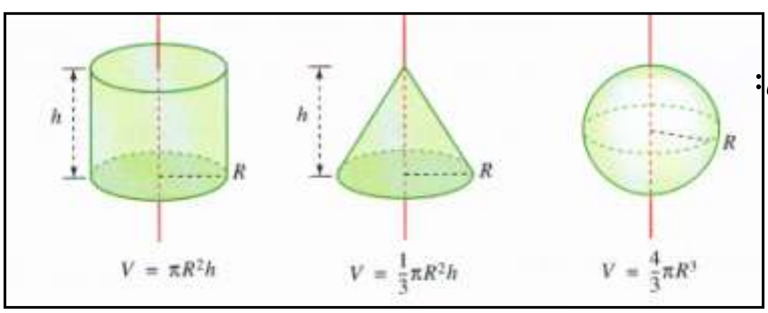
المدة : ساعة

الموضوع : حساب الحجوم

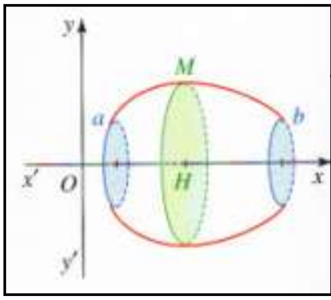
المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : حساب حجوم لمجسمات بسيطة ، توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة.

المراجع : الكتاب المدرسي

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق : بناء المفاهيم:	تهيئة نفسية حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;I,J,K)$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$. وحدة الحجوم (uv) هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على $(O;I,J,K)$. الفضاء مجسما محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما: $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$. خاصية1: لتكن $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو مواز للمستوي (xOy) راقمه z حيث $a<z<b$. أن حجم المجسم بوحدة الحجوم هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b S(z)dz$  أمثلة: لدينا في الشكل المقابل كل من: • حجم الكرة. • حجم المخروط الدوراني. • حجم الاسطوانة الدورانية.  	

حالة خاصة: حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$



ليكن (C) المنحني الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a;b]$. دوران المنحني (C) المحور $(x'x)$ يولد مساحة دورانية محورها $(x'x)$ التي بدورها تحدد مجسمادورانيا محوره $(x'x)$. لتكن $M(x;f(x))$ نقطة من المنحني (C).مقطع المجسم الناتج عن دوران المنحني (C) حول المحور $(x'x)$ بمستو مار من M و عمودي على $(x'x)$ هو قرص مساحته $\pi \times HM^2$ أي $\pi \times [f(x)]^2$.

خاصية2: حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) ممثل لدالة f مستمرة و موجبة على مجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$

المسافة المقطوعة على مستقيم

نرمز بِـ $x(t)$ إلى المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة عند اللحظة t. تعرف السرعة اللحظية $v(t)$ لهذه النقطة المتحركة عند اللحظة t بالعلاقة: $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=x'(t)$ أي $dx=v(t)dt$

خاصية: المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 $(t_1<t_2)$ سرعتها اللحظية $v(t)$ هي: $x=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

تمرين1: برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو: $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

الحل:

تقويم :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J,K)$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$ الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R.

مقطع هذه الكرة بمستو مواز للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $-R<z<R$ هي دائرة مركزها $\Omega(0;0;z)$ و نصف قطرها $r=\Omega M$ مع $OM=R$.

لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2=R^2-z^2$ و منه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره R هي: $S(z)=\pi\left(R^2-z^2\right)$. الحجم هو إذن: $V=\int_{-R}^{R} S(z)dz=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz$ و بالتالي: $V=\pi\left[R^2z-\dfrac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}=\pi\left[\left(R^3-\dfrac{1}{3}R^3\right)-\left(-R^3+\dfrac{1}{3}R^3\right)\right]$ و منه $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3 u.v$.

تمرين 2: ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto \cos x$ على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. أحسب a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل $(x'x)$.

2. أحسب v الحجم المولد بدوران المنحني (C) حول محور الفواصل $(x'x)$.

تمرين 3: من أجل $t > 0$، سرعة نقطة متحركة هي: $V(t) = 2t + e^{t}\left(m.s^{-1}\right)$

أحسب x المسافة المقطوعة من قبل هذه النقطة المتحركة بين اللحظتين $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$.

الحل: نعلم أن $x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ و منه $x = \int_1^2 \left(2t + e^{t}\right)dt$. دالة أصلية للدالة $t \mapsto 2t + e^{t}$

على $\mathbb{R}$ هي الدالة $t \mapsto t^2 + e^{t}$

و منه $x = \left[t^2 + e^{t}\right]_1^2 = \left(4 + e^2\right) - \left(1 + e\right) = e^2 - e + 3$.

إذن المسافة المقطوعة بين اللحظتين $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$ هي $\left(e^2 - e + 3\right)m$.

تمرين 72، 73 صفحة 190

تمارين منزلية من 90 صفحة 191