المستوى:3 تسيير و اقتصاد — الوسائل المستعملة: الكتاب المدرسي، السبورة

الوحدة التعلمية: تحليل — الأستاذ: طيبي حسان — المدة: ساعة

الموضوع: الاشتقاقية

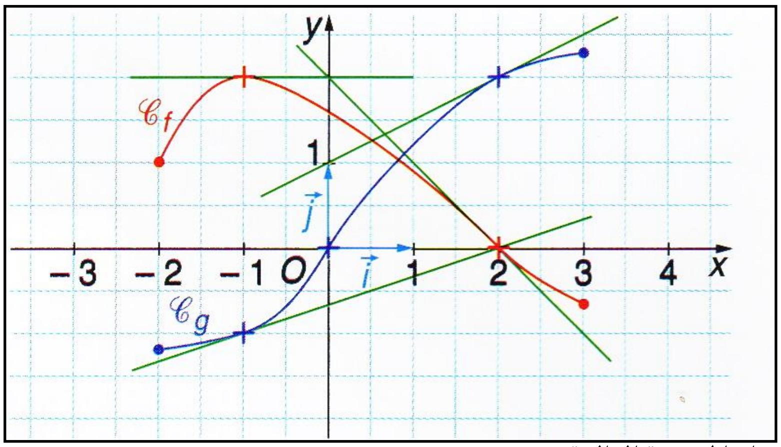
الكفاءة المستهدفة: - توظيف المشتقة لحل مشكلات

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الانطلاق

نشاط 1 ص 62:

رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين لدالتين f و g معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ و بعض مماساتهما.



مرحلة بناء المعارف

1. أحسب الأعداد المشتقة التالية:

- $(f)'(-1)$ * $(g)'(-1)$ * $(f)'(2)$ * $(g)'(2)$ *
- $(f+g)'(-1)$ * $(fg)'(2)$ * $\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)$ * $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ *

2. من أجل كل x من المجال $[0;2]$ نضع: $h(x)=f(2x-1)$

أحسب $h'(0)$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)$.

الاشتقاقية (تذكير)

العدد المشتق . الدالة المشتقة

<u>تعريف:</u> f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.

القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه لما يؤول h إلى 0 النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تؤول إلى عدد حقيقي نرمز له بالرمز $f'(a)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند a .

ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

التفسير البياني. التفسير الاقتصادي

التفسير البياني

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ ومعادلته:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

التفسير الاقتصادي

الكلفة الهامشية للإنتاج هي تزايد الكلفة الناتج عن صنع وحدة إضافية. تعطى الكلفة الهامشية بالعلاقة:

$C_m(q)=C(q+1)-C(q)$ حيث C هي الدالة " الكلفة الإجمالية " نلاحظ أن $C'(q)$ هو تقريب جيد لـ $C_m(q)$.

في الاقتصاد نضع $C_m(q)=C'(q)$ حيث C' هي الدالة المشتقة للدالة الكلفة الإجمالية C.

قواعد الإشتقاق - العمليات على المشتقات

- **قواعد الاشتقاق**

$f(x)$	a	x	$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ x^n$	$\frac{1}{x}$	$(n\in\mathbb{N}^*)\ \frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
مجالات قابلية الاشتقاق	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$

- **العمليات على المشتقات**

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

المشتقات المتتابعة:

تعريف: f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة f نرمز لها بالرمز f''. وإذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فان دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f ونرمز لها بالرمز f'''. تسمى الدوال $f', f'', f''', ..., f^{(n)}, ...$ المشتقات المتتابعة للدالة f

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^4$، الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة وانه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=4x^3$،
$f''(x)=12x^2$، $f^{(3)}(x)=24x$، $f^{(4)}(x)=24$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$ لدينا $f^{(n)}(x)=0$.

نقطة الإنعطاف: إذا كانت f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال I

وكانت $f''(x)$ تنعدم عند x_0 من I مغيرة إشارتها في جوار x_0 فإن المنحنى البياني (C_f) للدالة f له نقطة انعطاف $A(x_0, f(x_0))$ والمماس لـ (C_f) عند A يخترق (C_f)

التقويم

مثال:

f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=3x^3+1$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ومن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=9x^2$ و $f''(x)=18x$

حيث $f''(x)=0$ عند $x_0=0$ مغيراً إشارته في جوار 0 ومنه النقطة $A(0;1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

المشتقة و اتجاه التغير:

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي

تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي

f f I

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-3$

f دالة كثير حدود فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=12x^3-24x^2+12x$

بعد التحليل نجد أن: $f'(x)=12x(x-1)^2$

من أجل $x\in]-\infty;0]$، $f'(x)<0$ و من أجل $x\in[0;+\infty[$، $f'(x)>0$

بالإضافة إلى ما سبق لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و منه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	-2	↗	$+\infty$

القيم الحدية المحلية:

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x) \le f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x) \ge f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لِـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

مثال: نعتبر نفس معطيات المثال السابق.

* نلاحظ من جدول تغيرات الدالة f أن $f(0) = -3$ هي قيمة حدية محلية صغرى لِـ f لأنه يوجد على الأقل مجال مفتوح(مثلا $]-1;+1[$) محتوى في $\mathbb{R}$ و يشمل 0 بحيث من أجل كل x من $]-1;+1[$، $f(x) \ge f(0)$.

* $f(1) = -2$ ليس قيمة حدية للدالة f.

مبرهنة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I يشمل x_0. إذا انعدمت $f'(x)$ عند x_0 مغيرة إشارتها في جوار x_0 فان $f(x_0)$ هي قيمة حدية والمماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ يكون أفقياً.

تطبيق:

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[-2;3]$ بالشكل $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ واستنتج القيم الحدية لـ f على هذا المجال

تمرين:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

تمارين للمنزل: 03-04-07-08 صفحة 22

المستوى: 3 تسيير واقتصاد　　**الوسائل المستعملة:** الكتاب المدرسي، السبورة

الوحدة التعلمية: تحليل　　**الأستاذ:** طيبي حسان　　**المدة:** ساعة

الموضوع: اشتقاق مركب دالتين

الكفاءة المستهدفة: - **اشتقاق مركب دالتين**

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق	تهيئة : **فكك كل من الدوال التالية إلى دالتين مرجعيتين** u و v : $f(x)=\sqrt{x-1}$　$f(x)=3+\dfrac{1}{1-x}$　$f(x)=(x-1)^2+4$　$f(x)=\|x-7\|+2$	
مرحلة بناء المعارف	**اشتقاق مركب دالتين:** **مشتقة الدالة $v\circ u$** **مبرهنة (دون برهان):** إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v\circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $(v\circ u)'(x)=v'[u(x)]\times u'(x)$ **مثال:** لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=2(x^2+1)^3-3$ نلاحظ أن $f=v\circ u$ حيث $u:x\mapsto x^2+1$ و $v:x\mapsto 2x^3-3$ و منه $f'(x)=v'(x^2+1)\times u'(x)$ بعد الحساب نجد: $f'(x)=6(x^2+1)^2\times 2x=12x(x^2+1)^2$ **نتائج** **مشتقة الدالة $x\mapsto\sqrt{u(x)}$** إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و كانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ **مثال:** لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ نلاحظ أن $f=\sqrt{u}$ مع $u(x)=x^2+2$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $u(x)>0$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ **مشتقة الدالة $x\mapsto[u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n\geq 2$)** إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $(u^n)'=nu'u^{n-1}$.	

التقويم

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=\left(2x^2-3x+3\right)^3$

نلاحظ أن $f=u^3$ مع $u(x)=2x^2-3x+3$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا: $f'(x)=3(4x-3)\left(2x^2-3x+3\right)^2$

مشتقة الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{\left[u(x)^n\right]}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

تطبيق:

عين مشتقات الدوال الآتية:

1. $f:x \mapsto \left(2x^2-x+3\right)^4$ على $\mathbb{R}$.
2. $g:x \mapsto \dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^3}$ على $]1;+\infty[$.
3. $h:x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ على $]2;+\infty[$.

أنجز التمارين: 09-11 ||13-14-08 الصفحة{22||23}ة

ملاحظات حول سير الحصة:...

....

....

المستوى:3 تسيير واقتصاد

الوسائل المستعملة: الكتاب المدرسي، السبورة

الوحدة التعلمية: تحليل

الأستاذ: طيبي حسان

المدة: ساعة

الموضوع: الاستمرارية

الكفاءة المستهدفة: - **التعرف على استمراردالة**

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق	**نشاط:** **الاستمرارية** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$. نقول عن f أنها مستمرة على I إذا استطعنا رسم منحنيها (C) بدون رفع القلم وفق خط مستمر.	
مرحلة بناء المعارف	**خواص:** • الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها. • الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$. • الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها **أمثلة:** ○ الدالة $x \mapsto 2x^2-3x+4$ مستمرة على $\mathbb{R}$. ○ الدالة $x \mapsto \dfrac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$. ○ الدالة $x \mapsto 2x+3-\sqrt{x}$ مستمرة على المجال $[0;+\infty[$. ○ الدالة $x \mapsto (x^2+1)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$. **مبرهنة القيم المتوسطة** **مبرهنة:** f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.	

التقويم

إذا كان f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)\prec 0$

فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c بحيث $f(c)=0$

أي المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا.

الدوال المستمرة والرتيبة تماماً على مجال $[a;b]$:

إذا كانت الدالة f مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماماً أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فان جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين المواليين:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ $\nearrow$	k	$\nearrow$ $f(b)$

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ $\searrow$	k	$\searrow$ $f(b)$

وعليه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و$f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على حلا حيداً x_0 محصورا بين a و b.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+x-1$

f دالة كثير حدود فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و لدينا $f(0)=-1$ و $f(1)=1$،

العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ ومنه، حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

قابلية الإشتقاق والإستمرار: [مبرهنة العلاقة بين الإشتقاقية والإستمرارية]

1) إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a من I فان f مستمرة عند a.

2) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فان f مستمرة على I.

استمرار الدوال المرجعية: [تقبل دون برهان]

- ✓ الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- ✓ الدوال كثيرات الحدود و sin، cos مستمرة على $\mathbb{R}$.
- ✓ الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيرات حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

مثلا: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

بوضع $g(x)=x^2+1$ و $h(x)=\sqrt{x}$ يكون $f(x)=h\circ g(x)$ إذن الدالة f هي تركيب دالتين مرجعيتين وبالتالي f مستمرة على $\mathbb{R}$.

ملاحظات حول سير الحصة::..

....

....

المستوى: 3 تسيير واقتصاد — **الوسائل المستعملة:** الكتاب المدرسي، السبورة

الوحدة التعلمية: تحليل — **الأستاذ:** طيبي حسان — **المدة:** ساعة

الموضوع: النهايات

الكفاءة المستهدفة: - نهايات الدوال المرجعية ومختلف العمليات على النهايات.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق	**نشاط:**	
	1- أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+5\right)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-8x^2+1}{x}\right)=$	
مرحلة بناء المعارف		

1. نهايات الدوال المرجعية:

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty \quad * \quad \lim_{x\to-\infty} x=-\infty \quad * \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty \quad *$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \quad * \quad \lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty \quad * \quad \lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty \quad * \quad \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty \quad *$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0 \quad * \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0 \quad * \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x}=+\infty \quad * \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x}=-\infty \quad *$$

2. العمليات على النهايات:

لتكن f وَ g دالتان. a عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، نقبل دون برهان المبرهنات الموالية:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

	نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ ○ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة. ○ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة. **مثال:** لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بِ $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$ لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$ **حالات عدم التتعيين:** f وَ g دالتان. a عدد صحيح أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، نقبل حالات عدم التعيين في ما يلي: **1. مجموع دالتين:** $+\infty-\infty$ **أو** $-\infty+\infty$ **2. جداء دالتين:** $0\times(+\infty)$ **أو** $0\times(-\infty)$ **3. حاصل قسمة دالتين:** $\dfrac{0}{0}$ **أو** $\dfrac{\infty}{\infty}$	**التقويم**

المستوى: 3 تسيير واقتصاد | **الوسائل المستعملة:** الكتاب المدرسي، السبورة

الوحدة التعلمية: تحليل | **الأستاذ:** طيبي حسان | **المدة:** ساعة

الموضوع: نهاية مركب دالتين – النهاية بالمقارنة

الكفاءة المستهدفة: - التعرف على متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=au_n+b$ مع $a\neq 0$

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الانطلاق	**مفهوم دالة مركبة . النهاية بالمقارنة** **الدالة مركب دالتين:** **تعريف:** v دالة معرفة على مجال J و u دالة معرفة على مجال I بحيث من أجل كل x من I، $u(x)\in J$. الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $v\circ u$ و المعرفة على I بِ $(v\circ u)(x)=v\left[u(x)\right]$. و نقرأ v دائرة u لِ x.	
مرحلة بناء المعارف	**مثال:** نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x)=2x^2-3$ و $v(x)=-3x+1$ * الدالة $v\circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا: $v\circ u(x)=v\left[u(x)\right]=v\left(2x^2-3\right)=-6x^2+10$ * الدالة $u\circ v$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا: $u\circ v(x)=u\left[v(x)\right]=u(-3x+1)=18x^2-12x-1$ **نهاية دالة مركب دالتين:** **مبرهنة:** a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u، v و f دوال حيث $f=v\circ u$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ و إذا كانت $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$ **مثال:** نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بِ $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$ و نريد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ $(f=v\circ u)$ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to 2}v(x)=\sqrt{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$	

التقويم

النهايات بالمقارنة:

الخاصية1: f، g و h دوال و l عدد حقيقي.
إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=l$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي
$g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$.

الخاصية2: f، g دالتان و l عدد حقيقي.
إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\ge g(x)$
فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

الخاصية3: f، g دالتان و l عدد حقيقي.
إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\le g(x)$
فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

تطبيق:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=2\left(2-\frac{3}{x}\right)^2-3$

أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$، عند $+\infty$ و عند 0.

حل التطبيق:

نلاحظ مثلا أن الدالة f هي الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u: x\mapsto 2-\frac{3}{x}$ و $v: x\mapsto 2x^2-3$

* $\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2$ وبما أن $\lim_{x\to2}\left(2x^2-3\right)=5$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=5$ و
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$

أي: $\lim_{x\to-\infty} u(x)=2$ و $\lim_{x\to+\infty} u(x)=2$ و بما أن $\lim_{x\to2} v(x)=5$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=5$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$

* $\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(-\frac{3}{x}\right)=+\infty$ و منه $\lim_{\substack{x\to0\\<}} u(x)=+\infty$ و بما أن $\lim_{x\to+\infty} v(x)=+\infty$ فإن $\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=+\infty$

* $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(-\frac{3}{x}\right)=-\infty$ و منه $\lim_{\substack{x\to0\\>}} u(x)=-\infty$ و بما أن $\lim_{x\to-\infty} v(x)=+\infty$ فإن $\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=+\infty$.

تمرين شامل:

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن : $f(x)=x-5+\dfrac{a}{x^2}$ ، حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه .

2) أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3) أ ـ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن : $f'(x)=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f .

بـ ـ شكل جدول تغيرات الدالة f . (

4) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل ، يطلب تعيين معادلتيهما .

5) أوجد معادلة لـ (Δ) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

6) أرسم (Δ) و المنحنى (C_f) .

تمرين 2

ملاحظات حول سير الحصة:..

....

....

المستوى: 3 تسيير واقتصاد **الوسائل المستعملة:** الكتاب المدرسي، السبورة

الوحدة التعلمية: تحليل **الأستاذ:** طيبي حسان **المدة:** ساعة

الموضوع: المستقيمات المقاربة

الكفاءة المستهدفة: - المستقيمات المقاربة ودراسة الوضعية النسبية لمنحنى دالة له.

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الانطلاق

نشاط

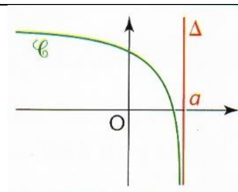
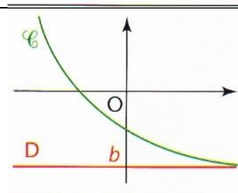
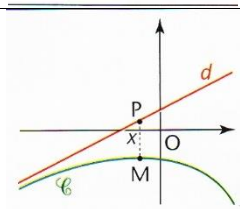
1|أدرس النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ وعند 1 للدالة f المعرفة بالشكل: $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$

2| حدّد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f وأدرس ووضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

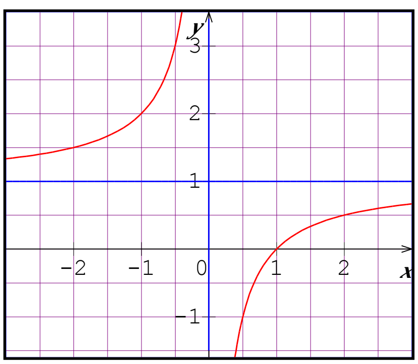
مرحلة بناء المعارف

المستقيمات المقاربة:

a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

النهاية	المستقيم المقارب	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني (C)	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$	المستقيم (D) ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	المستقيم (d) ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f.



التقويم

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$f:x\mapsto 1-\dfrac{1}{x}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$

و منه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C).

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. و منه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

الوضع النسبي لمنحن والمستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$.

إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.

إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل.

تطبيق1 : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بِ $f(x)=-x+2+\dfrac{3}{x^2}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

1. **بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.**
2. **أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).**

حل التطبيق 1:

1. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x^2}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$ فإن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.
2. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x^2}$ و بما أن $\dfrac{3}{x^2}>0$ فإن المنحني (C) يقع فوق المستقيم المقارب (Δ).

تطبيق 2:

تنتج إحدى الورشات أقلاما. الكلفة الإجمالية $C(q)$ بِ DA لصنع كمية q من الأقلام هي:

$$C(q)=5q+100 \quad \text{حيث} \quad q>0$$

1. عين بدلالة q الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ بِ DA لإنتاج قلم.
2. أدرس نهاية C_M عند $+\infty$. أعط تفسيرا بيانيا و آخر اقتصاديا لهذه النتيجة.

حل التطبيق2:

1. الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ لإنتاج وحدة هي نسبة الكلفة الإجمالية $C(q)$ على الكمية q و منه:

$$C_M(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{5q}{q}+\frac{100}{q}=5+\frac{100}{q}$$

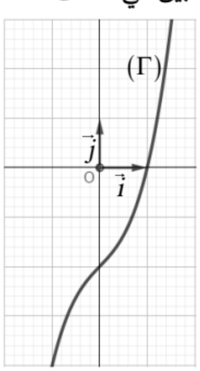
2. لدينا: $\lim\limits_{q\to+\infty}\dfrac{100}{q}=0$ و منه $\lim\limits_{q\to+\infty}C_M(q)=5$
3. التفسير البياني: المنحني الممثل للدالة C_M يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=5$.

التفسير الاقتصادي: عندما ترتفع الكمية المنتجة q بقدر كبير نلاحظ استقرار الكلفة المتوسطة عند $5\ DA$.

أنجز التمارين: 24-26-28-30 الصفحة{25}

تمرين بكالوريا 2019 م 1:

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3+x-2$ و (Γ) تمثيلها البياني كما هو مبيّن في الشكل .



بقراءة بيانية عين $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{x-1}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

– استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم (Δ).

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.4\,;-1.3[$.

5) ارسم (Δ) ثم المنحنى $\left(C_f\right)$.

تمرين بكالوريا 2021 ، م 1:

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\quad f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

1) أ . بيّن أنّ f دالة زوجية.

ب. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النّتيجتين هندسيا.

جـ. ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$.

ب. استنتج أنّ f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0\,;+\infty[$ ثمّ شكِّل جدول تغيّراتها.

3) أ . اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النّقطة التي فاصلتها 2

ب. جِدْ إحداثيات نقطتي تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل.

4) ارسم (Δ) ، $\left(T\right)$ و (C)

5) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\quad g(x)=\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x^2+1}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أنّ: من أجل كلّ x من $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ ، $g(x)=f(x)$

و من أجل كلّ x من $[-2;2]$: $g(x)=-f(x)$

ب. شكِّل جدول تغيّرات الدالة g

تمرين بكالوريا 2021 م 2:

الدّالة العددية f معرّفة على $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ بجدول تغيّراتها المقابل.

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كلّ حالة من الحالات التالية:

1) $y=-1$ هي معادلة للمستقيم المقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

2) معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة A ذات الفاصلة 1 يساوي 0

3) النقطة $B(3\,;1)$ تنتمي إلى (C)

4) $f(1442)<f(2021)$

ملاحظات حول سير الحصة:..

الاشتقاقية

الدالة f	مجالات قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة f'
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$

$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax+b$
$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^2$
$x \mapsto anx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax^n \ (n \in \mathbb{N})$
$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto -\frac{na}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{a}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$
$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$
$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$u'+v'$	يجب أخذ شروط كل دالة بعين الاعتبار	$u+v$
$u'.v+u.v'$		$u.v$
$\lambda u'$		$(\lambda \in \mathbb{R})\ \lambda u$
$-\frac{au'}{u^2}$		$\frac{a}{u}$
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$		$\frac{u}{v}$
$x \mapsto au'(ax+b)$		$x \mapsto u(ax+b)$

الدالة المشتقة f'	الدالة f
	$f(x) = -4$
	$f(x) = 2x-5$

	$f(x)=x^3+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$
	$f(x)=-4x^2-\frac{2}{x}$
	$f(x)=(x^3+x+1)\sqrt{x}$
	$f(x)=-7x^3+4x^2+3x-2$
	$f(x)=\frac{3x+5}{2x-4}$
	$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$
	$f(x)=\sqrt{2x-6}$
	$f(x)=\cos(-4x+3)$
	$f(x)=3+\frac{1}{2x+1}$
	$f(x)=\left(2x^2-3x\right)^3$
	$f(x)=\sqrt{x^2-4x}$
	$f(x)=3+x\cos(x)+x\sqrt{x}$
	$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

النهايـــــات

التمرين رقم01:

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 3x + 1 =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 - 5x + 1 =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x - x^2 + 2 =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 4 =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} -x^4 + 2x^3 - x =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^7 - 15x^5 =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 1}{2x - 3} =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{2x^3 + 5x^2 - 1} =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{-x^2 - x - 3} =$

التمرين رقم02:

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{2x}{x+1} =$		قيم x	
		إشارة $x+1$	
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 5} \dfrac{-2x-10}{x-5} =$		قيم x	
		إشارة $x-5$	
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} 1 - \dfrac{2}{x-1} =$		قيم x	
		إشارة $x-1$	
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \dfrac{3x+2}{-x+2} =$		قيم x	
		إشارة $-x-2$	
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \dfrac{x+2}{x^2-9} =$		قيم x	
		إشارة x^2-9	
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \dfrac{3x+7}{x^2-4} =$		قيم x	
		إشارة x^2-4	

التمرين رقم03:

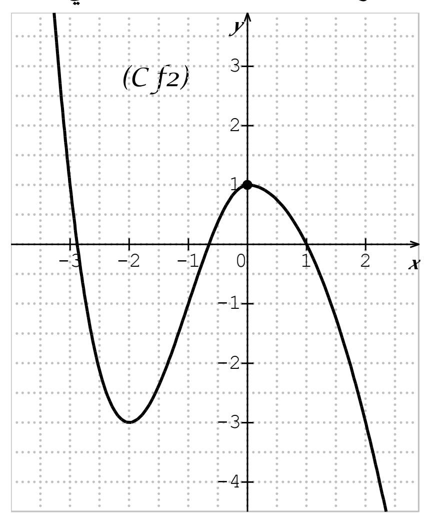
أحسب النهايات التالية:

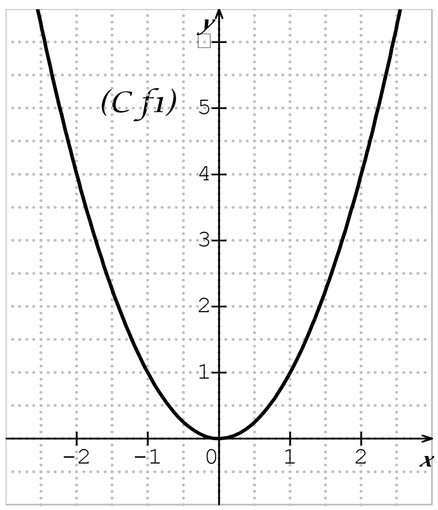
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x+2-\dfrac{1}{x}\right) =$
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \left(1-x-\dfrac{1}{x+1}\right) =$
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \left(-2x+1+\dfrac{3}{x}\right) =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2+\dfrac{2}{x}\right) =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2-1\right)\left(2-x^3\right) =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x+3-\dfrac{1}{x-1} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x-\dfrac{1}{x-1} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} -2x+3+\dfrac{x}{x^2-1} =$

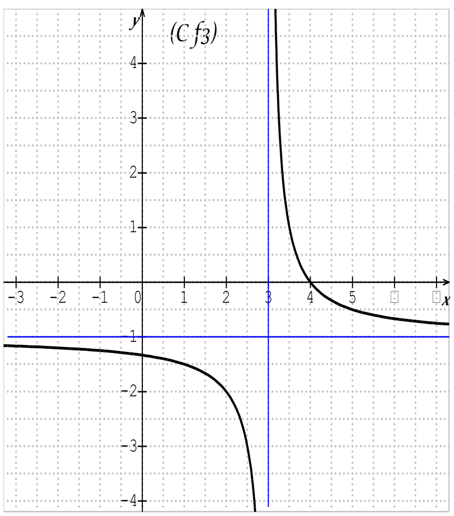
التمرين رقم04:

f_5, f_4, f_3, f_2, f_1 دوال عددية معرفة بتمثيلاتها البيانية كما هو موضح في الأشكال التالية:

المطلوب: باستعمال التمثيل البياني شكل جدول تغيرات لكل دالة.

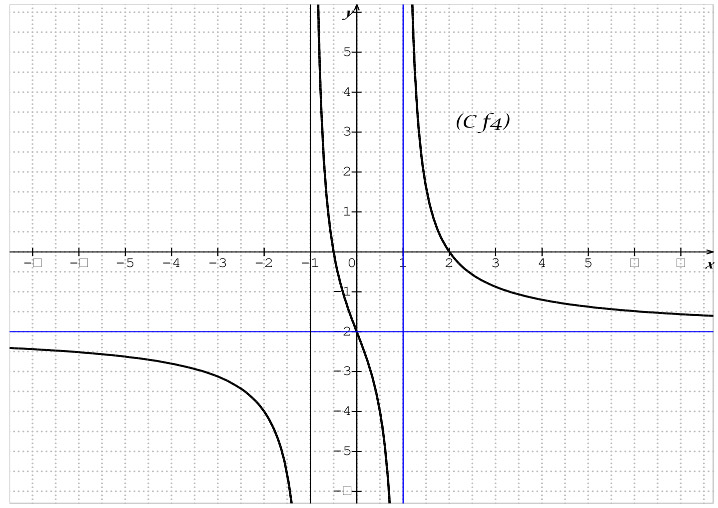


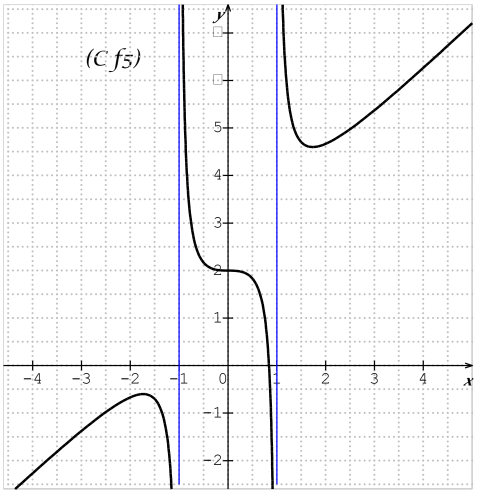




$D_{f_1} = \mathbb{R}$ $\qquad$ $D_{f2} =]-\infty;+\infty[$ $\qquad$ $D_{f3} = \mathbb{R}-\{3\}$

$D_{f_4} = \mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\qquad$ $D_{f_5} =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$





التمرين رقم05:

أكمل حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريف D_f في كل حالة :

(1 $f(x)=2x-1+\frac{x+3}{x-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

(2 $f(x)=\frac{x^2-3}{x+2}$ ، $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

(3 $f(x)=\frac{-2x+1}{3-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

(4 $f(x)=\frac{x^2+1}{(2x-1)^2}$ ، $D_f=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

(5 $f(x)=\frac{5-2x^2}{x^2-4}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

المستقيمات المقاربة

التمرين رقم06:

فسر النتائج التالية هندسيا:

(1 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ (2 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ (3 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\frac{3}{4}$ (4 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=4$ (5 $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-\infty$ (6 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$ (7

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ (8 $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$ (9 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1$

التمرين رقم07:

أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها ثم فسر النتيجة هندسيا في كل حالة من الحالات التالية:

(1 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ (2 $f(x)=1-\frac{x+2}{x^2}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$ (3 $f(x)=\frac{3x+2}{x-2}-1$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

(4 $f(x)=1-\frac{2}{1-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ (5 $f(x)=\frac{1-2x}{x-2}$ ، $D_f=]2;+\infty[$

التمرين رقم08:

باستعمال جدول تغيرات الدالة f عين كل من: ،① النهايات، ② معادلات المستقيمات المقاربة.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	-1

④ في معلم متعامد و متجانس،ارسم تمثيل بياني ممكن (C) للدالة f و كذا المستقيمات و المقاربة لـ (C).

التمرين رقم09:

فسر هندسيا: ① $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-3)]=0$ ، ② $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(\frac{1}{4}x+5)\right]=0$ ، ③ $\lim_{x\to-\infty}[h(x)-(-x+1)]=0$

④ $\lim_{x\to-\infty}[k(x)+3x-2]=0$ ، ⑤ $\lim_{x\to-\infty}\left[u(x)+\frac{3}{2}x\right]=0$ ، ⑥ $\lim_{x\to+\infty}[v(x)+5x-4]=0$

بين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لمنحنى الدالة f $-\infty$ $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{x^2+5x-1}{x}$; $(\Delta): y=x+5$ (2 $f(x)=x-1+\frac{2}{x}$; $(\Delta): y=x-1$

3) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$; $(\Delta): y=x+1$ (4 $f(x)=x+1+\frac{x}{x-2}$; $(\Delta): y=x+2$

التمرين رقم10:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-2}$

1) عين a,b,c بحيث من أجل كل $x\in D_f$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$
2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.
3) بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ).
4) أدرس وضعية (C_f) مع (Δ). 5) عين إحداثي A نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين.
6 بين أن A مركز تناظر للمنحنى (C_f)
7 أدرس اتجاه تغيرات f ثم أنجز جدول تغيراتها.
8 أنشئ (C_f) و المستقيمات المقاربة.

التمرين رقم09:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=x-3+\frac{1}{4-4x}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$ فسر هذه النتيجة هندسيا.
2) أحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]$ ، $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]$ فسر هذه النتيجة هندسيا.
3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المسقيم المقارب المائل. أرسم (C_f) في م م و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

التمرين رقم10:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-3}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
2) عين الأعداد الحقيقية c,b,a بحيث من أجل كل $x\in D_f$ فإن: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$
3) استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعيته بالنسبة إلى (C_f)
4) عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.
5) أرسم (C_f) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

التمرين رقم11:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{1-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) بين أن $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x)=ax+b+\frac{c}{1-2x}$ بحيث c,b,a أعداد الحقيقية يطلب تعيينها.
2) أحسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها.
3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغيرات الدالة f واكتب جدول تغيراتها.
4) بين أن التمثيل البياني (C_f) للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ).
5) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ)
6) أرسم كلا من المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f) في نفس المعلم.

التمرين رقم12:

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بين أن الدالة f تكتب على الشكل : $f(x)=1+\frac{a}{x+1}$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه.
2) أحسب نهايات f عند $(+\infty),(-\infty)$ و (-1) ، ثم فسر النتائج المحصل عليها بيبانيا.
3) أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f.
4) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 3.
5) عين إحداثيي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملي محور الإحداثيات.
6) أرسم كلا من (Δ) و (C_f)