

ملف الدوال العددية

تأمينه مقترحة مع الحلول وطرائق مهمة

التحضير الجيد للبكالوريا
BAC 2019

وفقكم الله



كتابة الأستاذ :

بلقاسم عبد الرزاق

الموسم الدراسي : 2018 - 2019

الأسئلة الشائعة في دراسة الدوال وكيفية الإجابة عليها

1، السلوك التقاربي / الوضع النسبي لمنحني

السؤال	الإجابة
فسريانيا : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $x = a$
فسريانيا : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الترتيب معادلته $y = b$
فسريانيا : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = ax + b$
بين أن المستقيم $y = ax + b$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) .	نبين أن : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته	<ul style="list-style-type: none"> • إذا كان : $f(x) = ax + b + g(x)$ ، يكفي أن نبين : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$. ومعادلته هي : $y = ax + b$. • وإذا لم يكن ذلك نعين العددين a و b من \mathbb{R} كما يلي : $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) \text{ و } a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$
أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = ax + b$. <u>نطبق نفس الإجابة على السؤال</u> : أدرس وضعية المنحنيين (C_f) و (C_g) بوضع : $D(x) = f(x) - g(x)$	ندرس إشارة الفرق : $D(x) = f(x) - y$: <ul style="list-style-type: none"> • $D(x) > 0$ معناه أن : (C_f) يقع فوق (Δ) . • $D(x) < 0$ معناه أن : (C_f) يقع تحت (Δ) . • $D(x) = 0$ معناه أن : (C_f) يقطع (Δ) .
فسريانيا : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$	(C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $\pm\infty$.

خاص بشعبي الرياضي والتقني رياضي

2، عناصر تناظر منحنى / شفعية دالة

السؤال	الإجابة
بين أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)	يكفي أن نبين : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$.
بين أن : $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$ ، ماذا تستنتج ؟ .	بعد الحساب نستنتج أن (C_f) متناظر بالنسبة لـ $\Omega(\alpha; \beta)$
بين أن المستقيم $x = \alpha$: محور تناظر للمنحنى (C_f)	يكفي أن نبين : $f(2\alpha - x) = f(x)$.
بين أن : $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن : المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f)
بين أن f دالة فردية	نبرهن أن : $f(-x) = -f(x)$
بين أن f دالة زوجية	نبرهن أن : $f(-x) = f(x)$
بين أن : $f(-x) + f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن : f دالة فردية ، ومبدأ المعلم مركز تناظر لـ (C_f)
بين أن : $f(-x) - f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن f دالة زوجية ، و (C_f) متناظر بالنسبة لمحور الترتيب
بين أن : $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن : (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}\right)$
بين أن : $f(\alpha - x) - f(x) = \beta$ ، ماذا تستنتج ؟ .	نستنتج أن : (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $x = \frac{\alpha}{2}$

3) إشارة دالة / مبرهنة القيم المتوسطة

<ul style="list-style-type: none"> • يعطى لك المنحني (C_f) ممثلا في معلم . • حل بيانيا المعادلة $f(x) = 0$ • إستنتج إشارة $f(x)$. 	<ul style="list-style-type: none"> • حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل • بالنسبة للإشارة : المجالات التي يكون فيها (C_f) تحت محور الفواصل فإن $(f(x) < 0)$ ، والمجالات التي يكون فيها (C_f) فوق محور الفواصل فإن $(f(x) > 0)$.
أحسب $f(\alpha)$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.	نجد $f(\alpha) = 0$ ثم نحدد المجالات : $f(x)$ إما موجبة أو سالبة
بين أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $a \leq \alpha \leq b$	<ul style="list-style-type: none"> • أولا : نبين أن f مستمرة ورتيبة على المجال $[a; b]$. • ثانيا : نحسب كلا من $f(a)$ و $f(b)$ ثم نبين أن k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، وعليه يجد α من المجال $[a; b]$ يحقق : $f(x) = k$
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $\alpha \in [a; b]$ أو بصيغة أخرى : بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .	<ul style="list-style-type: none"> • نبين أن f مستمرة ورتيبة على المجال $[a; b]$. • نحسب $f(a)$ و $f(b)$ ، ثم نجد : $f(a) \times f(b) < 0$. ومنه يوجد α وحيد من المجال $[a; b]$ يحقق : $f(x) = 0$.

4) العدد المشتق وتفسيره الهندسي

السؤال	الإجابة
فسر مايلي : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L$ أو : $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = L$ ، (L ثابت حقيقي)	<ul style="list-style-type: none"> • الدالة f تقبل الاشتقاق عند a ، و $f'(a) = L$. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ أي : L .
فسر مايلي : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = 0$.	<ul style="list-style-type: none"> • الدالة f تقبل الاشتقاق عند a ، و $f'(a) = 0$. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .
فسر مايلي : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = \pm\infty$	<ul style="list-style-type: none"> • الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند a . • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا (أو نصف مماس) موازي لحامل محور الترتيب معادلته $x = a$.
فسر مايلي : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L_1$ و : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L_2$ ، حيث $(L_1 \neq L_2)$	<ul style="list-style-type: none"> • الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند a . • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ نصفي مماسين معامل توجيههما L_1 و L_2 على الترتيب ، وتسمى النقطة A نقطة زاوية .

5) المماسات

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ، ثم نحسب كلا من $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ونعوض في المعادلة.
أكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0	أي نبحث عن الفاصلة x_0 وذلك بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ، ثم نكتب معادلة المماس عند x_0 .
عين بيانيا العدد المشتق: $f'(x_0)$. <u>ملاحظة:</u> معامل توجيه المماس $= f'(x_0)$.	نحسب معامل التوجيه: $f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ ، حيث النقطتين A و B من المماس .
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها a ؟	نبحث عن الفاصلة x_0 بحل المعادلة $f'(x) = a$ ، أي عدد حلول المعادلة هي عدد المماسات التي معامل توجيهها a
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$: (d) ؟	نحل المعادلة: معامل توجيه $(d) = f'(x) = a$ أي $f'(x) = a$. إذا وجدنا حلول نقول يوجد مماسات لـ (C_f) موازية لـ (d)
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(\alpha, \beta)$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$. عدد حلول المعادلة تمثل عدد المماسات .
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$: (d) ؟ . (في معلم متعامد ومتجانس) .	نبحث عن x_0 بحل المعادلة: $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ ، a هو معامل توجيه (d) . وعدد الحلول يمثل عدد المماسات .

6) أحيانا تعطى لنا عبارة الدالة $f(x)$ بثوابت مجهولة (a, b, c, \dots) ويطلب منا تعيينها

علما أن عدد المعطيات المباشرة وغير المباشرة تكون بعدد الثوابت

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت (a, b, c, \dots)
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0, y_0)$ يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل ، (أو يقبل ذروة في النقطة $A(x_0, y_0)$.	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$ ثم نعين الثوابت المجهولة .
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = mx + k$.	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$.	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

7) رسم منحنى (C_g) انطلاقاً من المنحنى (C_f)

إذا كان :	فإن :
$g(x) = -f(x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x) = f(x)$	g دالة زوجية، ولما $x \geq 0$ يكون (C_g) منطبقاً على (C_f) .
$g(x) = f(x) $	<ul style="list-style-type: none"> (C_g) ينطبق على (C_f) في المجالات التي تكون فيها f موجبة. (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى (xx') في المجالات التي تكون فيها f سالبة.

بالتوفيق لجميع طلبتنا الأعزاء في بكالوريا 2019

الأستاذ : بلقاسم عبد الرزاق

دراسة دالة عددية رقم 01

الجزء الأول :

- لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = x^4 - 4x - 3$.
- (1) أدرس تغيرات الدالة g (تحسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$) .
 - (2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين بالضبط α و β ، حيث : $\alpha < 0 < \beta$.
 ب) تحقق أن : $-0,69 < \alpha < -0,7$ و $1,78 < \beta < 1,79$.
 ج) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني :

- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته $(2cm)$.
- (1) عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .
 - (2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية : a, b, c, d, e حيث : $f(x) = ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$ و $(x \neq 1)$.
 ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلته .
 ج) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
 - (3) أ) بيّن أنه من أجل كل $x \neq 1$ يكون : $f'(x) = \frac{x^2 \times g(x)}{(x^3 - 1)^2}$.
 ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 ج) أعط حصرا لكل من : $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.
 - (4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .
 - (5) أنشئ كلا من المماس (T) و (Δ) والمنحني (C_f) .
 - (6) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $h(x) = \frac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$.
 أ) أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
 ب) اشرح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحني الممثل للدالة h ، إنطلاقا من المنحني (C_f) .
 ج) أنشئ المنحني (C_h) في نفس المعلم السابق .

الجزء الأول :

لدينا الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = x^4 - 4x - 3$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$.

- الدالة المشتقة : الدالة g قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 4x^3 - 4$.
تكون : $4x^3 - 4 \geq 0$ إذا كان : $x^3 \geq 1$ ، ومنه : $x \geq 1$. (أي تكون : $g'(x) \leq 0$ إذا كان : $x \leq 1$) .
- جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	$+\infty$	-6	$+\infty$

(2) أ) على المجال $]-\infty; 1]$ الدالة g مستمرة ورتيبة ، وصورة هذا المجال هي $[-6; +\infty[$ و $0 \in [-6; +\infty[$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ينتمي إلى $]-\infty; 1]$.

بالمثل : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد β من $]1; +\infty[$.

(ب) نحسب : $g(-0,7) = \dots$ و $g(-0,69) = \dots$ ، نجد أن : $g(-0,69) < 0 < g(-0,7)$.
إذن : $-0,7 < \alpha < -0,69$.

نفس الشيء بالنسبة إلى β ، سنجد أن : $1,78 < \beta < 1,79$.

(3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	0	α	β	$+\infty$
$g(x)$	+	○	-	+

الجزء الثاني :

لدينا f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$.

(1) حساب النهايات :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3} = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^3} = -\infty$

· $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = -\infty$

(2) أ) لدينا : $f(x) = ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$ ، أي : $f(x) = \frac{ax^4 - ax + bx^3 - b + cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \\ e = 1 \end{cases}$ أي : $f(x) = x + \frac{x + 1}{x^3 - 1}$ ، ومنه :

(ب) نعلم أنّ:
$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{x+1}{x^3-1} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^3-1} = 0 \end{cases}$$
، إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

(ج) الوضعية: ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ ، أي: $f(x) - x = \frac{x+1}{x^3-1}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	—	○	+	+
x^3-1	—	—	○	+
$f(x)-y$	+	—	+	+
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)
	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(-1; 1)$			

(3) الدالة المشتقة: الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل كل x يختلف عن 1 ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{x^2 \times [4x(x^3-1) - 3(x^4+1)]}{(x^3-1)^2} \text{، أي: } f'(x) = \frac{4x^3(x^3-1) - 3x^2(x^4+1)}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 \times g(x)}{(x^3-1)^2} \text{، ومنه: } f'(x) = \frac{x^2(x^4-4x-3)}{(x^3-1)^2} \text{، أي: } f'(x) = \frac{x^2(4x^4-4x-3x^4-3)}{(x^3-1)^2}$$

x	$-\infty$	α	0	1	β	$+\infty$
x^2	+	+	+	+	+	+
$g(x)$	+	—		—	—	+
$x^2 \times g(x)$	+	—	—	—	—	+

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة:

$x^2 \times g(x)$ ، وهي موضحة في الجدول المقابل

x	$-\infty$	α	1	β	$+\infty$
$f'(x)$		○		○	
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

جدول
التغيرات

ج) حصرا كل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

1) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $-0,69 < \alpha < -0,7$ ، أي : $0,23 < \alpha^4 < 0,240$ (1) ، أي : $1,23 < \alpha^4 + 1 < 1,240$ ،
و $-0,33 < \alpha^3 < -0,34$ ، أي : $-1,33 < \alpha^3 - 1 < -1,34$ ، أي : $\frac{1}{-0,33} < \frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{-1,34}$ ،

أي : (2) $\frac{1}{0,34} < -\frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{1,33}$

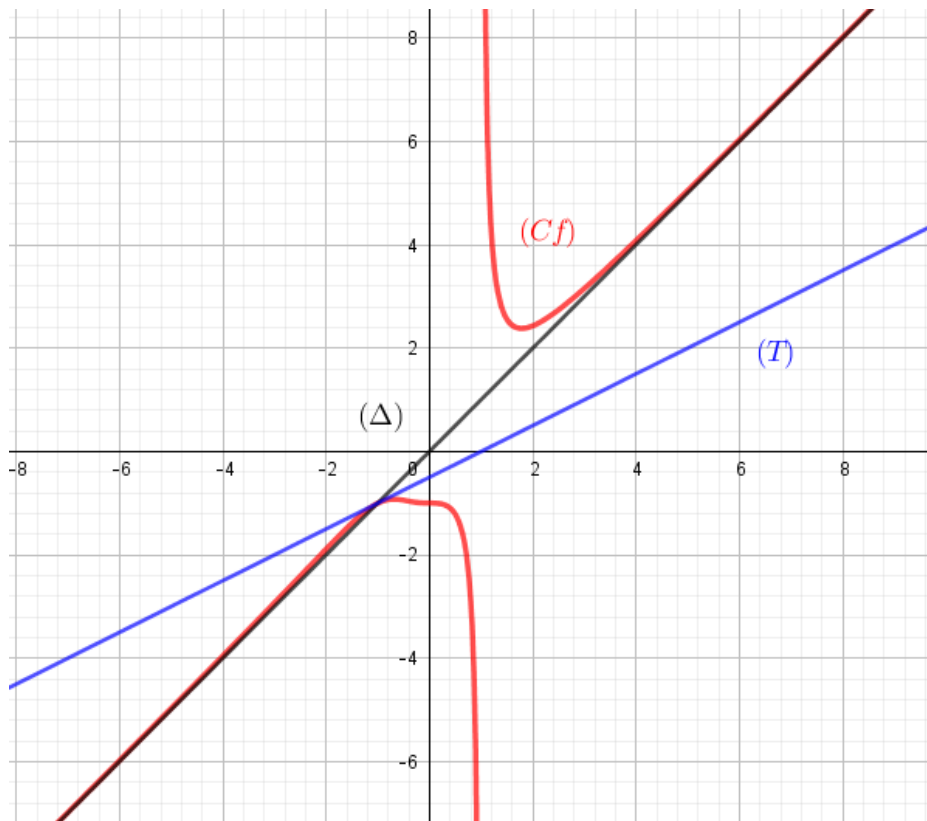
بضرب (1) و (2) نجد : $\frac{1,23}{0,34} < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1,24}{1,33}$ ، أي : $0,92 < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < 0,93$ ،

ومنه : $-0,93 < \frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < -0,92$ ، إذن : $-0,93 < f(\alpha) < -0,92$.

2) حصر $f(\beta)$: نفس الطريقة مثل حصر $f(\alpha)$ ، ونجد أن : $2,33 < f(\beta) < 2,42$.

4) معادلة المماس : $(T) : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ ، ومنه : $(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

5) الإنشاء :

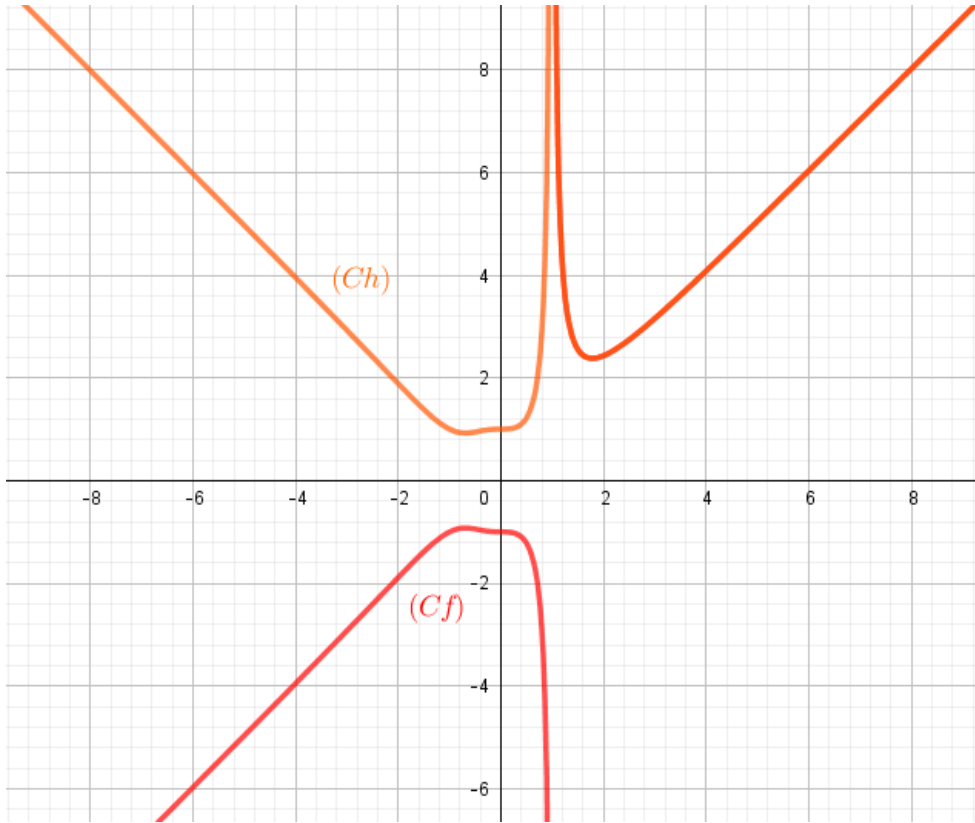


6) لدينا : $h(x) = \frac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$.

أ) كتابة الدالة h دون رمز القيمة المطلقة :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = f(x) \dots \dots \dots (x > 1) \\ -\frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = -f(x) \dots \dots \dots (x < 1) \end{cases}$$

- ب) (C_h) ينطبق على (C_f) على $]1; +\infty[$.
- نظير (C_h) بالنسبة إلى محور الفواصل على $] -\infty; 1[$.
- ج) الإنشاء:



كتاب الأستاذ: **ب. ع.**

دراسة دالة عديّة رقم 02

- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، وحدته $(5.cm)$.
- نعتبر المنحنى (C) الذي معادلته في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ هي: $x(x^2 + y^2) + y^2 - 3x^2 = 0$.
- (1) نفرض الدالة f المعرفة على $]-1; 3[$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}$.
- ❖ بين أن المنحنى (C) هو اتحاد المنحنيين (C_1) و (C_2) الممثلين للدالتين f و $-f$ على الترتيب.
- (2) (أ) عيّن كلا من: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج؟
(ب) فسّر النتائج هندسياً.
- (3) أحسب: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ ، ماذا تستنتج؟
- (4) (أ) بين أنه من أجل كل $x \in]-1; 0[\cup]0; 3[$ يكون: $f'(x) = \frac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$.
(ب) استنتج إشارة $f'(x)$.
(ج) أحسب: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
(د) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .
- (5) أنشئ (C_1) ، ثم أكمل إنشاء المنحنى (C) .

(1) (C) هو المنحني الذي معادلته : $x(x^2 + y^2) + y^2 - 3x^2 = 0$ ، أي : $x^3 + xy^2 + y^2 - 3x^2 = 0$ ، أي : $y^2(x+1) = 3x^2 - x^3$ ، ومنه : $y^2 = \frac{3x^2 - x^3}{x+1}$ ، إذن : $y = \sqrt{\frac{3x^2 - x^3}{x+1}}$ أو $y = -\sqrt{\frac{3x^2 - x^3}{x+1}}$ ، أي : $y = \sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}$ أو $y = -\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}$ ، ومنه : $y = f(x)$ أو $y = -f(x)$ مع $x \in]-1; 3]$.
و عليه نقول أن (C) هو اتحاد المنحنيين (C_1) و (C_2) الممثلين للدالتين f و $-f$ على الترتيب .
(2) أ) تعيين النهايات :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{3-x}{x+1}} = \sqrt{3} (\diamond) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{3-x}{x+1}} = -\sqrt{3} (\diamond) \end{aligned}$$

نستنتج أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0 .

(ب) التفسير الهندسي : نقول أن المنحني (C_1) يقبل عند النقطة $O(0;0)$ نصفي مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيههما $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ على الترتيب ، والنقطة O هي نقطة زاوية .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}} - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} x \times \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{x-3} \quad (3) \\ \text{ومنّه ،} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} x \times \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{-1}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} x \times \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{-1}{(\sqrt{3-x})^2} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{3-x})} = -\infty \begin{cases} -3 \\ 0^+ \end{cases} \end{aligned}$$

(\diamond) نستنتج أن الدالة f لا تقبل الإشتقاق على يسار 3 والمنحني (C_1) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $(3;0)$.
(4) حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{(6x - 3x^2)(x+1) - (3x^2 - x^3)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x^2 - x^3}{x+1}}} = \frac{6x^2 + 6x - 3x^3 - 3x^2 - 3x^2 + x^3}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{x+1}{3x^2 - x^3}} \\ \text{أي ،} \quad f'(x) &= \frac{-2x^3 + 6x}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2 - x^3}} = \frac{2(-x^3 + 3x)}{(\sqrt{x+1})^4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2 - x^3}} \\ f'(x) &= \frac{-x^3 + 3x}{(\sqrt{x+1})^3} \times \frac{1}{\sqrt{3x^2 - x^3}} = \frac{-x^3 + 3x}{(x+1)\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{\sqrt{3x^2 - x^3}} = \frac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{(x+1)(3x^2 - x^3)}} \end{aligned}$$

ومنه : $f'(x) = \frac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$ ، وهو المطلوب .

(ب) نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(3x - x^3)$:

لدينا : $3x - x^3 = x(3 - x^2) = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$. سنلخص الإشارة في الجدول التالي :
 (❖) ممكن دراسة الإشارة على \mathbb{R} ، ثم في جدول التغيرات نأخذ الإشارة فقط على D_f .

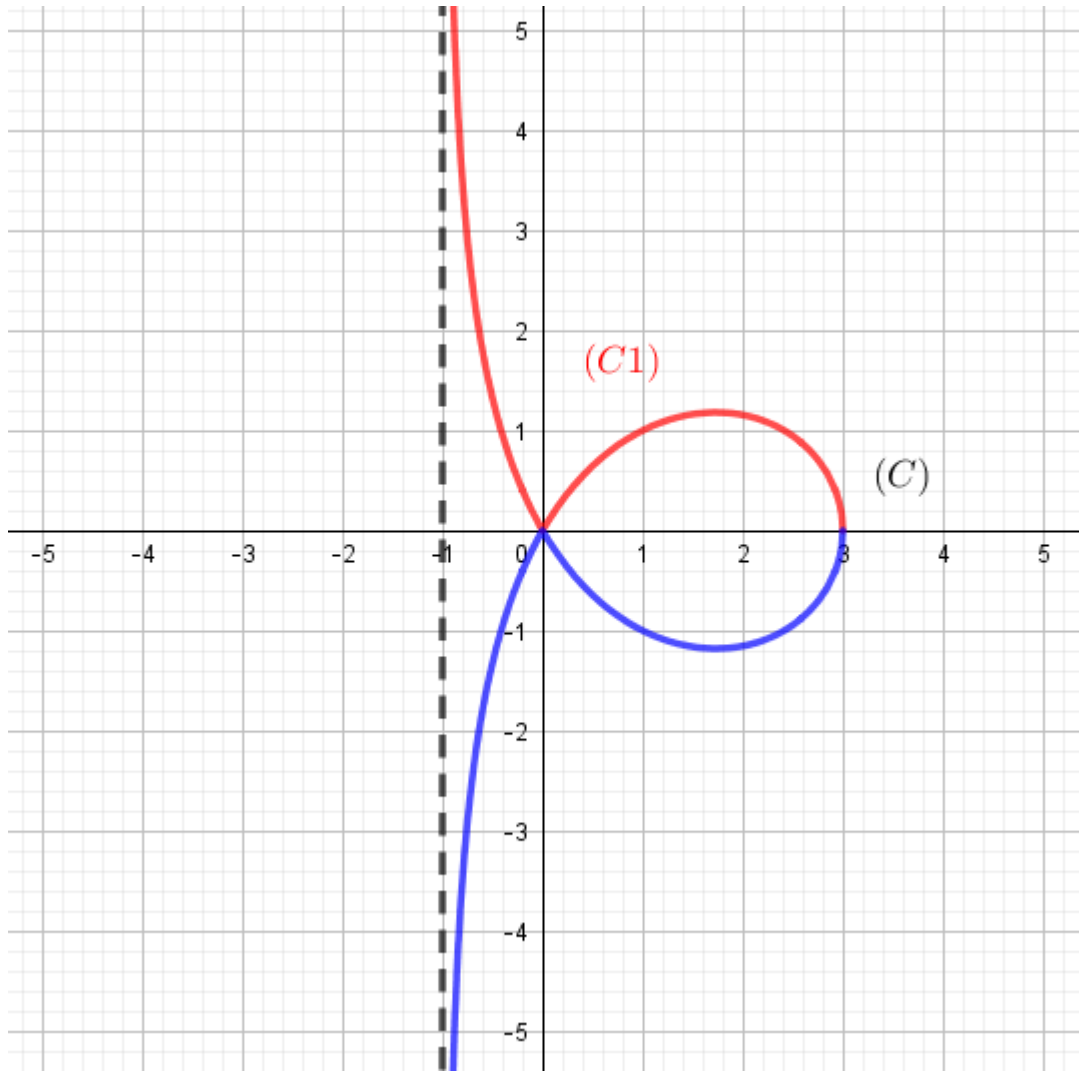
x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x			○		
$3 - x^2$	-	○	+	○	-
$(3x - x^3)$	+	○	-	○	-

(ج) حساب النهاية :

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحني (C_1) .
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0^+$

(د) جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	0	$\sqrt{3}$	3
$f'(x)$	-	+	○	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$1,5$	0



كتابة الأستاذ : ب. ع

دراسة دالة عددية رقم 03

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{-x^3 - 2x^2 + 7x + 12}{(x+2)^2}$.

- و ليكن (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أ) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .
 ب) فسّر هندسيا النهاية عند -2 .
- (2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية : a, b, c, d بحيث من أجل كل x يختلف عن -2 تكون :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2} .$$

- ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) بجواري $+\infty$ و $-\infty$.
 ج) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل $x \neq -2$ تكون : $f'(x) = \frac{(-x-1)(x^2+5x+10)}{(x+2)^3}$.

ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(4) أ) أحسب : $f(-3)$ ، ثم حدّد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

ب) حدّد أيضا نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الترتيب .

(5) أنشئ المنحني (C_f) .

(6) m عدد حقيقي . عيّن قيم m حتى يكون للمعادلة : $f(x) = m$ ثلاث حلول سالبة .

(7) g هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = f(|x|)$.

أ) بيّن أن الدالة g زوجية .

ب) اشرح كيف يتم إنشاء المنحني (C_g) انطلاقاً من المنحني (C_f) .

ج) أنشئ المنحني (C_g) في نفس المعلم السابق .

(1) حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \quad (\diamond)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \quad (\diamond)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \quad (\diamond), \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \quad (\diamond)$$

(ب) التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = -2$.

$$(2) \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2} = \frac{ax(x+2)^2 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d}{(x+2)^2} \quad \text{أي :}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + 4ax^2 + 4ax + bx^2 + 4bx + 4b + cx + 2c + d}{(x+2)^2} \quad \text{بالمطابقة نجد :}$$

$$f(x) = -x + 2 + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} \quad \text{إذن :} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} \quad \text{و منه :} \quad \begin{cases} a = -1 \\ 4a + b = -2 \\ 4a + 4b + c = 7 \\ 4b + 2c + d = 12 \end{cases}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} \right) = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = -x + 2 + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$$

إذن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) معادلته : $y = -x + 2$: بجواري $-\infty$ و $+\infty$.
(ج) دراسة الوضعية :

$$f(x) - (-x + 2) = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{3x+4}{(x+2)^2} \quad \text{ندرس إشارة الفرق :}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$\frac{3x+4}{(x+2)^2}$	—	—	○	+
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $(-\frac{4}{3}; \frac{10}{3})$	(C_f) يقع فوق (Δ)

(3) حساب $f'(x)$:

$$: \text{أي} , f'(x) = \frac{(-3x^2 - 4x + 7)(x + 2)^2 - 2(x + 2)(-x^3 - 2x^2 + 7x + 12)}{(x + 2)^4}$$

$$: \text{أي} , f'(x) = \frac{(x + 2) \left[(-3x^2 - 4x + 7)(x + 2) - 2(-x^3 - 2x^2 + 7x + 12) \right]}{(x + 2)^4}$$

$$: \text{أي} , f'(x) = \frac{-3x^3 - 6x^2 - 4x^2 - 8x + 7x + 14 + 2x^3 + 4x^2 - 14x - 24}{(x + 3)^3}$$

$$(-x - 1)(x^2 + 5x + 10) = -x^3 - 6x^2 - 15x - 10 : \text{بملاحظة أن} , f'(x) = \frac{-x^3 - 6x^2 - 15x - 10}{(x + 3)^3}$$

$$\text{ومنه} : f'(x) = \frac{(-x - 1)(x^2 + 5x + 10)}{(x + 2)^3} \text{ وهو المطلوب.}$$

(ب) ❖ جدول الإشارة :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$-x - 1$	+	+	○	-
$x^2 + 5x + 10$	+	+	+	+
$(x + 2)^3$	-	○	+	+
$f'(x)$	-	■	○	-

ملاحظة : (إشارة $(x + 2)^3$ من إشارة $x + 2$ ، وإشارة $x^2 + 5x + 10$ هي نفس إشارة a لأن $\Delta < 0$) .
❖ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	■	○	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	4 ↗	$-\infty$

(4) (أ) $f(-3) = 0$ ، لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة : $f(x) = 0$ ،
أي : $-x^3 - 2x^2 + 7x + 12 = 0$ ، بما أن : $f(-3) = 0$ فإن -3 هو جذر لـ $(-x^3 - 2x^2 + 7x + 12)$ ،
إذن : $-x^3 - 2x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$ ، أي :
أي : $-x^3 - 2x^2 + 7x + 12 = ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c$

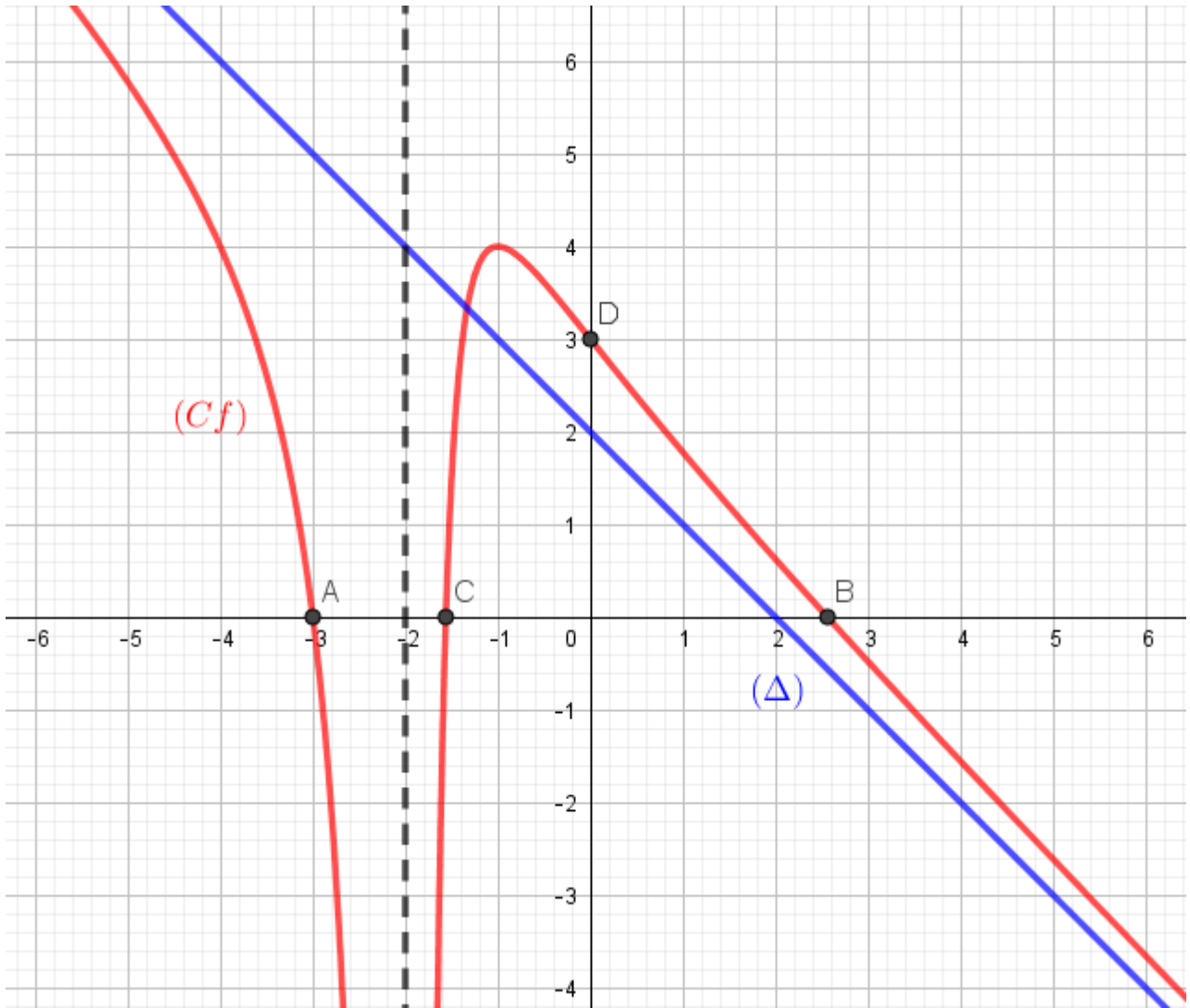
$$، \begin{cases} a = -1 \\ b + 3a = 1 \\ c = 4 \end{cases} \text{ : ومنه : } ، \begin{cases} a = -1 \\ b + 3a = -2 \\ c + 3b = 7 \\ 3c = 12 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد :}$$

$$. -x^3 - 2x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(-x^2 + x + 4) \text{ إذن :}$$

$$. x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{-2} \text{ و } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{-2} \text{ أي : } -x^2 + x + 4 = 0 \text{ أو : } \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \text{ إما :}$$

$$. \text{ ومنه : } (C_f) \text{ يقطع حامل محاور الفواصل عند : } A(-3;0) \text{ ، } B(\frac{1+\sqrt{17}}{2};0) \text{ و } C(\frac{1-\sqrt{17}}{2};0)$$

(ب) إيجاد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محاور الترتيب ، أي نحسب : $f(0) = 3$ ، ومنه النقطة : $D(0;3)$.
(5) الإنشاء :



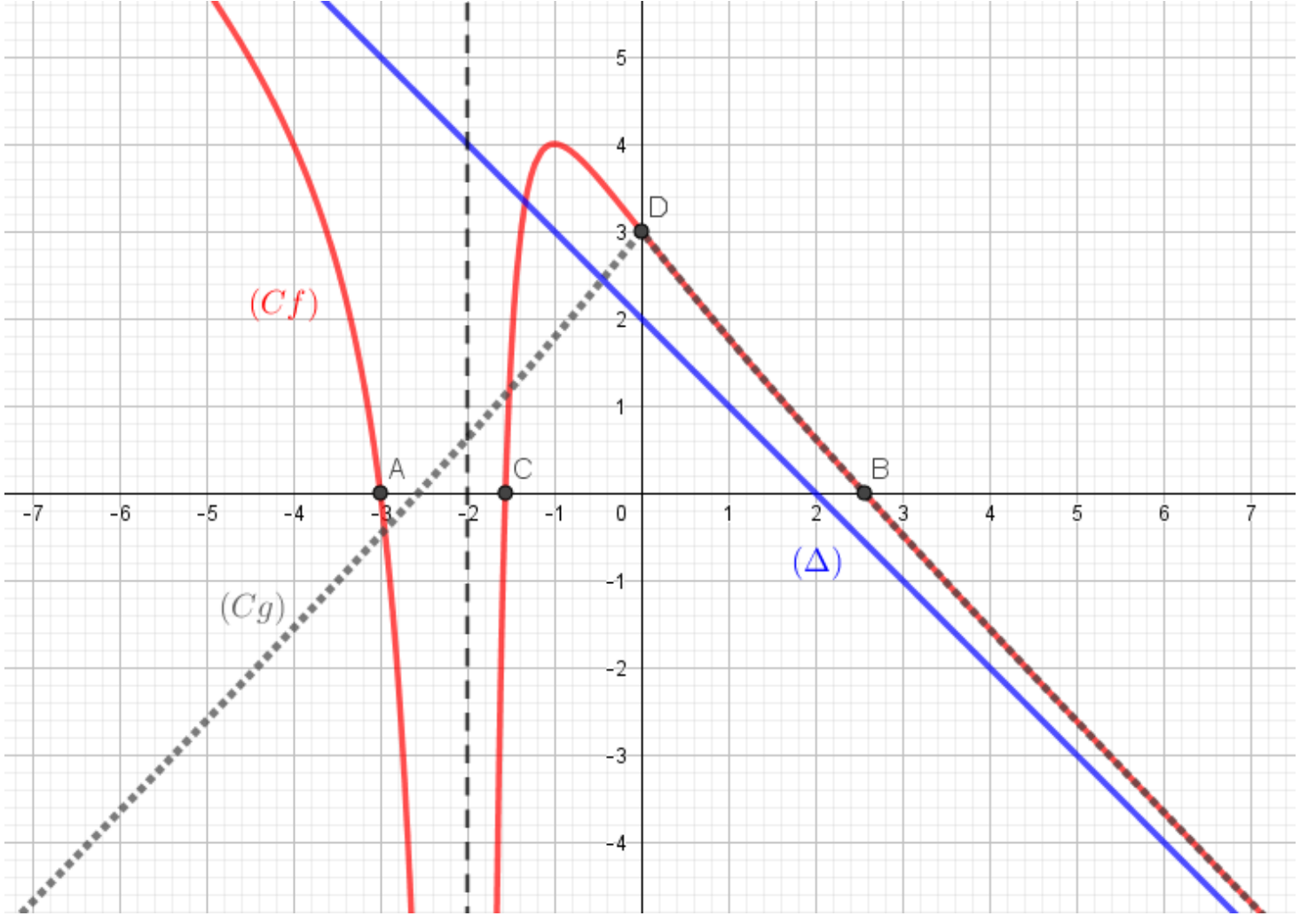
(6) المعادلة : $f(x) = m$ ، تقبل ثلاث حلول سالبة لما : $3 < m < 4$ ، (أنظر الإنشاء) .

7) لدينا : $g(x) = f(|x|)$.

أ) إثبات أن الدالة g زوجية : $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ ، إذن g زوجية .

ب) (❖) إذا كان : $x \geq 0$ فإن : $|x| = x$ ، ومنه : $g(x) = f(x)$ ، إذن : (C_g) ينطبق على (C_f) في المجال $[0; +\infty[$ (❖) ثم ننشئ (C_g) بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب لأن الدالة g زوجية .

ج) الإنشاء :



كتابة الأستاذ : ب. ع.

دراسة دالة عددية رقم 04

$$\cdot \begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \dots; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2} \dots; x > 0 \end{cases} \text{ نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي :}$$

- و ليكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ، ثم فسّر بياناً النتيجة عند $-\infty$.
- (2) أدرس إستمرارية الدالة f عند 0 .

- (3) أ) أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. ماذا يمكن القول بالنسبة للدالة f ؟ وما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة؟

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من $]-\infty; 0[$ تكون: $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 2x} \times (\sqrt{x^2 - 2x} - x + 1)}$ ،

و من أجل كل x من $]0; +\infty[$ تكون: $f'(x) = \frac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$.

ج) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

- (4) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

- (5) بيّن أنّ المنحني (C) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.

- (6) أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحني (C) .

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \dots; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2} \dots; x > 0 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \sqrt{x^2 - 2x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \sqrt{x^2 - 2x} \right] \times \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} \quad (\diamond)$$

$$(\sqrt{x^2} = -x; x \leq 0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x + x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 : \text{إذن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right]} = 1 \quad \text{ومنه :}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty \quad (\diamond)$$

(2) دراسة إستمرارية الدالة f عند 0 :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) \neq f(0) : \text{إذن : } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{(x-1)^3}{x^2} = -\infty \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

ومنه نقول أن الدالة f ليست مستمرة عند 0.

$$(3) \text{ حساب : } \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x + \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right]}{x} = -\infty$$

(\diamond) إذن : نقول أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0.

(\diamond) التفسير الهندسي : المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $O(0;0)$.

(ب) حساب $f'(x)$ على $]-\infty; 0[$:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{\sqrt{x^2-2x} + x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{\sqrt{x^2-2x} + x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \times \frac{\sqrt{x^2-2x} - (x-1)}{\sqrt{x^2-2x} - (x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - (x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x} \times \sqrt{x^2-2x} - x + 1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-2x} \times (\sqrt{x^2-2x} - x + 1)}$$

نلاحظ أنه من أجل $x \in]-\infty; 0[$ يكون $\sqrt{x^2-2x} \times \sqrt{x^2-2x} - x + 1 > 0$

و بالتالي ستكون : $f'(x) < 0$ ، أي أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; 0[$.

❖ حساب $f'(x)$ على $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \times x^2 - 2x \times (x-1)^3}{x^4} = \frac{x(x-1)^2 [3x - 2(x-1)]}{x^4} = \frac{x(x-1)^2 \times (x+2)}{x^4}$$

$$\text{ومنه : } f'(x) = \frac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$$

نلاحظ أنّه من أجل $]0; +\infty[$: $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) \geq 0$ ، (لأنّ : $f'(x)$ تنعدم من أجل $x = 1$).

ومنه : الدالة f متزايدة على $]0; +\infty[$.

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—		+	+
$f(x)$	1 ↘	0	↗ —	$+\infty$

توضيح مهم : الشيء الجديد بالنسبة للطلبة هو أنّ الدالة f معرفة عند 0 ، أي : $f(0) = 0$ ، لكن نهاية الدالة f على يمين 0 هي $-\infty$.

4) أ) نبين أنّ المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$ ، أي :

$$\text{أي : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-1)^3}{x^2} - (x-3) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1 - x^2(x-3)}{x^2}$$

$$\text{. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

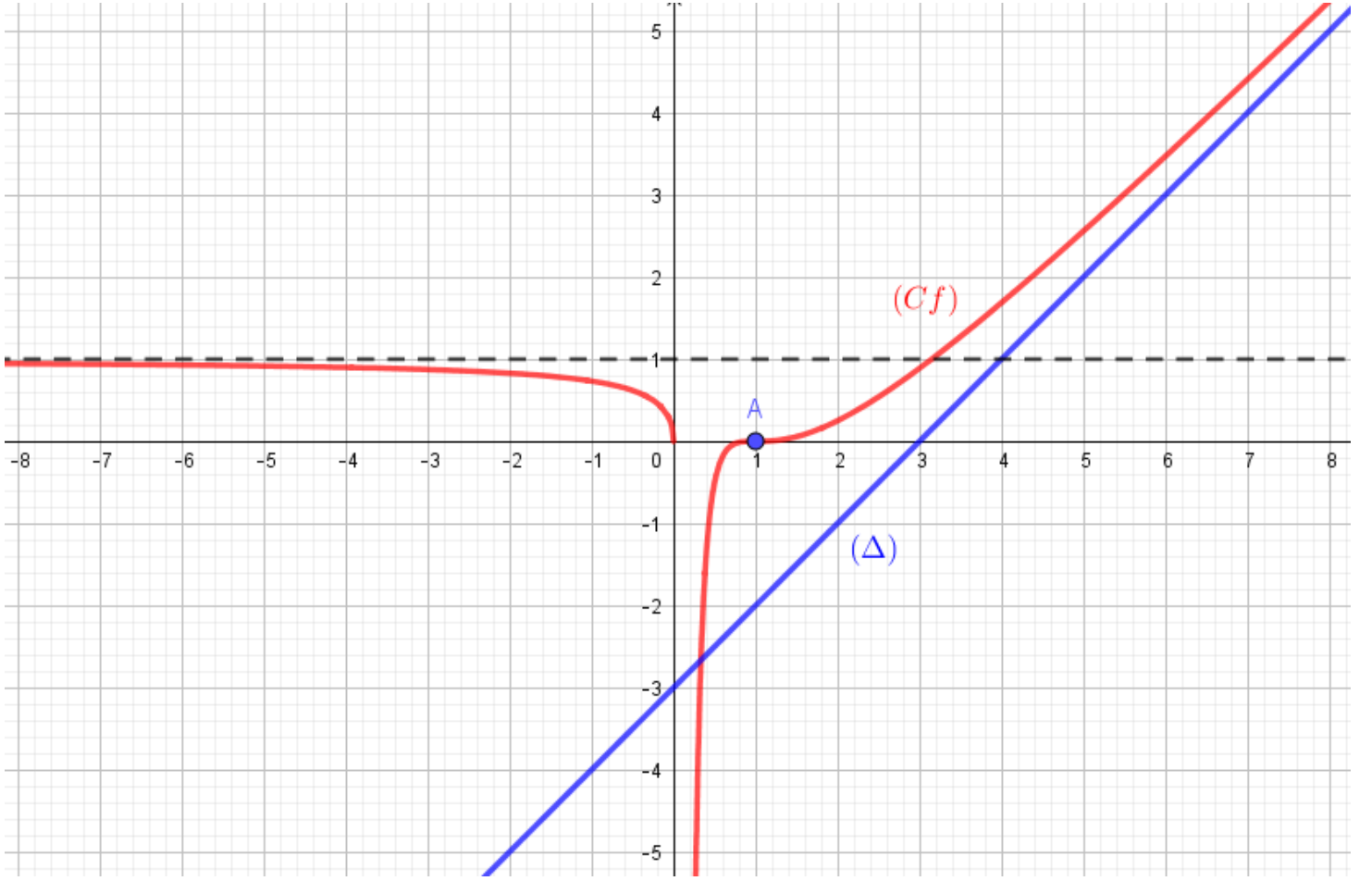
ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) الوضعية : أي ندرس إشارة $\frac{3x-1}{x^2}$ ، ومنه الإشارة من إشارة $3x-1$

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	—		+
الوضعية	(C) يقع تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ) عند النقطة $(\frac{1}{3}; -\frac{8}{3})$	(C) يقع فوق (Δ)

(5) نلاحظ من خلال جدول التغيرات للدالة f أن الدالة f' تنعدم عند 1 ولا تغيّر إشارتها، إذن النقطة $A(1, f(1))$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C) ، أي: النقطة $A(1, 0)$.

(6) الإنشاء:



كتابة الأستاذ: ب. ع

دراسة دالة عديرة رقم 05

الجزء الأول :

- نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$.
- و ليكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً .
- (ب) بيّن أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.
- (2) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\sqrt{1+x^2} - x > 0$.
(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
- (3) (أ) أنشئ المماس (T) والمنحني (C) .
(ب) حل بيانياً المتراجحة : $f(x) > 2x - 1$.
(ج) تحقق أنه من أجل كل $x > 0$ يكون : $x(1 + f(\frac{1}{x})) = 1 + f(x)$.

الجزء الثاني :

- لتكن الدالة g المعرفة على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ :
$$\begin{cases} g(x) = \tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x} & \dots\dots -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ g(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$
- و ليكن (Γ) هو المنحني الممثل للدالة g .
- (1) بيّن أن : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.
- (2) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً .
- (3) (أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ يكون : $g(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$.
(ب) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ منحنىها (Γ) في معلم آخر .

الجزء الثالث :

- لتكن الدالة h المعرفة على $]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ كما يلي :
- $$\begin{cases} h(x) = x - \sqrt{1+x^2} & \dots\dots x \leq 0 \\ h(x) = 2 - x - \sqrt{x^2 - 4x + 5} & \dots x \geq 2 \end{cases}$$
- (1) بيّن أن المستقيم الذي معادلته : $x = 1$ هو محور تناظر للمنحني (C_h) .
- (2) شكل جدول تغيرات الدالة h .
- (3) أنشئ (C_h) في نفس معلم الدالة f .

المسألة مأخوذة من أحد كتب المغرب الشقيق مع تعديل يوافق المنهاج الجزائري

الجزء الأول :

(1) حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \sqrt{1+x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \times x + \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = 0 \begin{cases} -1 \\ +\infty \end{cases}$$

إذن المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب بجوار $+\infty$.

(ب) بيان أن المستقيم (d) مقارب مائل بجوار $-\infty$: أي نحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - \sqrt{1+x^2}$ ، أي :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = (-x - \sqrt{1+x^2}) \times \frac{-x + \sqrt{1+x^2}}{-x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{-x + \sqrt{1+x^2}} = 0 \begin{cases} -1 \\ +\infty \end{cases}$$

إذن المستقيم (d) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

(2) بيان أن : $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ من أجل عدد حقيقي x ، نميز حالتين :

$$\text{❖ حالة } x \geq 0 \text{ يكون : } \sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} > 0$$

$$\text{❖ حالة } x < 0 \text{ يكون : } \sqrt{1+x^2} - x > 0 \text{ . ومنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ يكون : } \sqrt{1+x^2} - x > 0$$

$$\text{(ب) حساب } f' : f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

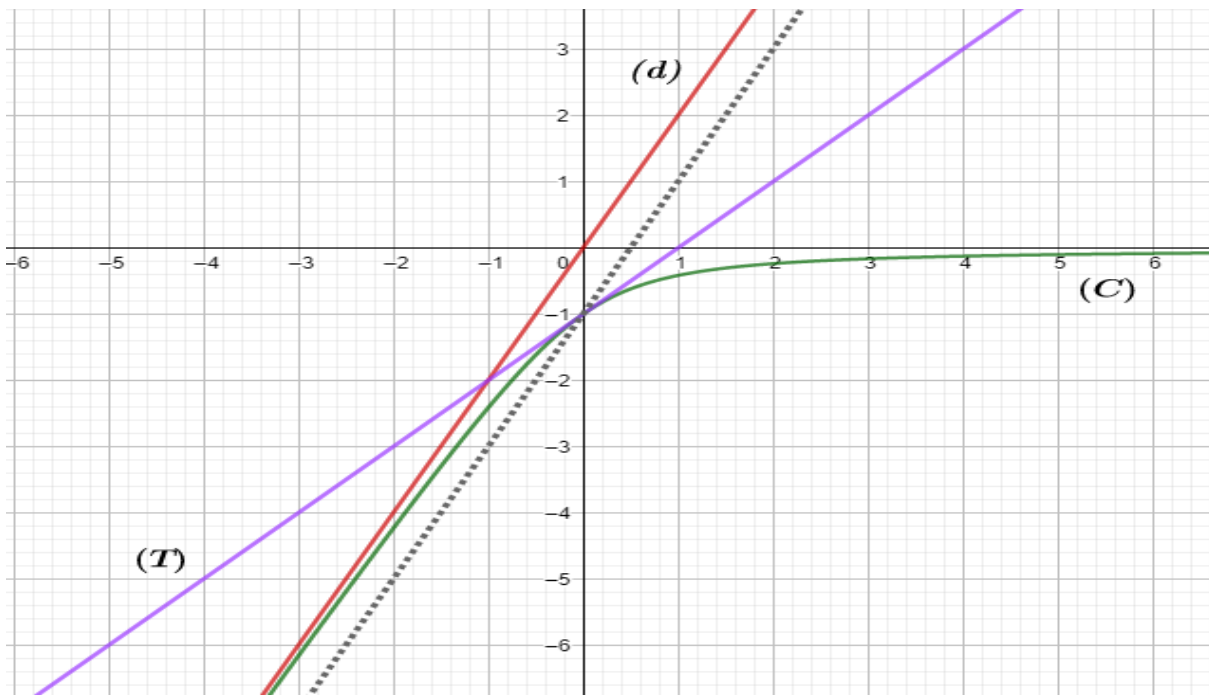
ومنه : الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	0

❖ جدول التغيرات :



(ج) معادلة المماس : $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ، ومنه : $(T) : y = x - 1$.



ب) حل المتراجحة: $f(x) > 2x - 1$ (الحلول هي المجالات التي يكون فيها المنحني (C) فوق المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$ إذن: $S =]-\infty; 0[$.

ج) من أجل كل $x > 0$ يكون: $x(1 + f(\frac{1}{x})) = x(1 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}) = x + 1 - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = x + 1 - x\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}}$

أي: $(\sqrt{x^2} = x \dots; x > 0)$ ، $x(1 + f(\frac{1}{x})) = x + 1 - \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x} = x - \sqrt{x^2 + 1} + 1 = f(x) + 1$.

الجزء الثاني :

1) بيان أن: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x}] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\tan x)$ ، أي :

، $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$ أي: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = 0$ ، ومنه: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$

2) حساب $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x)$:

أي: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(\tan x)$ ، أي: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x) = -\infty$ ، إذن: المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي للمنحني (C) .

(3) لدينا : $g(x) = \tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$ أي :

. $g(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$ ، ومنه : $g(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}$

(توضيح : بما أن $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos x > 0$ ، أي : $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$).

(ب) دراسة تغيرات الدالة g :

❖ حساب $g'(x)$:

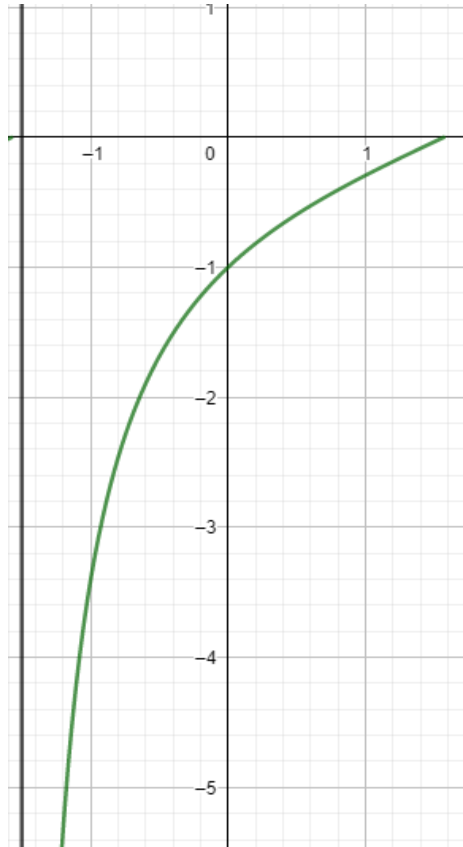
. $g'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - (-\sin x)(\sin x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

نعلم أن : $1 - \sin x > 0$ من أجل كل $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ، إذن : الدالة g متزايدة تماما على $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty \rightarrow 0$

❖ جدول التغيرات :

❖ الإنشاء :



الجزء الثالث :

(1) أولاً نلاحظ أن D_h متناظرة بالنسبة إلى 1 ، ثانياً نحسب : $h(2-x)$ في الحالتين ، أي :

❖ حالة $2-x \leq 0$:

$$h(2-x) = 2-x - \sqrt{1+(2-x)^2} = 2-x - \sqrt{1+4+x^2-2x} = 2-x - \sqrt{x^2-2x+5} = h(x)$$

❖ حالة $2-x \geq 2$:

$$h(2-x) = 2-(2-x) - \sqrt{(2-x)^2-4(2-x)+5} = x - \sqrt{x^2+1} = h(x)$$

إذن : من أجل كل x من $]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ يكون : $h(2-x) = h(x)$

ومنه : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_h) .

(2) تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

❖ لدينا على المجال $]-\infty; 0]$: $h(x) = f(x)$.

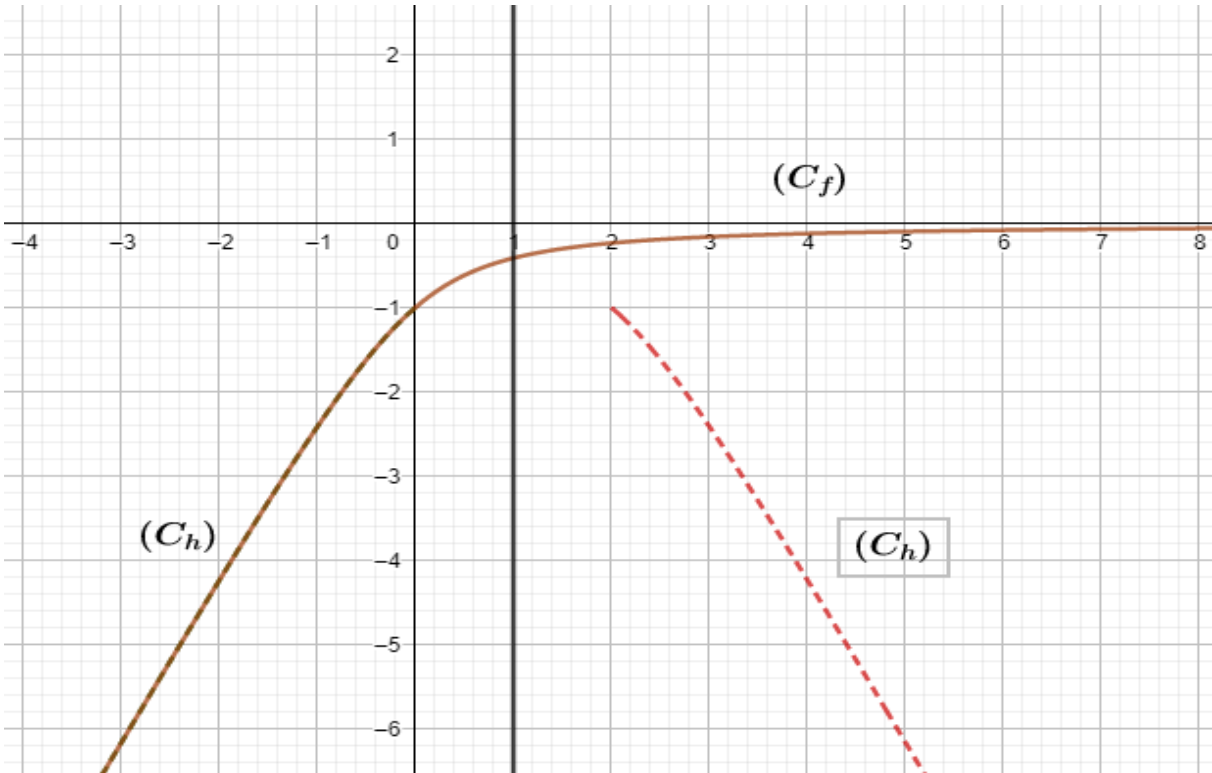
❖ على المجال $[2; +\infty[$ نكمل جدول التغيرات بالحفاظ على قيم $f(x)$ و نغير اتجاه الدالة f ، لأن المنحنى (C_h)

ينظر المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x = 1$.

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	-1	$-\infty$

❖ جدول التغيرات على المجال $[2; +\infty[$

(3) إنشاء (C_h) :



دراسة دالة عددية (مثلثية) رقم 06 + 07

المسألة رقم 01 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) بين أن الدالة f دورية و دورها هو 2π .
 - (2) أدرس شفعية الدالة f ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) .
 - (3) أ) قارن بين $f(x)$ و $f(\pi - x)$. فسّر النتيجة هندسياً .
ب) إستنتج مما سبق مجالا لدراسة الدالة f .
 - (4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f'(x) = -6 \sin x \times \sin 2x$.
 - (5) أدرس تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - (6) أنشئ المنحني (C_f) على $[-2\pi; 2\pi]$.

المسألة رقم 02 :

- f دالة معرفّة على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ : $f(x) = x \cdot \tan x$.
- (1) أدرس شفعية الدالة f .
 - (2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .
 - (3) بين أنه من أجل كل x من $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ تكون : $f'(x) = \frac{2x + \sin 2x}{2 \cos^2 x}$.
 - (4) أ) نعتبر الدالة g المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي : $g(x) = 2x + \sin 2x$.
ب) أدرس تغيّرات الدالة g على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - (5) شكّل جدول تغيّرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - (6) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$.
 - (7) أ) أنشئ (T) والمنحني (C_f) في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
ب) ماهو عدد حلول المعادلة (E) ، حيث : $\tan x = \frac{1}{x}$: (E) .

حل المسألة 01

لدينا : $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$.

(1) إثبات أن f دورية، و دورها 2π : أي نحسب $f(x + 2\pi)$.

$$f(x + 2\pi) = \sin(3x + 6\pi) - 3 \sin(x + 2\pi) = \sin 3x - 3 \sin x$$

$$f(x + 2\pi) = f(x) \text{ ، ومنه : } f(x + 2\pi) = \sin 3x - 3 \sin x$$

إذن : الدالة f دورية و دورها 2π ، لهذا يمكن دراستها على مجال طوله 2π ، و ليكن المجال $[-\pi; \pi]$.

(2) أ) شفعية الدالة f :

$$f(-x) = \sin(-3x) - 3 \sin(-x) = -\sin 3x + 3 \sin x = -(\sin 3x - 3 \sin x) = -f(x)$$

ومنه : الدالة f فردية، إذن : المنحني (C_f) يقبل المبدأ O كمركز تناظر .

❖ نستنتج أنه يمكن أن ندرس الدالة f على المجال $[0; \pi]$.

(3) أ) مقارنة $f(x)$ و $f(\pi - x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسياً :

$$f(\pi - x) = \sin(3\pi - 3x) - 3 \sin(\pi - x) = \sin(2\pi + \pi - 3x) - 3 \sin(\pi - x)$$

$$f(\pi - x) = \sin 3x - 3 \sin x = f(x) \text{ ، ومنه : } f(\pi - x) = \sin(\pi - 3x) - 3 \sin(\pi - x)$$

إذن : كتفسير هندسي نقول أن المنحني (C_f) يقبل محور تناظر و هو المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$.

ب) نستنتج مما سبق أنه يمكننا دراسة الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$(4) \text{ حساب } f'(x) : f'(x) = 3 \times \cos 3x - 3 \times \cos x = 3(\cos 3x - \cos x)$$

$$\text{نعلم أن : } \cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{أي : } f'(x) = 3(\cos 3x - \cos x) = 3(-2) \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \times \sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$

$$\text{ومنه : } f'(x) = -6 \sin 2x \times \sin x \text{ ، وهو المطلوب .}$$

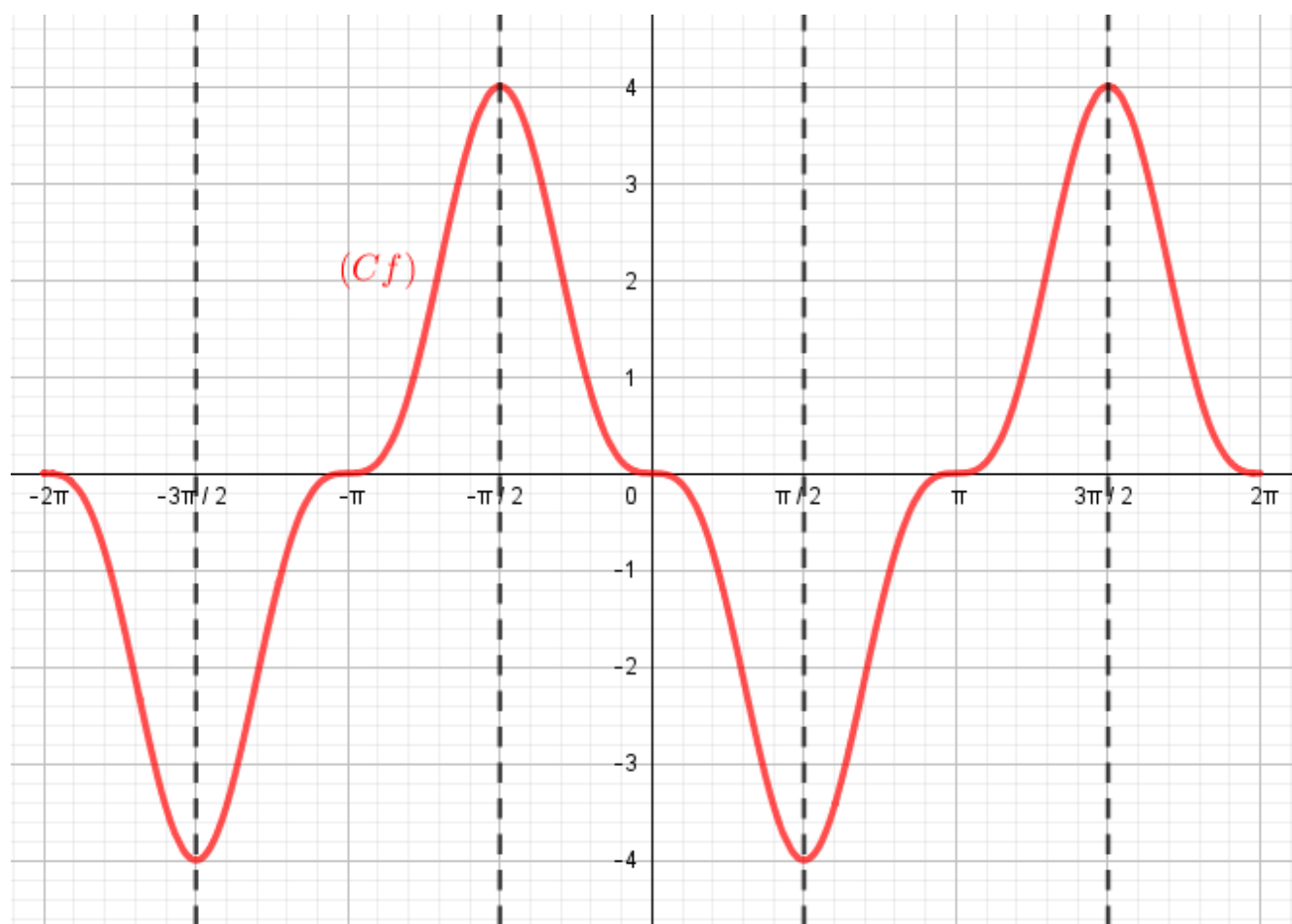
(5) دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، أي : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، يكون : $0 \leq 2x \leq \pi$ ، ومنه : $\sin 2x \geq 0$ و $\sin x \geq 0$.

إذن : من أجل كل $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $f'(x) \leq 0$ ، وبالتالي الدالة f متناقصة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

❖ جدول التغيرات :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	0	-4



حل المسألة 02

لدينا : $f(x) = x \cdot \tan x$.

(1) دراسة شفعية الدالة f :

أولاً : نلاحظ أن 0 هو مركز لـ D_f .

ثانياً : $f(-x) = -x \cdot \tan(-x) = -x \times -\tan x = x \times \tan x = f(x)$.

ومنه الدالة f زوجية .

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 0^+ \end{array} \right. \text{لأن} , \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} x \times \tan x = +\infty \quad (\diamond)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0^+ \end{array} \right. \text{لأن} , \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} x \times \tan x = +\infty \quad (\diamond)$$

(3) حساب f' :

$$f'(x) = \frac{\sin x \times \cos x + x}{\cos^2 x} \text{ أي } f'(x) = 1 \times \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \times x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\text{(نضرب في 2 ونقسم على 2) نجد : } f'(x) = \frac{2 \sin x \times \cos x + 2x}{2 \cos^2 x} \text{ (نعلم أن : } \sin 2x = 2 \sin x \times \cos x \text{)}$$

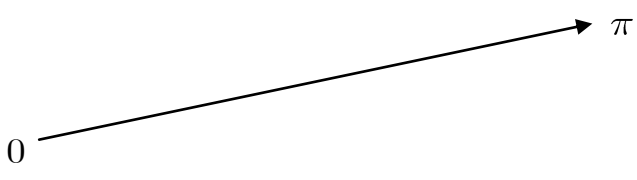
$$\text{إذن : } f'(x) = \frac{\sin 2x + 2x}{2 \cos^2 x} \text{ وهو مطلوب .}$$

(4) دراسة تغيّرات الدالة g حيث : $g(x) = 2x + \sin 2x$.

(الدالة المشتقة : $g'(x) = 2 + 2 \cdot \cos 2x$.

نعلم أن : $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ ، أي : $-2 \leq 2 \cdot \cos 2x \leq 2$ ، ومنه : $0 \leq 2 + 2 \cdot \cos 2x \leq 4$.

إذن نستنتج أن : $g'(x) \geq 0$ ، وبالتالي : الدالة g متزايدة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

(\diamond) جدول التغيرات :

(\diamond) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ تكون : $g(x) \geq 0$.

(ب) لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{2 \cos^2 x}$ ، بما أن : $g(x) \geq 0$ على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، إذن : $f'(x) \geq 0$ على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

وبالتالي : الدالة f متزايدة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(5) بما أن الدالة f زوجية، فستكون متناقصة على $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ ، أي: جدول تغيرات الدالة f على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ يكون:

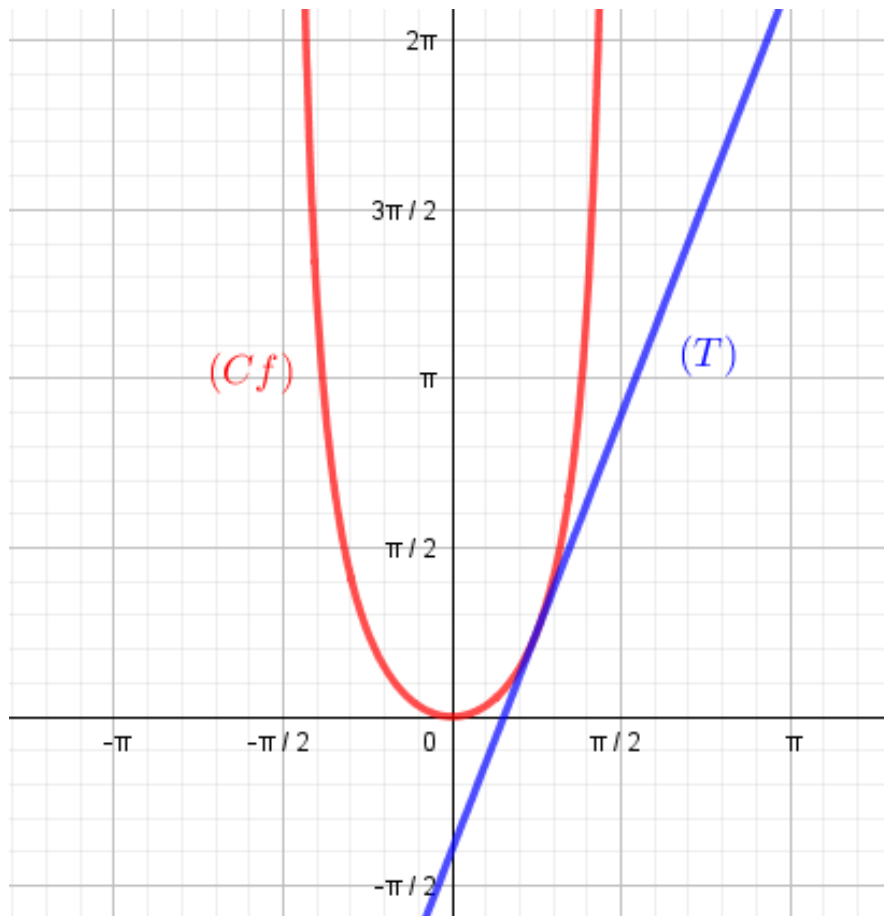
x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(6) كتابة معادلة (T) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$:

$$\text{أي: } (T): y = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \text{ ، } \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 \end{cases} \text{ لدينا: } (T): y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (\diamond)$$

$$\text{أي: } (T): y = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \text{ ، ومنه: } (T): y = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x - \frac{\pi^2}{8} \text{ .}$$

(7) الإنشاء:



ب) عدد الحلول المعادلة: $(E) : \tan x = \frac{1}{x}$
أي: $(E) : x \cdot \tan x = 1$ ، معناه: $(E) : f(x) = 1$. ومنه المعادلة تقبل حلين متمايزين.

كتابة الأستاذ: ب.ع