

ملف الدوال العددية

تمامٌ مترافقٌ مع الملوّن و طرائفه منه

التحضير الجيد للبكالوريا

BAC 2019



كتابة الأستاذ :

بلقاسم عبد الرزاق

الموسم الدراسي : 2018 - 2019

الأمثلة الشائعة في دراسة الدوال و كيفية الإجابة عليها

1) السلوك التقاري / الوضع النسبي لمنحنى

السؤال	الإجابة
$f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ فسيانيا : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ فسيانيا : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ فسيانيا : بين أن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل لـ $f(x)$.	$x = a$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الفواصل معادلته (C_f) $y = b$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور التراتيب معادلته (C_f) $y = ax + b$ يقبل مستقيما مقاربا مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = ax + b$ نبين أن: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائل يطلب تعين معادلته $y = ax + b$. وإذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$, يكفي أن نبين: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$. معادلته هي: $y = ax + b$. وإذا لم يكن ذلك نعين العددين a و b من \mathbb{R} كما يلي: $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) \quad \text{و} \quad a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$	إذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$, يكفي أن نبين: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$. معادلته هي: $y = ax + b$. وإذا لم يكن ذلك نعين العددين a و b من \mathbb{R} كما يلي: $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) \quad \text{و} \quad a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$
ندرس إشارة الفرق: $D(x) = f(x) - y$. $D(x) > 0$ يقع فوق $y = ax + b$. $D(x) < 0$ يقع تحت $y = ax + b$. $D(x) = 0$ يقطع $y = ax + b$.	أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y = ax + b$. نطبق نفس الإجابة على السؤال: أدرس وضعية المنحنيين (C_f) و (C_g) بوضع: $D(x) = f(x) - g(x)$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$ فسيانيا :	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ فسيانيا :

2) عناصر تناظر منحنى / شفاعة دالة

السؤال	الإجابة
$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ يكفي أن نبين : $\Omega(\alpha; \beta)$ بعد الحساب نستنتج أن (C_f) متناظر بالنسبة $x = \alpha$	بين أن النقطة $(\alpha; \beta)$ مركز تناظر لمنحنى (C_f) . بين أن: $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$.
$f(2\alpha - x) = f(x)$ يكفي أن نبين : نستنتج أن: المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f)	بين أن المستقيم (d) محور تناظر لمنحنى (C_f) . بين أن: $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$, ماذ تستنتج .
$f(-x) = -f(x)$ نبرهن أن : $f(-x) = f(x)$ نبرهن أن :	بين أن f دالة فردية. بين أن f دالة زوجية
$f(-x) + f(x) = 0$ نستنتج أن: f دالة فردية، ومبدأ المعلم مركز تناظر لـ (C_f)	بين أن: $f(-x) + f(x) = 0$, ماذ تستنتج .
$f(-x) - f(x) = 0$ نستنتج أن: f دالة زوجية ، و (C_f) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	بين أن: $f(-x) - f(x) = 0$, ماذ تستنتج .
$f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ نستنتج أن: $\Omega\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}\right)$ متناظر بالنسبة للنقطة	بين أن: $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$, ماذ تستنتج .
$f(\alpha - x) - f(x) = \beta$ نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $x = \frac{\alpha}{2}$	بين أن: $f(\alpha - x) - f(x) = \beta$, ماذ تستنتج .

3) إشارة دالة / مبرهنة القيم المتوسطة

<ul style="list-style-type: none"> حلول المعادلة هي فوائل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفوائل بالنسبة للإشارة : المجالات التي يكون فيها (C_f) تحت محور الفوائل فإن $f(x) < 0$ ، وال المجالات التي يكون فيها (C_f) فوق محور الفوائل فإن $f(x) > 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> يعطى لك المنحني (C_f) ممثلا في معلم . حل بيانيا المعادلة $0 = f(x)$. استنتاج إشارة ($f(x)$) .
<p>نجد $0 = f(\alpha)$ ثم نحدد المجالات : (x) إما موجبة أو سالبة</p> <ul style="list-style-type: none"> أولا : نبين أن f مستمرة ورتيبة على المجال $[a;b]$. ثانيا : نحسب كلام من (a) و (b) $f(a)$ و $f(b)$ ثم نبين أن k محصور بين (a) و $f(x) = k$ ، عليه يوجد α من المجال $[a;b]$ يحقق : 	<p>أحسب (α) f ، ثم استنتاج إشارة ($f(x)$) .</p> <p>بين أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حل واحدا $\alpha \leq \alpha \leq b$ حيث :</p>
<ul style="list-style-type: none"> نبين أن f مستمرة ورتيبة على المجال $[a;b]$. نحسب (a) و (b) $f(a) \times f(b) < 0$ ، ثم نجد : $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. ومنه يوجد α واحد من المجال $[a;b]$ يحقق : 	<p>بين أن المعادلة $0 = f(x)$ تقبل حل واحد $\alpha \in [a;b]$ حيث :</p> <p>أو بصيغة أخرى : بين أن (C_f) يقطع محور الفوائل في نقطة واحدة فاصلتها α .</p>

4) العدد المشتق وتفسيره الهندسي

السؤال	الإجابة
$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L$ فسرايلى : $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = L$ أو :	<ul style="list-style-type: none"> الدالة f تقبل الإشتقة عند a ، و L يقبل عند النقطة (C_f) $A(f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a) = L$.
$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = 0$ فسرايلى :	<ul style="list-style-type: none"> الدالة f تقبل الإشتقة عند a ، و 0 يقبل عند النقطة (C_f) $A(f(a))$ مماسا موازيا لمحور الفوائل .
$\lim_{h \xrightarrow{\leftarrow} 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = \pm\infty$ فسرايلى :	<ul style="list-style-type: none"> الدالة f لا تقبل الإشتقة عند a . (C_f) يقبل عند النقطة ($A(f(a))$) مماسا (أونصف مماس) موازي لمحور التراتيب معادلته $x = a$.
$\lim_{h \xrightarrow{\leftarrow} 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L_1$ فسرايلى : $\lim_{h \xrightarrow{\leftarrow} 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L_2$ و :	<ul style="list-style-type: none"> الدالة f لا تقبل الإشتقة عند a . (C_f) يقبل عند النقطة ($A(f(a))$) نصفي مماسين معامل توجيههما L_1 و L_2 على الترتيب ، وتسمى النقطة A نقطة زاوية.

5) المماسات

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلية x_0	نكتب المعادلة: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ، ثم نحسب كلًا من $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ونعرض في المعادلة.
أكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الترتيبية x_0	أي نبحث عن الفاصلية x_0 وذلك بحل المعادلة $y = f(x_0) = f(x_0)$ ، ثم نكتب معادلة المماس عند x_0 .
عين بيانيا العدد المشتق: $f'(x_0)$ ، حيث النقطتين A و B من المماس .	نحسب معامل التوبيخ: $f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ ، حيث النقطتين A و B من المماس .
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها a ؟	نبحث عن الفاصلية x_0 بحل المعادلة $f'(x) = a$ ، أي عدد حلول المعادلة هي عدد المماسات التي معامل توجيهها a .
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذات المعادلة $y = ax + b$ ؟	نحل المعادلة: معامل توجيهه $(d) = a$ أي $f'(x) = a$. إذا وجدنا حلول نقول يوجد مماسات لـ (C_f) موازية لـ (d) .
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة (α, β) ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f(x_0) = \beta$. عدد حلول المعادلة تمثل عدد المماسات .
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعادل المستقيم ذات المعادلة $y = ax + b$ ؟ . في معلم متعمد ومتجانس .	نبحث عن x_0 بحل المعادلة: $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ ، $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ هو معامل توجيهه (d) . عدد الحلول يمثل عدد المماسات .

6) أحياناً تعطى لنا عبارة الدالة (x) f بثوابت مجهولة $(....., c, b, a)$ ويطلب منا تعينها

علماً أن عدد المعطيات المباشرة وغير المباشرة تكون بعدد الثوابت

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت $(....., c, b, a)$
(C_f) يقبل في النقطة (x_0, y_0) مماساً موازياً لمحور الفواصل ، أو يقبل ذروة في النقطة (x_0, y_0) .	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$ ثم نعين الثوابت المجهولة .
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلية x_0 مماساً يوازي المستقيم ذات المعادلة $y = mx + k$.	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $(x_A; y_A)$ مماساً يشمل النقطة $(x_B; y_B)$.	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

7) رسم منحني (C_g) إنطلاقاً من المنحني (C_f)

فإن :	إذا كان :
(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')	$g(x) = -f(x)$
g دالة زوجية، ولما : $x \geq 0$ يكون (C_g) منطبقاً على $\cdot (C_f)$	$g(x) = f(x)$
<ul style="list-style-type: none"> • (C_g) ينطبق على (C_f) في المجالات التي تكون فيها f موجبة. • (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى (xx') في المجالات التي تكون فيها f سالبة. 	$g(x) = f(x) $

بالتوفيق لجميع طلبتنا الأعزاء في بـ كالوريـا 2019

الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

دراسة دالة عدديّة رقم 01

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

- (1) أدرس تغيرات الدالة g (تحسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$).
أ) بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلّين بالضبط α و β ، حيث : $\alpha < \beta$.
ب) تحقق أن : $-0,69 < \alpha < -0,7$ و $1,78 < \beta < 1,79$.
ج) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني :

الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$ ، ولتكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المرسوم

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته .

- (1) عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
أ) عيّن الأعداد الحقيقية : a, b, c, d, e حيث $f(x) = ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$.
- (2) ب) يستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) يطلب تعين معادلته.

ج) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيمات (Δ) .

$$\text{أ) بين أنه من أجل كل } x \neq 1 \text{ يكون : } f'(x) = \frac{x^2 \times g(x)}{(x^3 - 1)^2}$$

ب) يستنتج إتجاه تغيير الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

- ج) أعط حصراً لكل من : $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.
أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

ب) أنشئ كلام من المماس (T) و (Δ) والمنحني (C_f) .

$$\text{ج) هي الدالة المعرفة على } \mathbb{R} - \{1\} \text{ بـ : } h(x) = \frac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$$

أ) أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

- ب) إشرح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحني المماثل للدالة h ، إنطلاقاً من المنحني (C_f) .
ج) أنشئ المنحني (C_h) في نفس المعلم السابق.

حل مختصر للدالة رقم 01

الجزء الأول :

لدينا الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $. g(x) = x^4 - 4x - 3$

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات : الدالة g قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و دالتها المشتقة هي: $. g'(x) = 4x^3 - 4$

تكون : $x \leq 1$ إذا كان: $4x^3 - 4 \geq 0$ ، ومنه: $x \geq 1$ ، أي تكون: $g'(x) \leq 0$ إذا كان: $x \leq 1$

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

(2) أ) على المجال $[1; +\infty)$ الدالة g مستمرة ورتبية، وصورة هذا المجال هي $[-6; +\infty)$ و

إذن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حل وحيد α ينتمي إلى $[-\infty; 1]$.

بالمثل : المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حل وحيد β من $[1; +\infty)$.

ب) نحسب: $g(-0,69) < 0 < g(-0,7)$ ، نجد أن: $g(-0,69) = \dots$ و $g(-0,7) = \dots$

إذن: $-0,7 < \alpha < -0,69$.

نفس الشيء بالنسبة إلى β ، سنجد أن: $1,78 < \beta < 1,79$.

x	0	α	β	$+\infty$
$g(x)$	+	○	-	○

(3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

الجزء الثاني :

لدينا f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = +\infty , \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = +\infty , \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{ax^4 - ax + bx^3 - b + cx^2 + dx + e}{x^3 - 1} \quad \text{لدينا: } f(x) = ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1} \quad (2)$$

$$f(x) = x + \frac{x + 1}{x^3 - 1} , \text{ ومنه: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \\ e = 1 \end{cases} , \text{ أي: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = a \\ e = b \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

ب) نعلم أنّ : $f(x) = x + \frac{x+1}{x^3-1}$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^3-1} = 0$$

ج) الوضعية: ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ ، أي: $f(x) - x = \frac{x+1}{x^3-1}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	—	○	+	+
x^3-1	—	—	○	+
$f(x)-y$	+	—	—	+
الوضعية	(Δ) يقع فوق (C_f)	(Δ) يقع تحت (C_f)	(Δ) يقع فوق (C_f)	
	يقطع (C_f) في النقطة $(-1; 1)$			

(3) الدالة المشتقة: الدالة f قابلة للإشتاقاق من أجل كل x يختلف عن 1 و دالتها المشتقة هي :

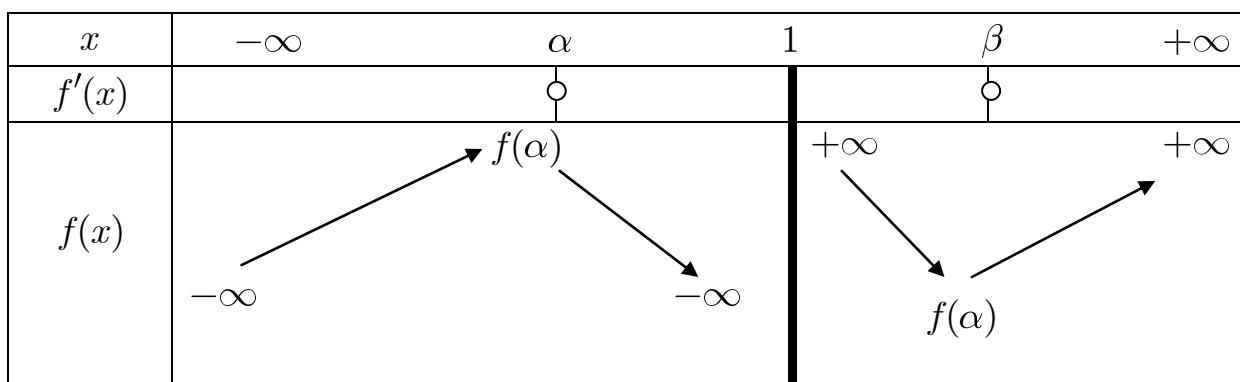
$$f'(x) = \frac{x^2 \times [4x(x^3-1) - 3(x^4+1)]}{(x^3-1)^2} ; \text{ أي: } f'(x) = \frac{4x^3(x^3-1) - 3x^2(x^4+1)}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 \times g(x)}{(x^3-1)^2} ; \text{ ومنه: } f'(x) = \frac{x^2(x^4-4x-3)}{(x^3-1)^2} ; \text{ أي: } f'(x) = \frac{x^2(4x^4-4x-3x^4-3)}{(x^3-1)^2}$$

x	$-\infty$	α	0	1	β	$+\infty$
x^2	+	+	+	+	+	+
$g(x)$	+	—	—	—	+	+
$x^2 \times g(x)$	+	—	—	—	+	+

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة :

$x^2 \times g(x)$ ، وهي موضحة في الجدول المقابل



جدول
التغيرات

ج) حصرا كل من $f(\beta)$ و $f(\alpha)$ حصر $f(\alpha)$

$$\therefore \frac{1}{-0,33} < \frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{-1,34} : \text{أي ،} -1,34 < \alpha^3 - 1 < -1,33 : \text{أي ،} -0,34 < \alpha^3 < -0,33 \text{ و}$$

$$\frac{1}{0,34} < -\frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{1,33} \dots\dots\dots(2) : \text{ای}$$

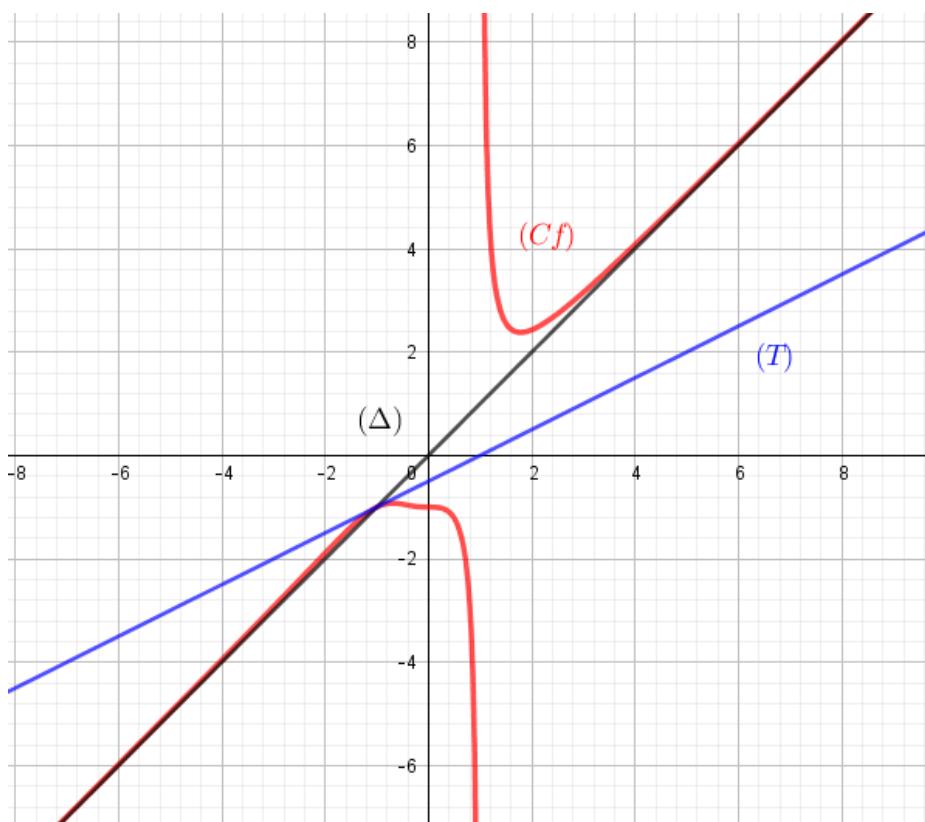
$$\therefore 0,92 < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < 0,93 : \text{أي } \frac{1,23}{0,34} < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1,24}{1,33} : \text{بضرب (1) و (2) نجد}$$

$$\therefore -0,93 < f(\alpha) < -0,92 \text{ : إذن ، } -0,93 < \frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < -0,92 \text{ : ومنه .}$$

(2) حصر $f(\beta)$: نفس الطريقة مثل حصر $f(\alpha)$ ، ونجد أنّ :

$$\therefore (T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ ، و منه } (T) : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) \quad (4)$$

الإثناء (5)

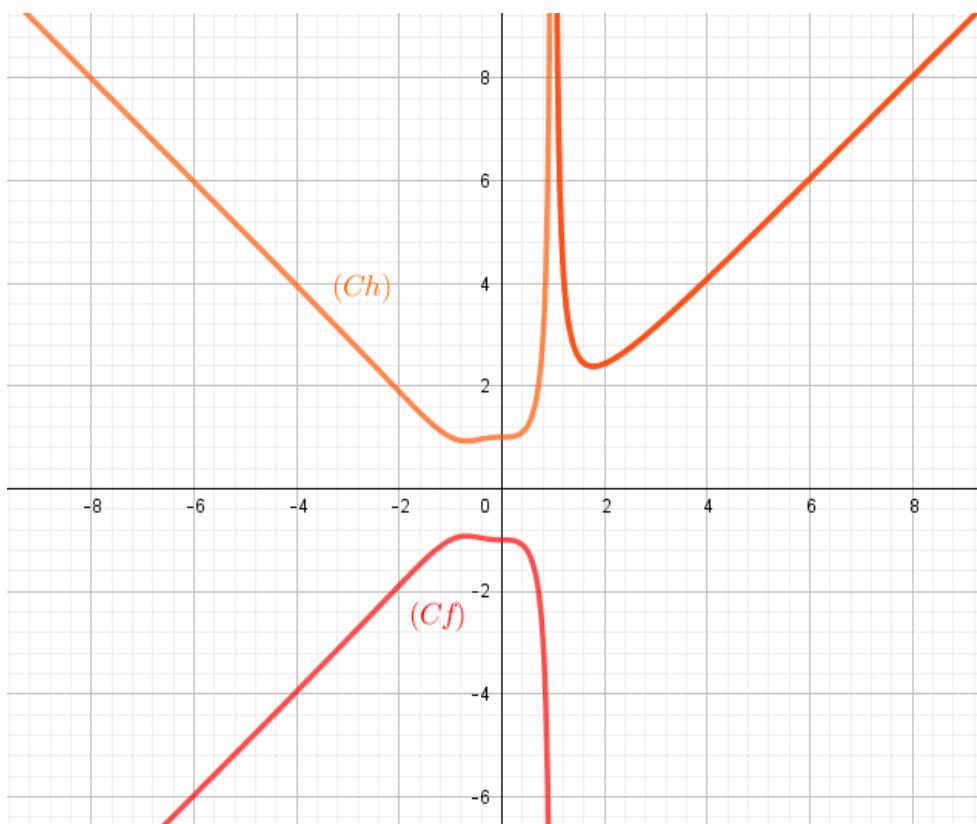


$$\therefore h(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} : \text{لدينا (6)}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = f(x) & \dots \dots \dots (x > 1) \\ -\frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = -f(x) & \dots \dots \dots (x < 1) \end{cases}$$

أ) كتابة الدالة h دون رمز القيمة المطلقة:

ب) ينطبق على (C_h) على $[1; +\infty]$
 .] $-\infty; 1$ [نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل على
 ج) الإنشاء :



كتابه الأستاذ : بـ.ع

دراسته راله عدريه رقم 02

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{O; i}; \vec{j})$ ، وحدته $(5.cm)$.

نعتبر المنحني (C) الذي معادلته في المعلم $(\vec{O; i}; \vec{j})$ هي :

$$\cdot f(x) = \sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}} \text{ ، كما يلي : } [1; 3] -$$

❖ بين أن المنحني (C) هو إتحاد المنحنيين (C_1) و (C_2) الممثلين للدالتين f و $-f$ على الترتيب.

$$(2) \text{ أ) عين كلا من : } \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} \text{ و } \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x} \text{ ، مادا تستنتج ؟ .}$$

ب) فسر النتائج هندسيا.

$$(3) \text{ أحسب : } \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} .$$

$$(4) \text{ أ) بين أنه من أجل كل } x \in [-1; 0] \cup [0; 3] \text{ يكون : } f'(x) = \frac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}} .$$

ب) يستنتج إشارة $f'(x)$.

ج) أحسب : $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً .

د) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(5) أنشئ (C_1) ، ثم أكمل إنشاء المنحني (C) .

حل مختصر للدالة العددية رقم 02

(1) هو المحنبي الذي معادلته : $x^3 + xy^2 + y^2 - 3x^2 = 0$ ، أي : $x(x^2 + y^2) + y^2 - 3x^2 = 0$.
 أي : $y = -\sqrt{\frac{3x^2 - x^3}{x+1}}$ ، أو $y = \sqrt{\frac{3x^2 - x^3}{x+1}}$ ، إذن : $y^2 = \frac{3x^2 - x^3}{x+1}$ ، ومنه : $y^2(x+1) = 3x^2 - x^3$
 . $x \in [-1; 3]$ مع $y = -f(x)$ أو $y = f(x)$ ، منه : $y = -\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}$ أو $y = \sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}$
 و عليه نقول أن (C) هو إتحاد المحنبيين (C_1) و (C_2) الممثلين للدالتين f و $-f$ على الترتيب.

(2) أ) تعين النهايات :

$$\begin{aligned} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sqrt{\frac{x^2(x+1)}{x+1}}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \sqrt{\frac{3-x}{x+1}} = \sqrt{3} \quad (\diamond) \\ \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} -\sqrt{\frac{3-x}{x+1}} = -\sqrt{3} \quad (\diamond) \end{aligned}$$

نستنتج أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0 .

ب) التفسير الهندسي : نقول أن المحنبي (C_1) يقبل عند النقطة $O(0; 0)$ نصف مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيههما $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ على الترتيب ، والنقطة O هي نقطة زاوية.

$$\begin{aligned} \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}} - 0}{x - 3} = \lim_{x \xrightarrow{<} 3} x \times \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{x-3} \quad (3) \\ \text{و منه : } \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \xrightarrow{<} 3} x \times \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{-1}{3-x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 3} x \times \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{-1}{(\sqrt{3-x})^2} \\ \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{-x}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{3-x})} = -\infty \begin{cases} -3 \\ 0^+ \end{cases} \end{aligned}$$

نستنتج أن الدالة f لا تقبل الإشتقاق على يسار 3 و المحنبي (C_1) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $(3; 0)$ حساب $f'(x)$ (4)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x - 3x^2)(x+1) - (3x^2 - x^3)}{(x+1)^2} = \frac{6x^2 + 6x - 3x^3 - 3x^2 - 3x^2 + x^3}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{x+1}{3x^2 - x^3}} \\ \text{أي : } f'(x) &= \frac{-2x^3 + 6x}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2 - x^3}} = \frac{2(-x^3 + 3x)}{(\sqrt{x+1})^4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2 - x^3}} \\ f'(x) &= \frac{-x^3 + 3x}{(\sqrt{x+1})^3} \times \frac{1}{\sqrt{3x^2 - x^3}} = \frac{-x^3 + 3x}{(x+1)\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{\sqrt{3x^2 - x^3}} = \frac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{(x+1)(3x^2 - x^3)}} \end{aligned}$$

و منه : $f'(x) = \frac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$ وهو المطلوب .

ب) نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(3x - x^3)$. سلخص الإشارة في الجدول التالي :

لدينا : $3x - x^3 = x(3 - x^2) = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$.

• ممكن دراسة الإشارة على \mathbb{R} ، ثم في جدول التغيرات نأخذ الإشارة فقط على D_f .

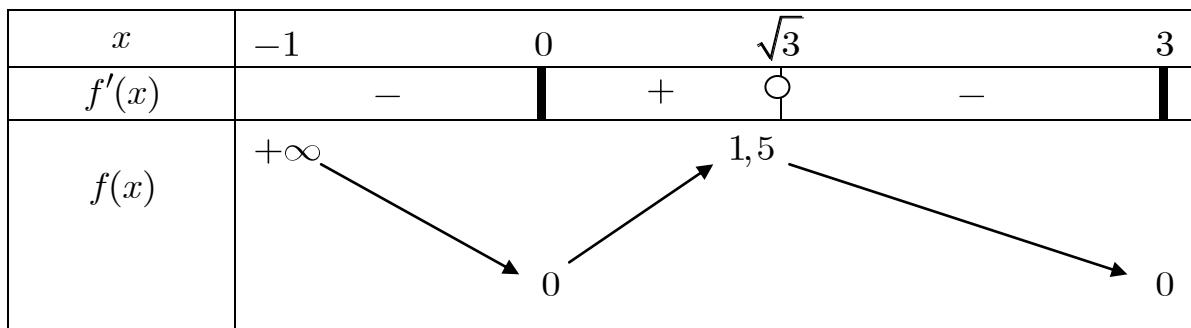
x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$+\infty$
x	-	-	○	+	+
$3 - x^2$	-	○	+	+	○
$(3x - x^3)$	+	○	-	○	-

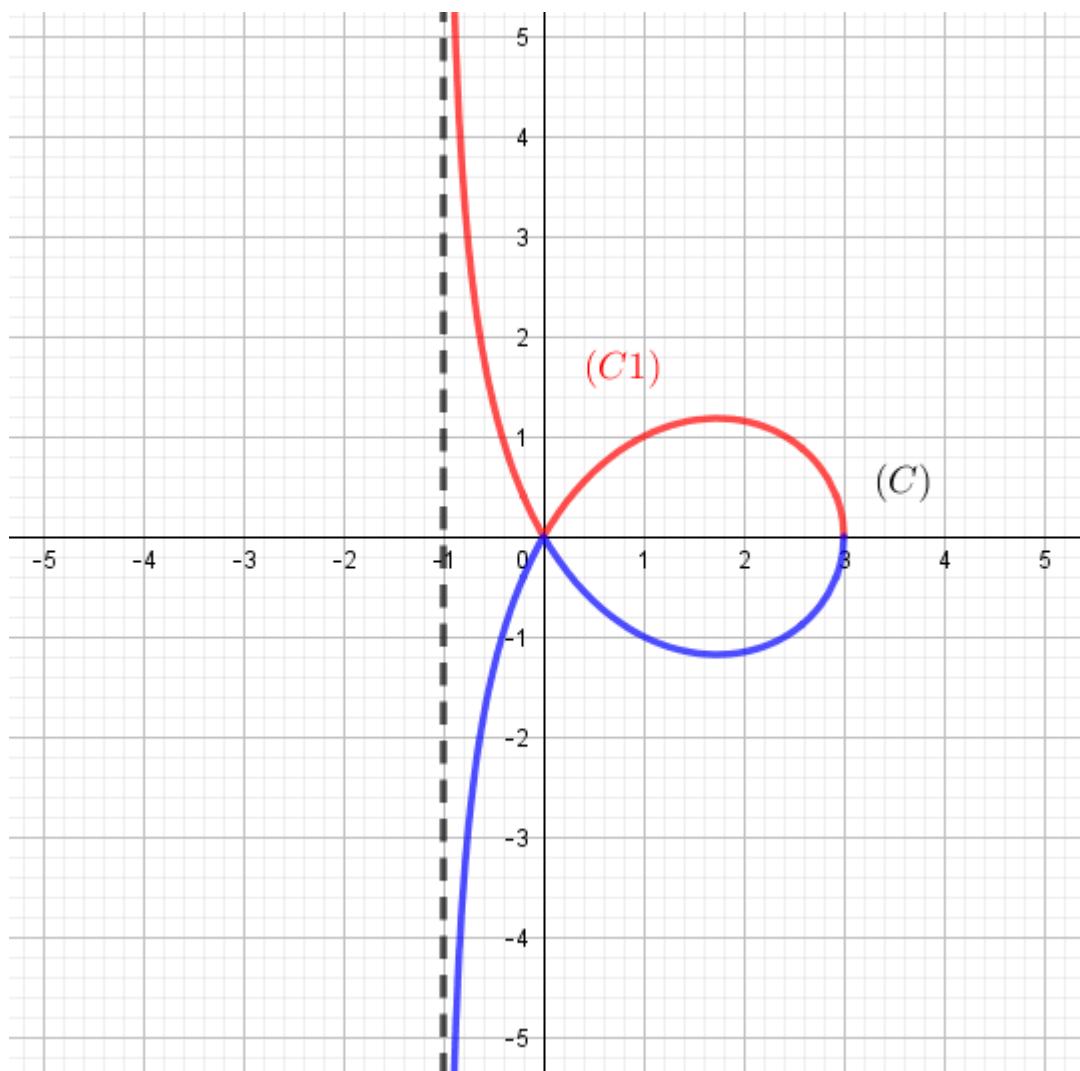
ج) حساب النهاية :

• (C_1) ، و منه المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \begin{cases} 2 \\ 0^+ \end{cases}$$

د) جدول تغيرات الدالة f :





كتابه الأستاذ : بـ .ع

دراسة دالة عدديّة رقم 03

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{-x^3 - 2x^2 + 7x + 12}{(x + 2)^2}$. ولتكن (C_f) المنحني الممثّل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب نهايّات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) فسّر هندسيّا النهايّة عند -2 .

(2) عيّن الأعداد الحقيقيّة: a, b, c, d بحيث من أجل كل x يختلف عن -2 تكون:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2} + \frac{d}{(x + 2)^2}$$

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) بجواري $+\infty$ و $-\infty$.

ج) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) أ) بين أنّه من أجل كل $x \neq -2$ تكون: $f'(x) = \frac{(-x - 1)(x^2 + 5x + 10)}{(x + 2)^3}$

ب) إستنتاج إتجاه تغيير الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغييراتها.

(4) أ) أحسب: $f(-3)$ ، ثمّ حدد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) حدد أيضاً نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور التراتيب.

(5) أنشئ المنحني (C_f) .

(6) عدد حقيقي. عيّن قيم m حتّى يكون للمعادلة: $f(x) = m$ ثلاثة حلول سابقة.

(7) g هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = f(|x|)$

أ) بين أنّ الدالة g زوجيّة.

ب) إشرح كيف يتم إنشاء المنحني (C_g) إنطلاقاً من المنحني (C_f) .

ج) أنشئ المنحني (C_g) في نفس المعلم السابق.

حل مختصر للدالة رقم 03

: حساب نهايات الدالة f (1)

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty (\diamond)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty (\diamond)$$

$$\cdot \lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = -\infty \begin{cases} -2 \\ 0^+ \end{cases} (\diamond), \quad \lim_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = -\infty \begin{cases} -2 \\ 0^+ \end{cases} (\diamond)$$

. $x = -2$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته C_f التفسير الهندسي : المنحني

$$\cdot f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2} = \frac{ax(x+2)^2 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d}{(x+2)^2} \quad (2)$$

$$\cdot f(x) = \frac{ax^3 + 4ax^2 + 4ax + bx^2 + 4bx + 4b + cx + 2c + d}{(x+2)^2}, \text{ بالطابقة نجد:}$$

$$\cdot f(x) = -x + 2 + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} : \text{ إذن، و منه: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ 4a + b = -2 \\ 4a + 4b + c = 7 \\ 4b + 2c + d = 12 \end{cases}$$

$$\cdot \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} \right) = 0 \quad \text{و } f(x) = -x + 2 + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} : \text{ بما أن:}$$

إذن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f بجواري ∞ و $-\infty$: $y = -x + 2$ معادلته . (Δ) دراسة الوضعية:

$$\cdot f(x) - (-x + 2) = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{3x+4}{(x+2)^2} : \text{درس إشارة الفرق:}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$\frac{3x+4}{(x+2)^2}$	-	-	○	+
الوضعية	(Δ) يقع تحت C_f	(Δ) يقع تحت C_f	(Δ) يقطع C_f عند $(-\frac{4}{3}; \frac{10}{3})$	(Δ) يقع فوق C_f

: $f'(x)$ حساب (٤)

$$\text{أي ، } f'(x) = \frac{(-3x^2 - 4x + 7)(x + 2)^2 - 2(x + 2)(-x^3 - 2x^2 + 7x + 12)}{(x + 2)^4}$$

$$\text{أي ، } f'(x) = \frac{(x + 2)[(-3x^2 - 4x + 7)(x + 2) - 2(-x^3 - 2x^2 + 7x + 12)]}{(x + 2)^4}$$

$$\text{أي ، } f'(x) = \frac{-3x^3 - 6x^2 - 4x^2 - 8x + 7x + 14 + 2x^3 + 4x^2 - 14x - 24}{(x + 3)^3}$$

$$(-x - 1)(x^2 + 5x + 10) = -x^3 - 6x^2 - 15x - 10 \text{ ، بـلـاحـظـةـ أـنـ : } f'(x) = \frac{-x^3 - 6x^2 - 15x - 10}{(x + 3)^3}$$

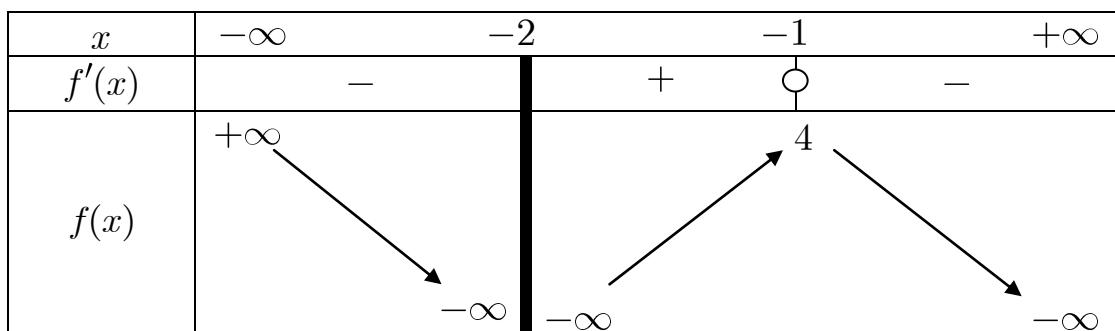
$$\text{وـمـنـهـ : } f'(x) = \frac{(-x - 1)(x^2 + 5x + 10)}{(x + 2)^3} \text{ ، وـهـوـ الـمـطـلـوبـ .}$$

ب) جدول الإشارة :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$-x - 1$	+	+	○	-
$x^2 + 5x + 10$	+	+		+
$(x + 2)^3$	-	○	+	+
$f'(x)$	-		+	-

. مـلـاحـظـةـ : (إـشـارـةـ $(x + 2)^3$ مـنـ إـشـارـةـ $x + 2$ ، وـإـشـارـةـ a لـأـنـ : $\Delta < 0$) .

فـوـقـ جـدـولـ التـغـيـرـاتـ :



، $f(x) = 0$ ، لـإـيجـادـ نـقـطـ تـقـاطـعـ المـنـحـنـيـ (C_f) مـعـ حـامـلـ مـحـورـ الـفـوـاـصـلـ نـحـلـ المـعـادـلـةـ : (٤)

أـيـ : $(-x^3 - 2x^2 + 7x + 12) = 0$ ، بـماـ أـنـ : $f(-3) = 0$ ، فـإـنـ : $-x^3 - 2x^2 + 7x + 12 = 0$.

إـذـنـ : $-x^3 - 2x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$ ، أـيـ :

، $-x^3 - 2x^2 + 7x + 12 = ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c$ ، أـيـ :

$$\begin{array}{l} \text{بالمطابقة نجد:} \\ \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b + 3a = 1 \\ c = 4 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b + 3a = -2 \\ c + 3b = 7 \\ 3c = 12 \end{array} \right. \end{array}$$

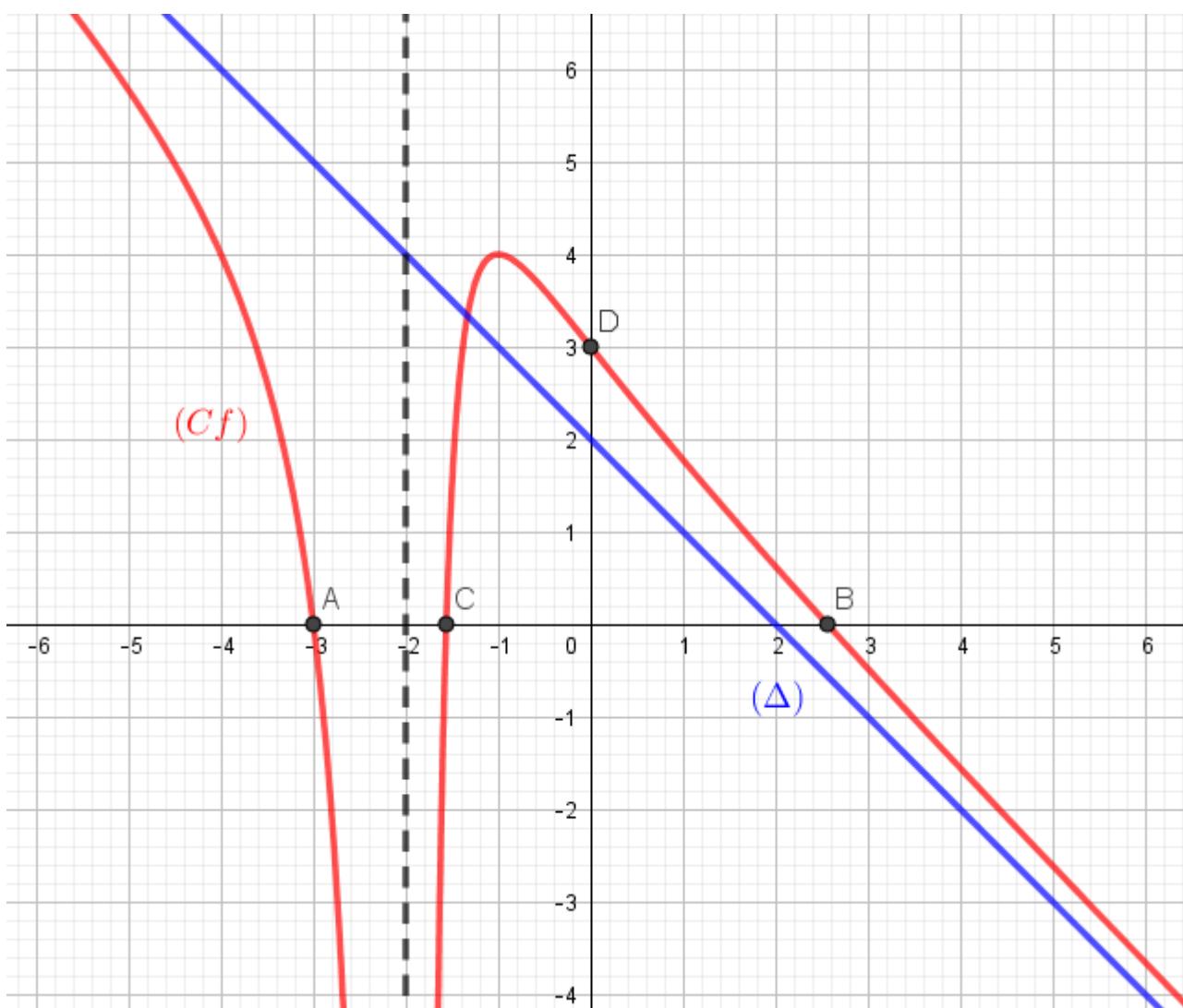
. إذن: $-x^3 - 2x^2 + 7x + 12 = (x+3)(-x^2 + x + 4)$

$$\cdot x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{-2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{-2} : \quad \text{أي، } -x^2 + x + 4 = 0 : \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ x = -3 \end{array} \right. \quad \text{إما:}$$

. ومنه: يقطع حامل محور الفواصل عند: $C_f\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}; 0\right)$ و $B\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 0\right)$ ، $A(-3; 0)$

. ب) إيجاد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب ، أي نحسب: $f(0) = 3$ ، منه النقطة:

الإنشاء: (5)



. المعادلة: $f(x) = m$ ، تقبل ثلث حلول سالبة لها: $3 < m < 4$ ، (أنظر الإنشاء).

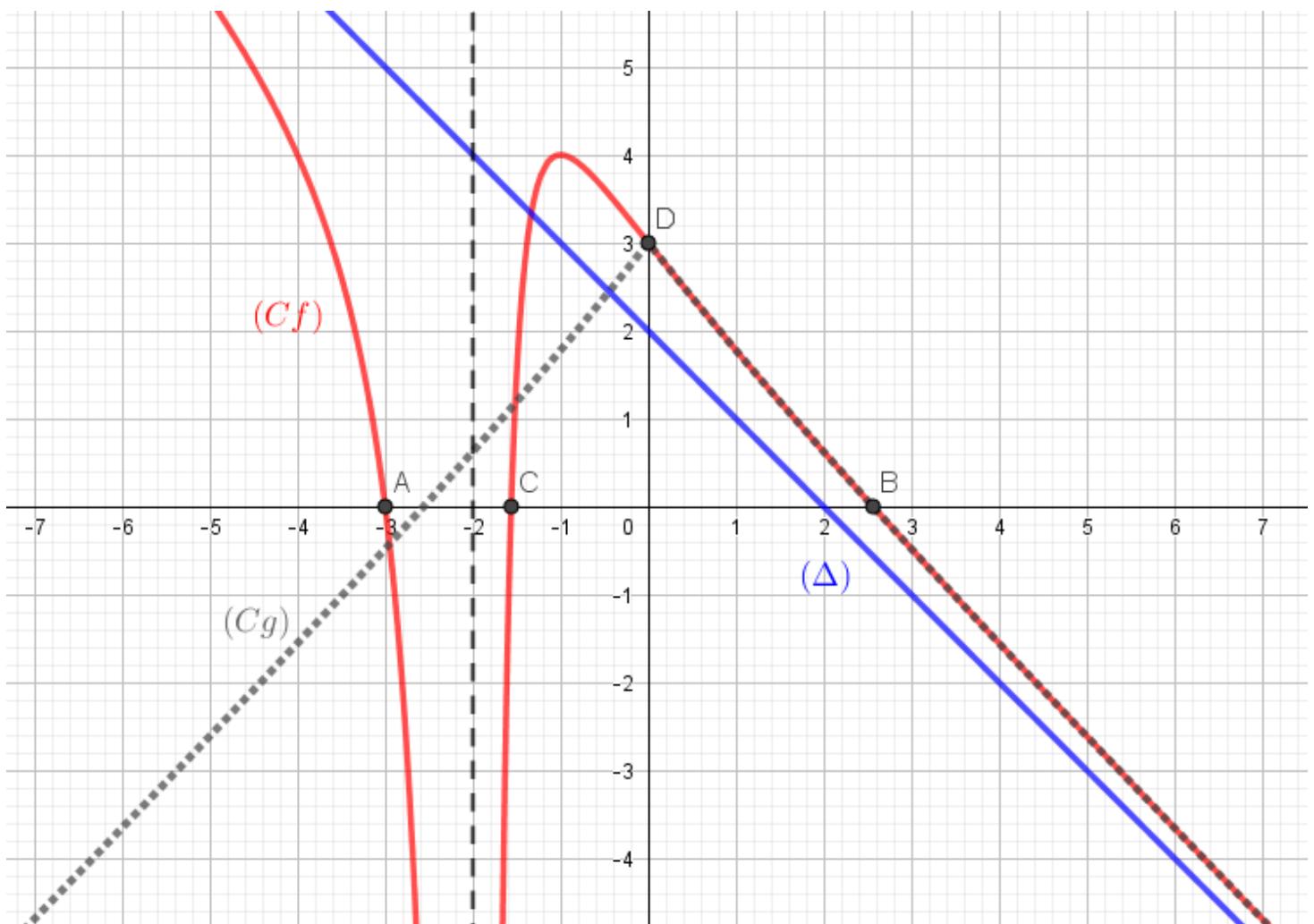
$$\cdot g(x) = f(|x|) \quad (7)$$

أ) إثبات أن الدالة g زوجية: $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ ، إذن g زوجية.

ب) إذا كان: $x \geq 0$ فإن: $g(x) = f(x)$ ، منه: $|x| = x$ ، إذن: (C_f) ينطبق على (C_g) في المجال $[0; +\infty[$

❖ ثم ننشئ (C_g) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة g زوجية.

ج) الانشاء:



دراسة حالة عدديه رقم 04

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$\cdot \begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} & \dots; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2} & \dots; x > 0 \end{cases}$$

- ول يكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; i; j)$.
- 1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ، ثم فسر بيانيا النتيجة عند $-\infty$.
 - 2) أدرس إستمراية الدالة f عند 0 .

3) أحسب : $\lim_{x \xrightarrow{\leq} 0} \frac{f(x)}{x}$. ماذا يمكن القول بالنسبة للدالة f ؟ وما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟ .

ب) بين أنه من أجل كل x من $[-\infty; 0]$ تكون : $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 2x} \times (\sqrt{x^2 - 2x} - x + 1)}$

و من أجل كل x من $[0; +\infty)$ تكون : $f'(x) = \frac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

5) بين أن المنحني (C) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعين إحداثياتها .

6) أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحني (C) .

حل مختصر للدالة رقم 04

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \dots; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2} \dots; x > 0 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

(1) حساب النهايات :

: أ_ي ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + \sqrt{x^2 - 2x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + \sqrt{x^2 - 2x}] \times \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ (❖)

$$(\sqrt{x^2} = -x; x \leq 0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x + x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$$

. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$: إذن ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right]} = 1$: ومنه

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty$ (❖)

(2) دراسة استمرارية الدالة f عند 0 :

. $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) \neq f(0)$: إذن ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{(x-1)^3}{x^2} = -\infty$ لـ $\begin{cases} f(0) = 0 \\ -1 \\ 0^+ \end{cases}$

و منه نقول أن الدالة f ليست مستمرة عند 0.

(3) حساب :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x + \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right]}{x} = -\infty$$

إذن : نقول أن الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 0.

التفسير الهندسي : المنحني (C) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $O(0,0)$.

ب) حساب $f'(x)$ على $[-\infty; 0]$:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{\sqrt{x^2-2x} + x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{\sqrt{x^2-2x} + x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \times \frac{\sqrt{x^2-2x} - (x-1)}{\sqrt{x^2-2x} - (x-1)}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x^2 - 2x - (x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x} \times \sqrt{x^2-2x} - x + 1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-2x} \times (\sqrt{x^2-2x} - x + 1)} \quad \text{أي:}$$

نلاحظ أنه من أجل $x \in [-\infty; 0]$ يكون $\sqrt{x^2-2x} - x + 1 > 0$:

و بالتالي ستكون : $f'(x) < 0$ ، أي أن الدالة f متناقصة تماما على $(-\infty; 0]$.

❖ حساب $f'(x)$ على $[0; +\infty]$:

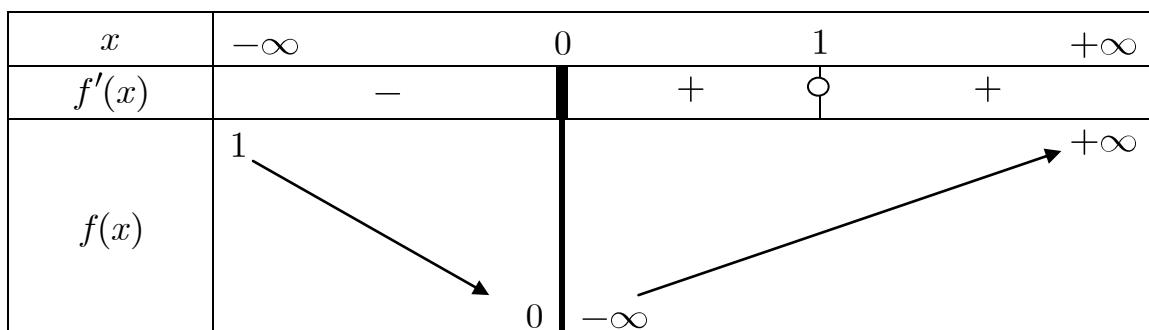
$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \times x^2 - 2x \times (x-1)^3}{x^4} = \frac{x(x-1)^2 [3x - 2(x-1)]}{x^4} = \frac{x(x-1)^2 \times (x+2)}{x^4}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3} . \text{ ومنه :}$$

نلاحظ أنه من أجل $x = 1$. $f'(x) \geq 0 : x \in [0; +\infty]$. $f'(x) \geq 0$: لأن $f'(x) \geq 0$.

و منه : الدالة f متزايدة على $[0; +\infty]$.

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :



توضيح مهم : الشيء الجديد بالنسبة للطلبة هو أن الدالة f معرفة عند 0 ، أي : $f(0) = 0$ ، لكن نهاية الدالة f على يمين 0 هي $-\infty$.

أ) نبين أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ ، أي :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-1)^3}{x^2} - (x-3) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1 - x^2(x-3)}{x^2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

و منه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

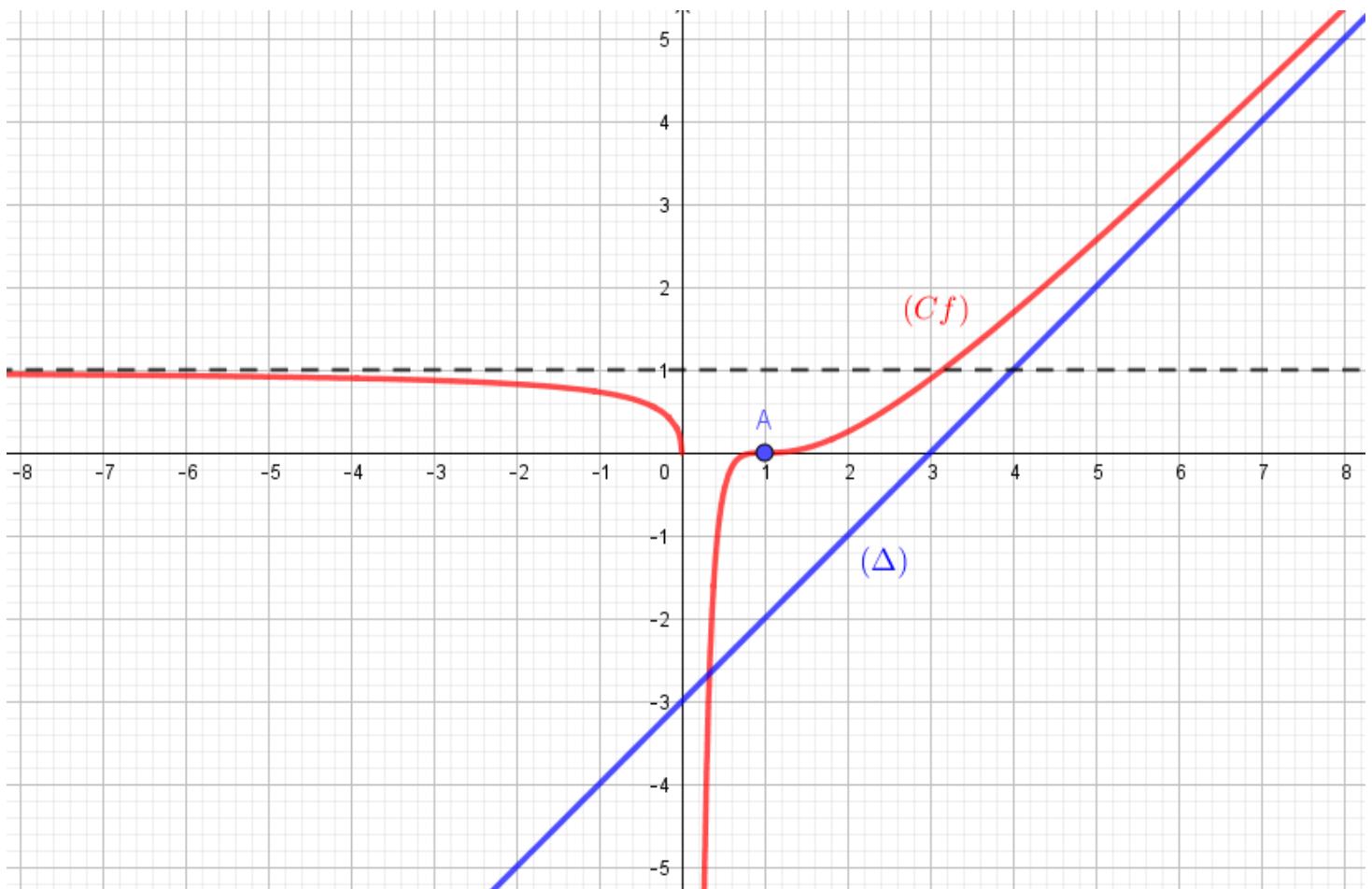
ب) الوضعية: أي ندرس إشارة $\frac{3x-1}{x^2}$ ، و منه الإشارة من إشارة 1

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	-	+	
الوضعية	(Δ) يقع تحت (C)	(Δ) يقع فوق (C)	

(Δ) يقطع (C) عند النقطة $(\frac{1}{3}; -\frac{8}{3})$

5) نلاحظ من خلال جدول التغيرات للدالة f' أن الدالة f' تنعدم عند 1 ولا تغير إشارتها، إذن النقطة $A(1, f(1))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) ، أي : النقطة $A(1, 0)$.

6) الإنشاء :



كتابي الأستاذ : بـ ع

دراسته رالث عدريث رقم 05

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

ولتكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

(2) أتحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\sqrt{1+x^2} - x > 0$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلية 0.

(3) أنشئ المماس (T) والمنحني (C) .

ب) حل بيانياً المتراجحة : $f(x) > 2x - 1$.

ج) تحقق أنه من أجل كل $x > 0$ يكون : $x(1 + f(\frac{1}{x})) = 1 + f(x)$.

الجزء الثاني:

لتكون الدالة g المعرفة على $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x} & \dots \dots \dots -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 & \end{cases}$$

ولتكن (Γ) هو المنحني الممثل للدالة g .

(1) بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} g(x) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

(2) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} g(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(3) أبين أنه من أجل كل x من $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ يكون :

$$g(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$$

ب) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ منحناها (Γ) في معلم آخر.

الجزء الثالث:

لتكون الدالة h المعرفة على $[-\infty; 0] \cup [2; +\infty]$ كما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = x - \sqrt{1+x^2} & \dots \dots \dots x \leq 0 \\ h(x) = 2 - x - \sqrt{x^2 - 4x + 5} & \dots \dots \dots x \geq 2 \end{cases}$$

(1) أبين أن المستقيم الذي معادلته : $x = 1$ هو محور تناظر للمنحني (C_h) .

(2) شكل جدول تغيرات الدالة h .

(3) أنشئ (C_h) في نفس معلم الدالة f .

المأساة مأخوذة من أحد كتب المغرب الشقيق مع تعديل يوافق المنهاج الجزائري

حل مختصر للدالة رقم 05

الجزء الأول :

(1) حساب النهاية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \sqrt{1+x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \times x + \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = 0 \begin{cases} -1 \\ +\infty \end{cases}$$

إذن المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقاًرب بجوار $+\infty$.

ب) بيان أن المستقيم (d) مقاًرب مائل بجوار $-\infty$: أي نحسب :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = (-x - \sqrt{1+x^2}) \times \frac{-x + \sqrt{1+x^2}}{-x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{-x + \sqrt{1+x^2}} = 0 \begin{cases} -1 \\ +\infty \end{cases}$$

إذن المستقيم (d) مقاًرب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

(2)أ) بيان أن $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ من أجل عدد حقيقي x ، نميّز حالتين :

$$\diamond \text{ حالة } x \geq 0 \text{ يكون : } \sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} > 0$$

$\diamond \text{ حالة } x < 0 \text{ يكون : } \sqrt{1+x^2} - x > 0$. ومنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$$\cdot f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}} > 0 : f' > 0$$

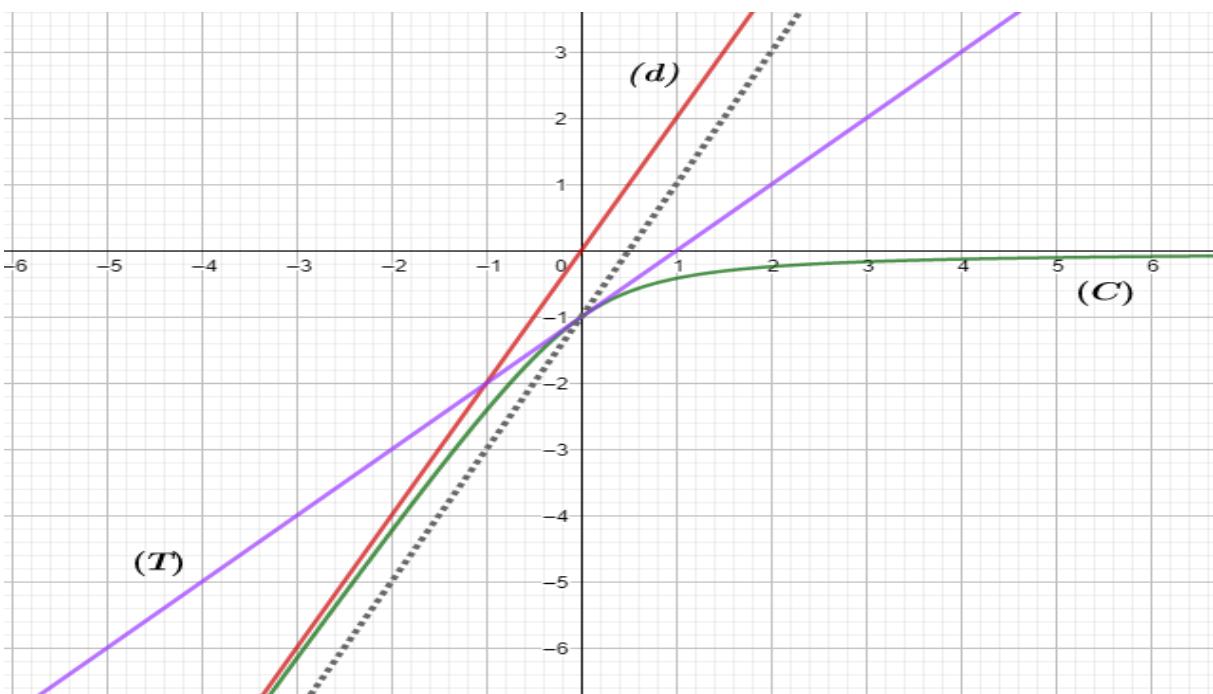
ب) حساب f' : $f' > 0$.
و منه : الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	0

\diamond جدول التغيرات :

□

ج) معادلة المماس :



الإنشاء (3) :

ب) حل المراجحة : 1- $f(x) > 2x - 1$ (الحلول هي المجالات التي يكون فيها المنحني (C) فوق المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$). $S =]-\infty; 0[$ إذن :

$$x\left(1 + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(1 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = x + 1 - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = x + 1 - x\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} : \text{ يكون كل من أجل } x > 0$$

$$\therefore (\sqrt{x^2} = x \dots; x > 0), x\left(1 + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 1 - \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x} = x - \sqrt{x^2 + 1} + 1 = f(x) + 1 : \text{ای}$$

الجزء الثاني :

$$\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) : \text{بيان أَنْ}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\tan x)$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) : \text{يُؤكِّدُ} , \quad \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = 0 : \text{يُؤكِّدُ} .$$

$$\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow \\ -\frac{\pi}{2}}} g(x) \text{ حساب (2)}$$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan x = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \begin{cases} -1 \\ 0^+ : \text{أي} \end{cases}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x > -\frac{\pi}{2}}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x > -\frac{\pi}{2}}} f(\tan x) : \text{أي}$$

و منه : $x = -\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C) ، إذن المستقيم ذو المعادلة

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} g(x) = -\infty$$

$$\text{أي } g(x) = \tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} : \text{ لدينا (3)}$$

$$\therefore g(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x} : \text{ ومنه } g(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore (\sqrt{\cos^2 x} = \cos x : \cos x > 0 : \text{ أي } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ توضيح: بما أنّ})$$

ب) دراسة تغيرات الدالة g :

❖ حساب $g'(x)$

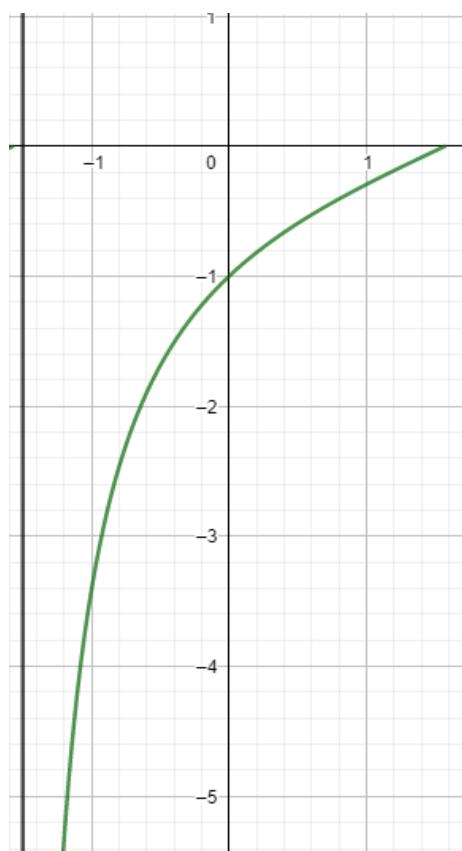
$$\therefore g'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - (-\sin x)(\sin x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$$

نعلم أنّ $1 - \sin x > 0$: إذن الدالة g متزايدة تماماً على $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 0

❖ جدول التغيرات :

❖ الإنشاء :



الجزء الثالث:

(1) أولاً نلاحظ أن D_h متناظرة بالنسبة إلى 1، ثانياً نحسب: $h(2-x)$ في الحالتين، أي:
 حالتة 1: $2-x \leq 0$
 حالتة 2: $2-x \geq 0$

$$h(2-x) = 2-x - \sqrt{1+(2-x)^2} = 2-x - \sqrt{1+4+x^2-4x} = 2-x - \sqrt{x^2-2x+5} = h(x)$$

إذن: $2-x \geq 0$

$$\therefore h(2-x) = 2-(2-x) - \sqrt{(2-x)^2-4(2-x)+5} = x - \sqrt{x^2+1} = h(x)$$

إذن: $h(2-x) = h(x)$ يكون: $]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$

و منه: المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_h) .

(2) تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

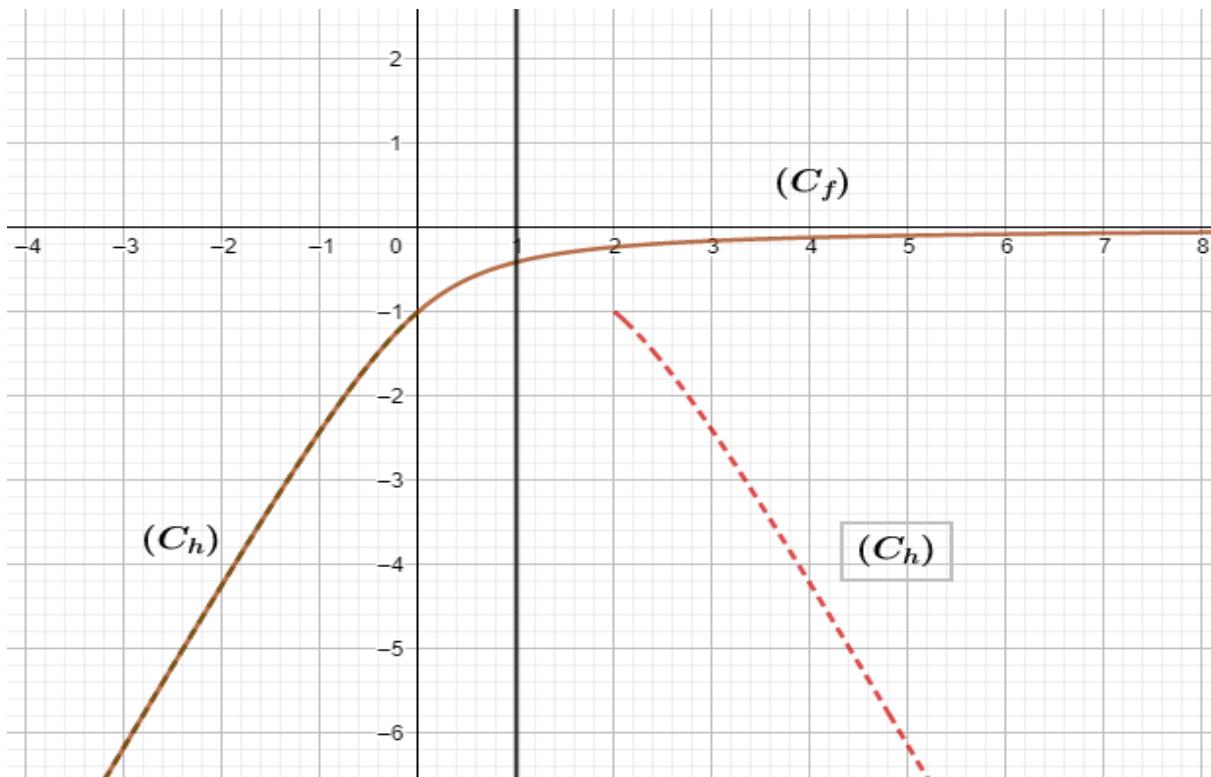
$$\therefore h(x) = f(x) :]-\infty; 0]$$

فـ على المجال $[2; +\infty[$ نكمل جدول التغيرات بالحفظ على قيم $f(x)$ ونغير إتجاه الدالة f ، لأن المنحنى (C_h) يناظر المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x=1$.

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	-1	$\searrow -\infty$

فـ جدول التغيرات على المجال $[2; +\infty[$

: (C_h) إنشاء (3)



دراسة راتب عددي (متلبي) رقم 06+07

المأسئلة رقم 01:

- نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمجانس $(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$.
- 1) بيّن أن الدالة f دوريتها دورها هو 2π .
 - 2) أدرس شفعية الدالة f ، مادا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) .
 - 3) أقارن بين $f(x)$ و $f(\pi - x)$. فسر النتيجة هندسياً.
 - ب) إستنتاج مما سبق مجالاً لدراسة الدالة f .
 - 4) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f'(x) = -6 \sin x \times \sin 2x$.
 - 5) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - 6) أنشئ المنحني (C_f) على $\left[-2\pi; 2\pi\right]$.

المأسئلة رقم 02:

- f دالة معرفة على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ : $f(x) = x \cdot \tan x$.
- 1) أدرس شفعية الدالة f .
 - 2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
 - 3) بيّن أنه من أجل كل x من $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ تكون : $f'(x) = \frac{2x + \sin 2x}{2 \cos^2 x}$.
 - أ) نعتبر الدالة g المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي :
 - ب) إستنتاج تغيرات الدالة g على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - 5) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - 6) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند ذات الفاصلية $\frac{\pi}{4}$.
 - أ) أنشئ (T) و المنحني (C_f) في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمجانس $(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$.
 - ب) ما هو عدد حلول المعادلة (E) ، حيث : $(E) : \tan x = \frac{1}{x}$.

حل المسألة 01

لدينا : $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$

(1) إثبات أن f دورية، ودورها 2π : أي نحسب

$$f(x + 2\pi) = \sin 3(x + 2\pi) - 3 \sin(x + 2\pi) = \sin(3x + 6\pi) - 3 \sin(x + 2\pi)$$

$$f(x + 2\pi) = f(x) \text{ ، ومنه } f(x + 2\pi) = \sin 3x - 3 \sin x$$

إذن : الدالة f دورية ودورها 2π ، لهذا يمكن دراستها على مجال طوله 2π ، ولتكن المجال $[-\pi; \pi]$

(2) أ) شفاعة الدالة :

$$f(-x) = \sin(-3x) - 3 \sin(-x) = -\sin 3x + 3 \sin x = -(\sin 3x - 3 \sin x) = -f(x)$$

و منه : الدالة f فردية ، إذن : المنحني (C_f) يقبل المبدأ O كمركز تناظر.

❖) نستنتج أنه يمكن أن ندرس الدالة f على المجال $[0; \pi]$.

(3) أ) مقارنة $f(x)$ و $f(\pi - x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسياً :

$$f(\pi - x) = \sin 3(\pi - x) - 3 \sin(\pi - x) = \sin(3\pi - 3x) - 3 \sin(\pi - x) = \sin(2\pi + \pi - 3x) - 3 \sin(\pi - x)$$

$$f(\pi - x) = f(x) \text{ ، ومنه } f(\pi - x) = \sin(\pi - 3x) - 3 \sin(\pi - x) = \sin 3x - 3 \sin x$$

إذن : كتفسير هندسي نقول أن المنحني (C_f) يقبل محور تناظر وهو المستقيم ذو المعادلة

ب) نستنتج مما سبق أنه يمكننا دراسة الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(x) = 3 \times \cos 3x - 3 \times \cos x = 3(\cos 3x - \cos x) : f'(x) \text{ حساب (4)}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) : \text{ نعلم أن}$$

$$f'(x) = 3(\cos 3x - \cos x) = 3(-2) \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \times \sin\left(\frac{3x-x}{2}\right) \text{ أي :}$$

$$f'(x) = -6 \sin 2x \times \sin x \text{ ، وهو المطلوب .}$$

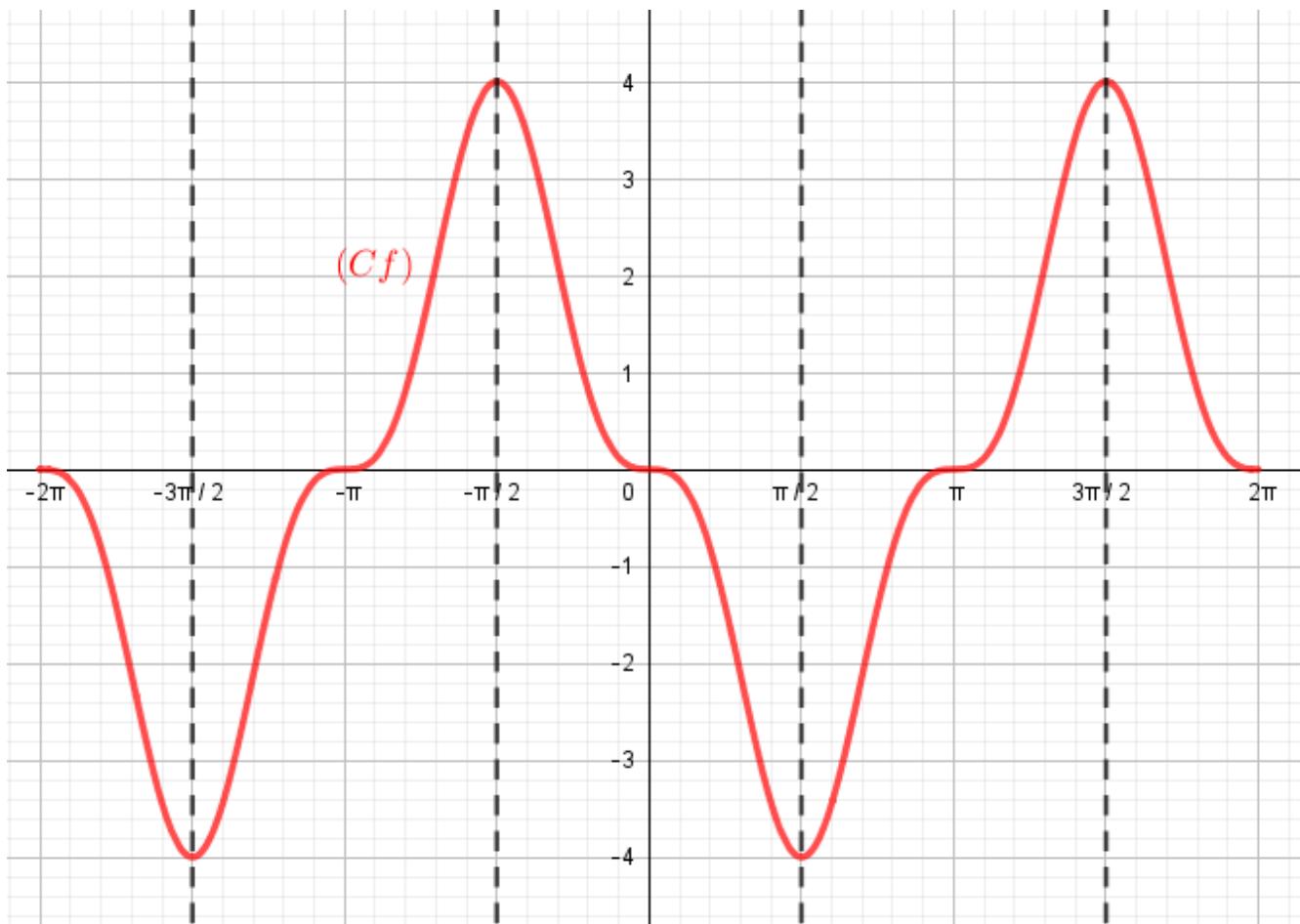
(5) دراسة تغيرات الدالة :

لدينا على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، أي : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، يكون : $0 \leq 2x \leq \pi$ ، ومنه : $0 \leq \sin x \leq 1$

إذن : من أجل كل $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، $f'(x) \leq 0$: $f'(x) \leq 0$ ، وبالتالي الدالة f متناقصة على

❖) جدول التغيرات :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	0	-4



حل المسألة 02

لدينا : $f(x) = x \cdot \tan x$

(1) دراسة شفعية الدالة f :

أولاً : نلاحظ أن 0 هو مركز لـ D_f

ثانياً : $f(-x) = -x \cdot \tan(-x) = -x \times -\tan x = x \times \tan x = f(x)$
ومنه الدالة f زوجية.

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \quad \begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases}, \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} x \times \tan x = +\infty (\diamond)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \quad \begin{cases} 1 \\ 0^+ \end{cases}, \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x \times \tan x = +\infty (\diamond) \\ \therefore f' \text{ حساب (3)}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x \times \cos x + x}{\cos^2 x} : \text{ أي, } f'(x) = 1 \times \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \times x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 x}$$

(نضرب في 2 ونقسم على 2) نجد : $f'(x) = \frac{2 \sin x \times \cos x + 2x}{2 \cos^2 x}$

إذن : $f'(x) = \frac{\sin 2x + 2x}{2 \cos^2 x}$ ، وهو مطلوب.

(4) دراسة تغيرات الدالة g حيث :

الدالة المشقة :

نعلم أن : $0 \leq 2 + 2 \cdot \cos 2x \leq 4$ ، $-2 \leq 2 \cdot \cos 2x \leq 2$ ، $-1 \leq \cos 2x \leq 1$

إذن نستنتج أن : $0 \leq g'(x) \leq 4$ ، وبالتالي : الدالة g متزايدة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0	π

(*) جدول التغيرات :

* نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ تكون : $g(x) \geq 0$

(ب) لدينا : $f'(x) \geq 0$ على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، إذن : $g(x) \geq 0$ ، بما أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{2 \cos^2 x}$

والتالي : الدالة f متزايدة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

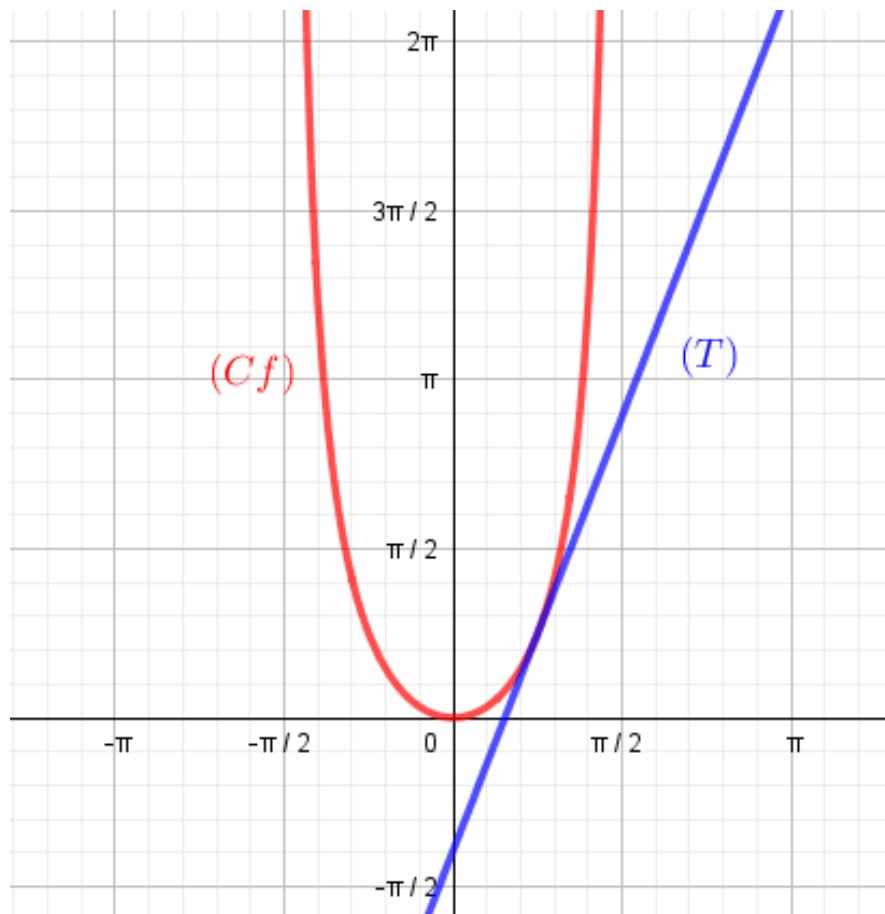
5) بما أن الدالة f زوجية، فستكون متناقصة على $\left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$ ، أي: جدول تغيرات الدالة f على $\left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$ يكون :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

6) كتابة معادلة (T) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$:

$$\therefore (T) : y = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} : \text{أي} , \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 \end{cases} : \text{لدينا} , (T) : y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) (\diamond)$$

$$\therefore (T) : y = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x - \frac{\pi^2}{8} : \text{ومنه} , (T) : y = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} : \text{أي} : (7)$$



ب) عدد الحلول المعاقدة :
 $(E) : \tan x = \frac{1}{x}$
أي : $(E) : f(x) = 1$. و منه المعاقدة تقبل حلين متمايزين .

كتابه الأستاذ : **جعفر**