مذكرة رقم 26:	السنة الدراسية : 2023-2024	الأستاذة : جلام جميلة

ثانوية : محمد حسين بن زيان–واد الجمعة–   **ميدان التعلم :** تحليل

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية   **المحور :** النهايات

المدة : 2ساعة   **الموضوع :** نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي|مالانهاية

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع أنترنت ، المنهاج

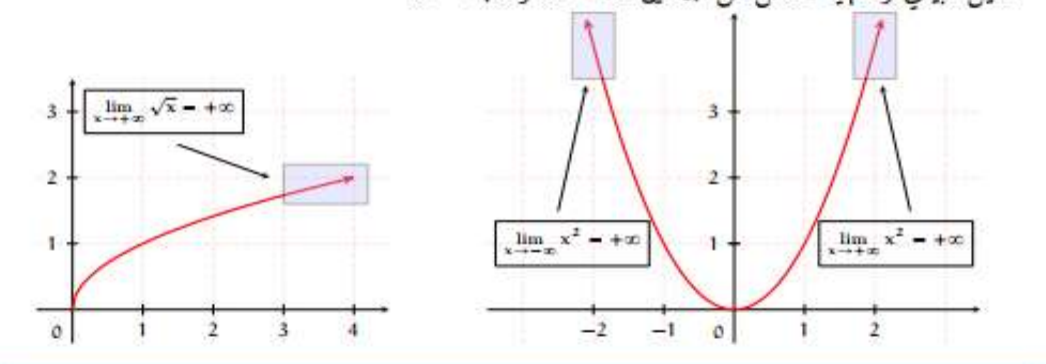
المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق :	**نشاط1 ص 110**	
بناء المفاهيم:	**نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي** **تعريف:** القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أنه يمكن جعل $f(x)$ أكبر من أي عدد حقيقي إذا كـــان x قريبا بالقدر الكافي من x_0 ونكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ **مثال:** f الدالة المعرفة على $R-\{3\}$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ (من النشاط 1) نلاحظ انه كلما اقترب x من العدد 3 بالقدر الكافي إلا و أخذ $f(x)$ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد نقول في هذه الحالة ان **نهاية** f **هي** $+\infty$ **عند 3** و نكتب $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$ **مبرهنة:** a عدد حقيقي ، نقبل النتائج التالية بدون برهـان: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$ مثال $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=+\infty$ نشاط 3 صفحة110 **نهاية غير منتهية عند مالانهاية** **تعريف:** القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه يمكن جعل $f(x)$ أكبر من أي عدد حقيقي إذا كـــان x كبيرا بالقدر الكافي ونكتب: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$	

ملاحظة : يمكن الحصول على تعاريف لنهايات مماثلة بنفس الطريقة

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

مثال

التمثيل البياني و النهايات لكل من الدالتين $x \longmapsto x^2$ و $x \longmapsto \sqrt{x}$



تمرين

أحسب النهايات التالية

تقويم :

1- $\lim_{x\to 7} \frac{1}{(x-7)^2}+8$

2- $\lim_{x\to -\infty} x^4-3$

3- $\lim_{x\to +\infty} x^4-3$

تمرين رقم15.14.16 صفحة 132

الأستاذة : جلام جميلة	السنة الدراسية : 2023-2024	مذكرة رقم :27

ثانوية : محمد حسين بن زيان–واد الجمعة– **ميدان التعلم :** تحليل

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية **المحور :** النهايات

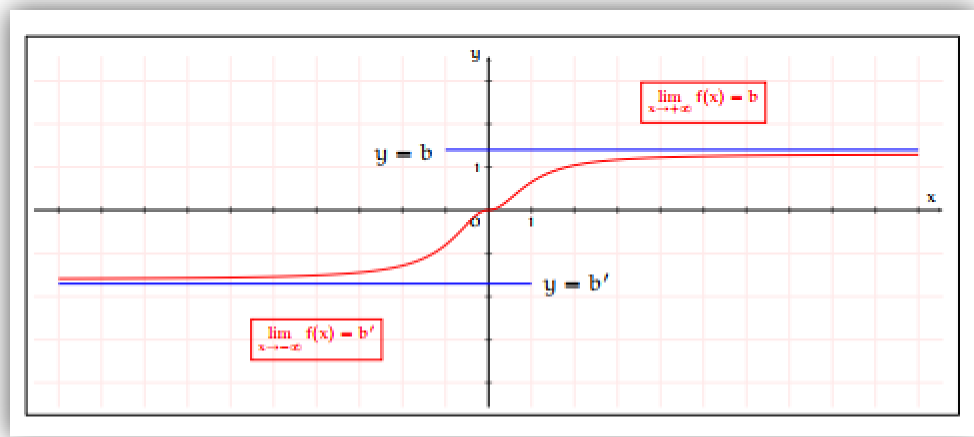
المدة : 2ساعة **الموضوع :** نهاية المنتهية عند المالانهاية

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع أنترنت ، المنهاج

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق : بناء المفاهيم:	نشاط 4 صفحة 110 النهاية المنتهية عند مالا نهاية : **تعريف:** القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي b يعني أنه يمكن جعل $f(x)$ قريب بالقدر الكافي إذا كان x كبيرا بالقدر الكافي ونكتب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ **مثال :** لتكن الدالة f المعرفة على $R-\{0\}$ كما يلي: $f(x)=-3+\frac{1}{x^2}$ نلاحظ أن f تأخذ قيما قريبة من -3 بالقدر الذي نريد إذا كان x يأخذ قيما موجبة جد كبيرة نقول في هذه الحالة ن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي -3 ونكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$ و نلاحظ أن f تأخذ قيما قريبة من -3 بالقدر الذي نريد إذا كان x يأخذ قيما سالبة ويأخذ $\|x\|$ جد كبيرة نقول في هذه الحالة ن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي -3 ونكتب $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$ **مبرهنة:** a عدد حقيقي ، نقبل النتائج التالية بدون برهان: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+a}=0$ ، $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+a}=0$. **التفسير البياني لنهاية منتهية لدالة عندما يؤول x إلى $\pm\infty$:** **المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل** **تعريف:** (C_f) هو التمثيل البياني لدالة f في معلم و. b عدد حقيقي . القول ان المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $x=b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ او $-\infty$ يعني ان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ او $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$ على الترتيب	

تقويم :	 تمرين 43،44 صفحة136	

الأستاذة : جلام جميلة	السنة الدراسية : 2023-2024	مذكرة رقم :28

ثانوية : محمد حسين بن زيان–واد الجمعة–

ميدان التعلم : تحليل

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية

المحور : النهايات

المدة : 2ساعة

الموضوع : نهاية من يمين و اليسار

المكتسبات القبلية :

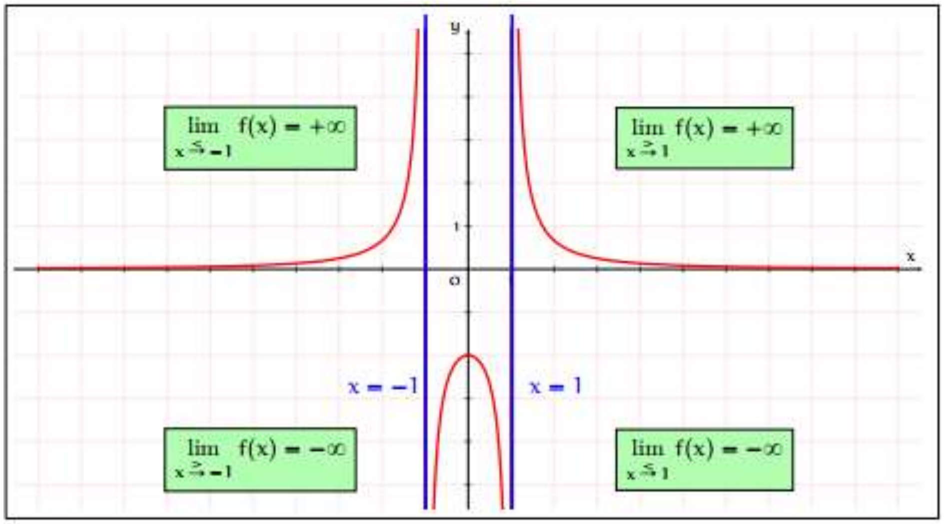
المكتسبات المستهدفة : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع أنترنت ، المنهاج

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق :	نشاط 2 صفحة 110	
بناء المفاهيم:	**النهاية من اليمين و النهاية من اليسار عند عدد حقيقي:** **تعريف:** القول أن نهاية الدالة f على يمين x_0 (بقيم كبرى) هي $+\infty$ يعني أنه يمكن جعل $f(x)$ كبيرة جدا بالقدر الذي نريد إذا كان x قريبا بالقدر الكافي من x_0 حيث $x > x_0$ ونكتب: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x \xrightarrow{x>x_0} x_0} f(x) = +\infty$. **تعريف:** القول أن نهاية الدالة f على يسار x_0 (بقيم صغرى) هي $-\infty$ يعني أنه يمكن جعل $f(x)$ صغيرة جدا بالقدر الذي نريد إذا كان x قريبا بالقدر الكافي من x_0 حيث $x < x_0$ ونكتب: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = -\infty$ أو $\lim\limits_{x \xrightarrow{x<x_0} x_0} f(x) = -\infty$. **ملاحظة :** يمكن الحصول على تعاريف لنهايات مماثلة بنفس الطريقة $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = +\infty$. **مبرهنة:** a عدد حقيقي ، نقبل النتائج التالية بدون برهـــــان: $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} \frac{1}{x-a} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} \frac{1}{x-a} = -\infty$ **التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما يؤول x إلى x_0 :** **المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب** تعريف: (C_f) هو التمثيل البياني لدالة f في معلم. و x_0 عدد حقيقي .اذا كانت النهاية (او النهاية من اليمين او من اليسار) للدالة f عند العدد a هي $+\infty$ او $-\infty$ نقول ان المستقيم الموازي	

لمحور التراتيب ذو المعادلة $x = x_0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

مثال



تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = -1 + \dfrac{1}{x+1}$ و ليكن $(\mathcal{C}_f)$

تقويم : تمثيلها البياني في معلم.

1) أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، مـــاذا تستنتج؟

2) شكل جدول تغيرات الدالة f

3) عين نقاط تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع محور الفواصل ثم مع محور التراتيب ثم أرسم المنحني $(\mathcal{C}_f)$.

تمرين رقم 24،26،32صفحة133

مذكرة رقم :29	السنة الدراسية : 2023-2024	الأستاذة : جلام جميلة

ثانوية : محمد حسين بن زيان–واد الجمعة– **ميدان التعلم :** تحليل

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية **المحور :** النهايات

المدة : 2ساعة **الموضوع :** العمليات على النهايات

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : حساب نهاية دالة عند x_0 او $+\infty$ او $-\infty$ باستعمال المبرهنات الاولية على النهايات وإزالة حالة عدم التعيين

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع أنترنت ، المنهاج

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>الانطلاق :

بناء المفاهيم:</td><td>

تهيئة نفسية

عمليات على النهايات

ملاحظات:

1. يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف
2. اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند عدد حقيقي x_0 من مجموعة تعريفها فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
3. اذا قبلت دالة f نهاية عند عدد حقيقي x_0 فان هذه النهاية وحيدة
4. يمكن لدالة ان لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها , فمثلا الدالة $x\to\sin x$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$

المبرهنات الأولية على النهايات:

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

</td><td></td></tr>
</table>

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حـــــاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}^*$	l	0	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	0	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	ح ع ت	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين" (ح ع ت)

خواص:

1. النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.
2. النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.

تطبيق: احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3-x^2+x+4\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x+3}{x^2+1}$

تقويم :

تطبيق: f دالة معرفة على $R-\{-2\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x+2}$

1. تحقق ان من اجل كل x من $R-\{-2\}$ فان: $f(x)=ax+\frac{c}{x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما
2. احسب نهايات f عند حدود مجموعة التعريف

تطبيق: f و g و h و k دوال معرفة على R كما يلي: $f(x)=2x-3$ و $g(x)=-2x^2+5x-2$ و $h(x)=-2x^3-10x+8$ و $k(x)=2x^2-2x$.

احسب ما يلي: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

تمرين18، 19،20صفحة 132

مذكرة رقم: 30

السنة الدراسية : 2023–2024

الأستاذة : جلام جميلة

ثانوية : محمد حسين بن زيان–واد الجمعة–

ميدان التعلم : تحليل

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية

المحور : النهايات

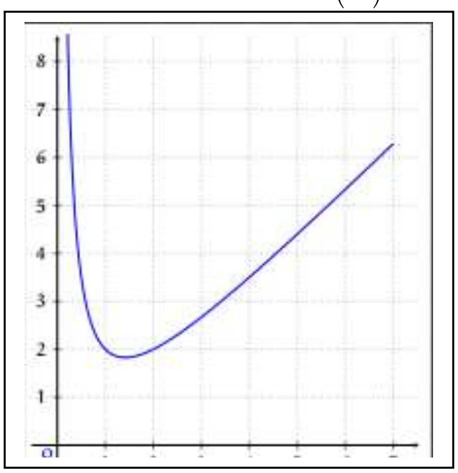
المدة : 2ساعة

الموضوع : المستقيم المقارب المائل

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : التبرير ان مستقيم معلوم هو مستقيم مقارب المائل

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع أنترنت ، المنهاج

المراحل	عناصر الدرس	المدة
الانطلاق : بناء المفاهيم:	نشـــــاط: ينسب المستوي إلى معلم و ليكن المستقيم $(\Delta): y = x - 1$ و الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$.  1) بين أنه من أجل x من $\mathbb{R}^*$ أن: $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}$ حيث a و b أعداد حقيقة يطلب تعيينها. 2)أحسب $f(x)-(x-1)$ إستنتج الوضع النسبي بين $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ). 3) أحسب $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \left[f(x)-(x-1)\right]$ ، مـــاذا تستنتج؟ **المستقيم المقارب المائل:** **تعريف:** ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ)المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني(C_f)عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)	

	ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو $-\infty$. **مثال:** نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِ $f(x)=-3x+2+\frac{2}{(x-1)^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم. لدينا $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(x-1)^2}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(x-1)^2}=0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-3x+2$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$. تمرين 45،46صفحة 136	
		تقويم :

مذكرة رقم :31	السنة الدراسية : 2023-2024	الأستاذة : جلام جميلة

ثانوية : محمد حسين بن زيان–واد الجمعة– **ميدان التعلم :** تحليل

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية **المحور :** النهايات

المدة : 2ساعة **الموضوع :** حل مسائل

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : حل مسائل

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع أنترنت ، المنهاج

المراحل	عناصر الدرس	المدة
	مسألة الأولى : الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x^2+5x+1}{x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ 1. أ) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)$ فسر النتائج بيانيا . ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. 2. عين الأعداد a, b و c بحيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ فإن : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ 3. بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ فإن : $f'(x)=\frac{3(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها . 4. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=3x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f). ب) أدرس الوضع النسبي لـ(Δ) و للمنحنى (C_f). جـ) بين أن $A(-2;-7)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) . د) تحقق من أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين α و β حيث $\alpha \in]-1.5;-1,4[$ $\alpha \in]-0,3;-0,2[$. هـ) مثل بيانيا كل من (Δ) و (C_f) .	

5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

مسألة الثانية :

f دالة عددية معرفة على ℝ بـ: $f(x)=x^3-x^2-x-2$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1. أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ ، $-\infty$
2. عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أ- تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=(x-2)(x^2+x+1)$$

ب- استنتج نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.

4. أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5. بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

6. ب- بين انه من اجل كل عدد حقيقي . $f(x)-(-3x+8)=-(x-2)^3$:

ج- أستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المماس (T)

د- برر أن E نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

5.أ- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x(x-3)^2$

ب- استنتج احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

6.أحسب $f(4)$ ثم أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) .