MATH

الأستاذ الكالي خليل

2 AS

الكالي للرياضيات

الشعب العلمية

النهايات

- جميع الشعب العلمية
- تمارين متنوعة شاملة
- شرح مبسط
- دروس وتمارين

من اعداد

الأستاذ الكالي خليل

لمتابعتنا عبر صفحتنا على الفيسبوك او على اليوتيوب قومو بالظغط على الروابط الاتية

ELKALI MATH

تمرين 01

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

1) $f(x) = x^2 + x + 1 \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^3 - x + 5 \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

3) $f(x) = -3x^2 + 5x \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

4) $f(x) = -3x^3 + 3x + 1 \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

تمرين 02

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \ / \ \ D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2} \ / \ \ D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

3) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} \ / \ \ D_f =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

6) $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x^2+1} \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \frac{\cos(x+3)}{x^2+3} \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

تمرين 03

ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x^2 + 3x + 1 \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^3 + 2x + 1 \ / \ \ D_f = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{2x^2+5x+10}{2x+4} \ / \ \ D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

4) $f(x) = \frac{x^2+x}{x-2} \ / \ \ D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

5) $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{x+2} \ / \ \ D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

6) $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} \ / \ \ D_f = \mathbb{R} - \{-1,3\}$

7) $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

8) $f(x)=\frac{x^2-8x+19}{x-3}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ / $D_f=\mathbb{R}$

10) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ / $D_f=]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$

تمرين 04

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ ب: $f(x)=\frac{3x^2+5x+6}{x^2}$

- ادرس نهايات الدالة عند حدود مجموعة تعريفها، مبينا المستقيمات المقاربة ل (C) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم.

تمرين 05

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ب: $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ، $-\infty$

2) ادرس وضيفة المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم المقارب المائل (Δ).

تمرين 06

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ ب: $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$

1) عين العددين الحقيقين a و b ،بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\neq 2$ تكون $f(x)=a+\frac{b}{x-2}$

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3) استنتج المستقيمات المقاربة ل (C) المنحنى الممثل للدالة f

تمرين 07

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ب: $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x-1}$

1) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\neq 2$ تكون $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل ل (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$ ، $-\infty$

4) ادرس الوضع النسبي ل (C_f) بالنسبة (D).

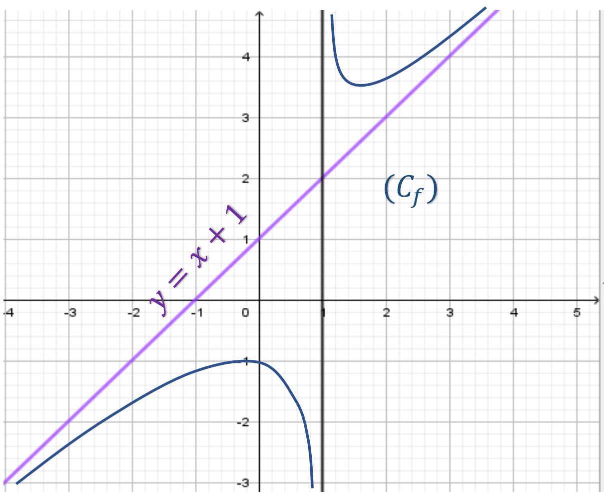
تمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2,1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	-3	↗	$+\infty$ ǁ $-\infty$	↗	$+\infty$ ǁ $+\infty$	↘	1

- عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
- حدد المستقيمات المقاربة ل (C_f) المنحنى الدالة f

تمرين 09

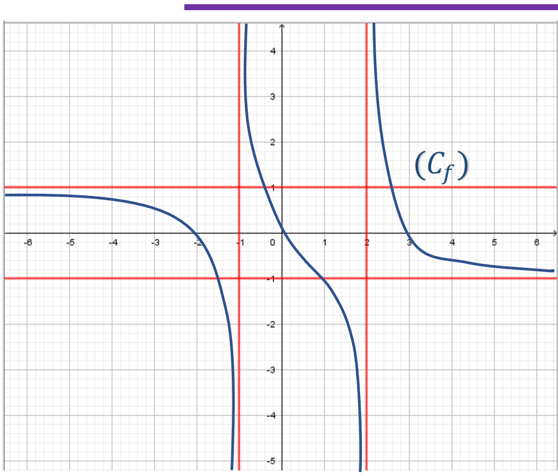


الدالة f تمثيلها البياني (C_f) المبين في الشكل المقابل

بقراءة بيانية :

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f
2) عين نهايات الدالة f ،عند حدود مجموعة تعريفها.
3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)
4) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$

تمرين 10



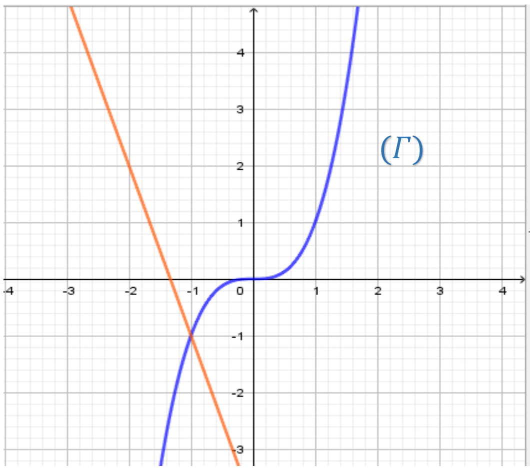
الدالة f تمثيلها البياني (C_f) المبين في الشكل المقابل

بقراءة بيانية:

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f
2) عين نهايات الدالة f ،عند حدود مجموعة تعريفها.
3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

مسألة 01

I) المستوي منسوب الى المعلم م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ في الشكل المرافق,(Γ) المنحنى الممثل للدالة $x \to x^3$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -3x - 4$



g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = x^3 + 3x + 4$

بقراءة بيانية:

أ) حدد وضعية (Γ) بالنسبة الى (Δ) على $\mathbb{R}$

ب) استنتج إشارة $g(x)$

II) الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ- بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4) أنشئ (Δ) و (C_f) (يعطى: $f(1,25) \approx 0$)

5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

مسألة 02

I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x-1}$, وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ ، $-\infty$ و -2

2) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ تكون $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

3) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعين معادلة له ثم ادرس وضعية(C_f) بالنسبة ل(Δ).

4) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) بين ان النقطة $\omega(1,4)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

6) عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملين المحورين.

7) ارسم كل من (C_f) والمستقيمات المقاربة

8) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $m^2 + 2x - 1 - mx + m = 0$

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $g(x) = |f(x)|$

أ) اكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g بالاعتماد على (C_f)

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ ب: $h(x) = f(|x|)$

أ) اكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

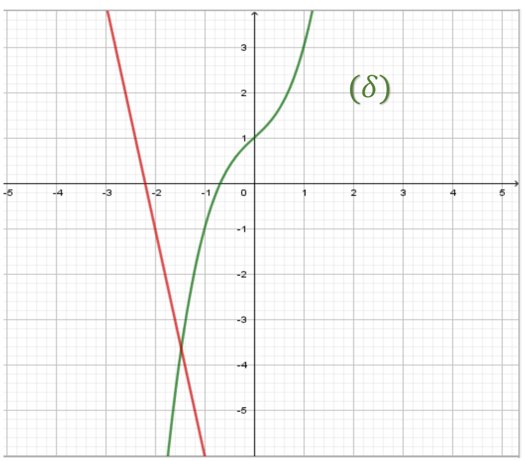
ب) ارسم (C_h) منحنى الدالة h بالاعتماد على (C_f)

IIII) لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $k(x) = \frac{x^2+4x+2}{x}$

أ) بين من اجل $x \neq 0$ ان: $k(x) = f(x+1)$

ب) استنتج ان (C_h) منحنى الدالة h هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

مسألة 03



المستوي منسوب الى معلم متجانس

I) (δ) التمثيل البياني للدالة $x \to h(x) = x^3 + x + 1$ و (D) التمثيل البياني للمستقيم ذو المعادلة $y = -5x - 11$, α هي فاصلة تقاطع (D) و (δ).

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (δ) بالنسبة الى (Δ) على المجال $\mathbb{R}$

2) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = x^3 + 6x + 12$

أ- بين من اجل $x \in \mathbb{R}$ يكون $g(x) = h(x) - y$

ب- استنتج إشارة $g(x)$

ت- تحقق ان $-1.48 < \alpha < -1.47$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$

1) عين الاعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من اجل كل عدد حقيقي x تكون: $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+2}$

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) أ- بين من اجل x عدد حقيقي: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ- بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

5) بين ان $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ،ثم استنتج حصر للعدد $f(\alpha)$

6) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (يعطى: $f(1,81) \approx 0$)

حل تمرين 01

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = -\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty$

حل تمرين 02

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

x		1	
$x-1$	$-$	0	$+$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\overbrace{x+1}^{2}}{\underbrace{x-1}_{0^+}} = +\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$$

2) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ $+\infty$	
$x+2$	$-$ $\quad$ 0	$+$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{\overbrace{x^2+2x+1}^{\to 1}}{\underbrace{x+2}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{\overbrace{x^2+2x+1}^{\to 1}}{\underbrace{x+2}_{\to 0^-}} = -\infty$$

3) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ / $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$ / $D_f =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + x = +\infty$$

اذن $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$

5) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ / $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{|x| \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

6) $f(x)=\frac{\sin(x+1)}{x^2+1}$ / $D_f=\mathbb{R}$

نعلم ان $-1<\sin(x)<1$

ومنه $\frac{-1}{x^2+1}<\frac{\sin(x)}{x^2+1}<\frac{1}{x^2+1}$

اذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\underbrace{\frac{-1}{x^2+1}}_{\mathbf{0}}<\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2+1}<\lim\limits_{|x|\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\mathbf{0}}$

اذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$

7) $f(x)=\frac{\cos(x+3)}{x^2+3}$ / $D_f=\mathbb{R}$

نعلم ان $-1<\cos(x)<1$

ومنه $\frac{-1}{x^2+1}<\frac{\sin(x)}{x^2+1}<\frac{1}{x^2+1}$

اذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\underbrace{\frac{-1}{x^2+1}}_{\mathbf{0}}<\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2+1}<\lim\limits_{|x|\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\mathbf{0}}$

اذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$

حل تمرين 03

1) $f(x)=x^2+3x+1$ / $D_f=\mathbb{R}$

النهايات:

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}x^2=+\infty$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$f'(x)=2x+3$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

التغيرات :

الدالة f متزايدة على المجال $\left]\frac{-3}{2},+\infty\right[$.

الدالة f متناقصة على المجال $\left]-\infty,\frac{-3}{2}\right[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{-3}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f(x)=x^3+2x+1$ / $D_f=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$$f'(x)=3x^2+2$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	

التغيرات:

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;+\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

3) $f(x)=\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

النهايات :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\<}}\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}=-\infty$$

8, 0^-

$$\lim_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\>}}\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}=+\infty$$

8, 0^+

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;-2[$ و المجال $]-2;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(4x+5)(2x+1)-(2)(2x^2+5x+10)}{(2x+4)^2}=\frac{4x(x+4)}{(2x+4)^2}$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

تغيرات:

⌫ الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty,-4[$ والمجال $]0;+\infty[$

⌫ الدالة f متناقصة على المجال $]-4;-2[$ والمجال $]-2;0[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-4)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

4) $f(x)=\frac{x^2+x}{x-2}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

النهايات :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to 2}}\frac{\overset{6}{\overbrace{x^2+x}}}{\underset{0^-}{\underbrace{x-2}}}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 2}}\frac{\overset{6}{\overbrace{x^2+x}}}{\underset{0^-}{\underbrace{x-2}}}=+\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;2[$ والمجال $]2;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

تغيرات :

- الدالة f متزايدة على المجال $]2+\sqrt{6},+\infty[$ والمجال $]-\infty;2-\sqrt{6}[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]2-\sqrt{6};2[$ والمجال $]2;2+\sqrt{6}[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(2-\sqrt{6})$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$f(2+\sqrt{6})$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x+2}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

النـهايات:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\<}}\frac{\overbrace{2x^2+3x+6}^{4}}{\underbrace{x+2}_{0^-}}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{\overset{\nearrow 4}{2x^2+3x+6}}{\underset{\searrow 0^+}{x+2}} = +\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;-2[$ والمجال $]-2;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+2)-(x^2+3x+6)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

تغيرات :

- الدالة f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ والمجال $]-\infty,-4[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]-2;0[$ والمجال $]-4;-2[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-4)$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

6) $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{-1,3\}$

النهايات :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\>}} \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} = +\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;-1[$ والمجال $]-1;3[$ والمجال $]3;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]1;3[$ والمجال $]3;+\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-1[$ والمجال $]-1;1[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

$$7)\quad f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}\quad / \quad D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

النهايات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=-\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ والمجال $]1;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-2x^2)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(3x^2-4x)(x-1)-2(x^3-2x^2)}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3}$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3x+4		$+$		$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty, 0[$ والمجال $]1; +\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]0; 1[$

جدول التغيرات:

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

8) $f(x) = \frac{x^2-8x+19}{x-3}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

النهايات:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{\overset{\to 4}{x^2-8x+19}}{\underset{\to 0^+}{x-3}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{\overset{\to 4}{x^2-8x+19}}{\underset{\to 0^-}{x-3}} = -\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;3[$ والمجال $]3;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(2x-8)(x-3)-(x^2-8x+19)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+3}{(x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]5;+\infty[$ والمجال $]-\infty;1[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]3;5[$ و المجال $]1;3[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$-\infty \| +\infty$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

9) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ / $D_f = \mathbb{R}$

النهايات:

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$

اذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;0[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

10) $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$ / $D_f =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$

النهايات:

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2-2x = +\infty$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]2;+\infty[$ والمجال $]-\infty;0[$

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	-1	2	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0 $+$		$+$
$f'(x)$	$-$	//	//		$+$

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]2;+\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;0[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	//		$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow f(0)$	//		$f(2) \nearrow +\infty$

حل تمرين 04

1) $f(x)=\frac{3x^2+5x+6}{x^2}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{3x^2+5x+6}^{6}}{\underbrace{x^2}_{0^+}}=+\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $y=3$ مقارب افقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

حل تمرين 05

1) $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

اذن المنحنى المقارب (C_f) يقارب (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ عند $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي لدينا

$$f(x)-y=\frac{1}{x-1}$$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

حل تمرين 06

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-2}\ /\ D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

1) تعين a و b

$$f(x)=a+\frac{b}{x-2}=\frac{ax-2a+b}{x-2}$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a=3 \\ -2a+b=1 \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} a=3 \\ -2(3)+b=1 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases}$$

اذن $f(x) = 3 + \frac{7}{x-2}$

2) حساب النهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفهما

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{\substack{x\to2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2 \\ >}} \frac{\overset{\nearrow 7}{3x+1}}{\underset{\searrow 0^+}{x-2}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2 \\ <}} \frac{\overset{\nearrow 7}{3x+1}}{\underset{\searrow 0^-}{x-2}} = -\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $y = 3$ مقارب افقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

حل تمرين 07

1) تعين a ، b و c

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} \boldsymbol{x^2+3x+2} & \boldsymbol{x-1} \\ \cline{2-2} \boldsymbol{-x^2+x} & \boldsymbol{x+4} \\ \hline \boldsymbol{4x+2} & \\ \boldsymbol{-4x+4} & \\ \hline \boldsymbol{6} & \end{array}$$

ومنه

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+4)+6}{x-1} = x + 4 + \frac{6}{x-1}$$

اذن $f(x) = x + 4 + \frac{6}{x-1}$

أي $\boxed{a = 1}$ $\boxed{b = 4}$ $\boxed{c = 6}$

طريقة 02

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$$

$$= \frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 3 \\ -b + c = 2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b - 1 = 3 \\ -b + c = 2 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ -4 + c = 2 \end{cases}$$

اذن

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ -4 + c = 2 \end{cases}$$

ومنه $f(x) = x + 4 + \frac{6}{x-1}$

2) حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{x^2+3x+2}{x+2} = +\infty$$

7, 0^+

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{x^2+3x+2}{x+2} = -\infty$$

7, 0^-

3) تبيان ان (Δ) ذو المعادلة $y = x + 4$ مقارب ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x-1} = 0$$

اذن (Δ) ذو المعادلة $y = x + 4$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

4) دراسة الوضعية :

لدينا $f(x)-6=\frac{6}{x-1}$

x	$-\infty$ $\quad$ 1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

حل تمرين 08

1) تعين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)=+\infty$

2) تحديد المستقيمات المقاربة ل (C_f) من الدالة f

- المستقيم ذو المعادلة $x=e$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب افقي ل (C_f) عند $+\infty$
- المستقيم ذو المعادلة $y=-3$ مقارب افقي ل (C_f) عند $-\infty$

حل تمرين 09

1) مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}-\{1\}$
2) تعين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = -\infty$$

3) تعين معادلات المستقيمات المقاربة ل المنحنى (C_f)

- المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$..

4) الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

حل تمرين 10

1) مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R} - \{-1,2\}$

2) تعين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to -1}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to -1}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x) = -\infty$$

3) تحديد المستقيمات المقاربة ل (C_f) من الدالة f

- المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$..
- المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب افقي ل (C_f) عند $-\infty$
- المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ مقارب افقي ل (C_f) عند $+\infty$

حل المسألة 01

(1

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (D) في النقطة $A(-1;-1)$	(C_f) تحت (D)

ب – إشارة $g(x)$

$$g(x) = x^3 + 3x + 4 = x^3 - (-3x - 4)$$

ومنه

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$$

(1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

2) أ- تبيان من أجل $x \in \mathbb{R}$ يكون: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^3+3x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

وهو المطلوب.

ب- تغيرات:

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ والمجال $]-\infty;-1[$

الدالة f متناقصة على المجال $]-1;0[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ- تبيان ان (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-y=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3-2}{x^2+1}-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3-2-x(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$$

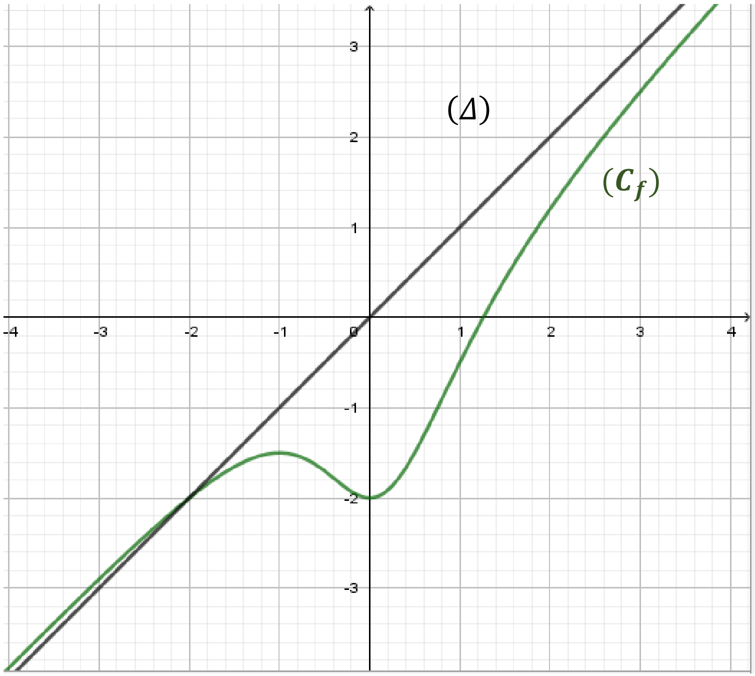
وهو المطلوب.

ب- الوضع النسبي :

لدينا $f(x)-y=\frac{-2-x}{x^2+1}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(Δ) فوق (C_f)	(Δ) يقطع (C_f) في النقطة $B(-2;-2)$	(Δ) تحت (C_f)	

4) الرسم البياني:



5) المناقشة البيانية

لدينا $f(x) = m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات التي معادلاتها من الشكل $y = m$

$m \in]-\infty; -2[$ للمعادلة حل واحد سالب تماما.

$m = -2$ للمعادلة حل معدوم واخر سالب تماما.

$m \in]-2; \frac{-3}{2}[$ للمعادلة حل موجب تماما وحلان سالبان تماما.

$m = \frac{-3}{2}$ حل سالب تماما وآخر موجب تماما.

$m \in]\frac{-3}{2}; +\infty[$ للمعادلة حل واحد موجب تماما.

حل مسألة 02

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$$

1) حساب النهايات للدالة f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to1}} \frac{\overset{\nearrow 2}{x^2+2x-1}}{\underset{\searrow 0^+}{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to1}} \frac{\overset{\nearrow 7}{x^2+2x-1}}{\underset{\searrow 0^-}{x-1}} = -\infty$$

2) تعين a ، b و c

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2+x & x+3 \\ \hline 3x-1 & \\ -3x+3 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

اذن $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)+2}{x-1} = x+3+\frac{2}{x-1}$

ومنه $f(x) = x+3+\frac{2}{x-1}$

أي $a=1$ ، $b=3$ ، $c=2$

3) استنتاج ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

اذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

الوضع النسبي:

لدينا $f(x) = \frac{3}{x-1}$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	
$x-1$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

4) الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ والمجال $]-\infty;1[$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x+2x-2-x^2-2x+1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]1+\sqrt{2},+\infty[$ والمجال $]-\infty,1-\sqrt{2}[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]1-\sqrt{2},1[$ والمجال $]1,1+\sqrt{2}[$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\infty \; \| \; +\infty$	$\searrow$	$f(1+\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

5) تبيان أن $\Omega(1,4)$ مركز تناظر

أي تبيان من أجل $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2(1)-x\in\mathbb{R}-\{1\} \\ f(2(1)-x)+f(x)=2(4) \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} 2-x\in\mathbb{R}-\{1\} \\ f(2-x)+f(x)=8 \end{cases}$$

أولا:

$x \in \mathbb{R} - \{1\}$ يكافئ $x \neq 1$

يكافئ $-x \neq -1$

يكافئ $2 - x \neq 1$

يكافئ $2 - x \in \mathbb{R} - \{1\}$

ثانيا:

$$f(2-x) + f(x) = (2-x) + 3 + \frac{2}{2-x-1} + x + 3 + \frac{2}{x-1}$$
$$= 2 - x + 3 + \frac{2}{1-x} + x + 3 + \frac{2}{x-1}$$
$$= 8 + \frac{2}{-(x-1)} + \frac{2}{x-1}$$
$$= 8$$

وهو المطلوب.

6) تقاطع (C_f) مع (yy')

$$f(0) = \frac{0^2+2(0)-1}{0-1} = 1$$

اذن (C_f) يقطع (yy') في النقطة $A(0,1)$

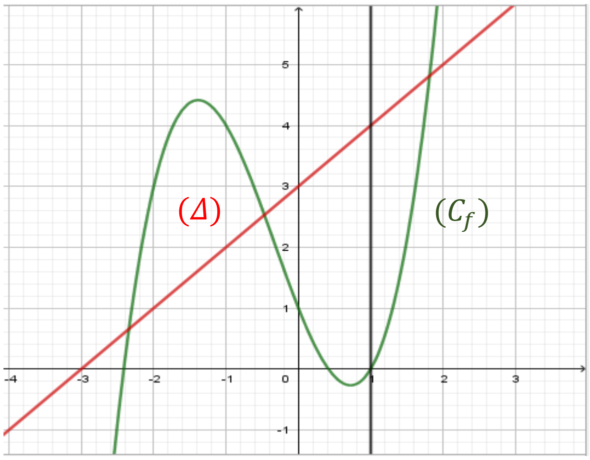
تقاطع (C_f) مع (xx')

$f(x) = 0$ يكافئ $x^2 + 2x - 1 = 0$

يكافئ $x = -1 + \sqrt{2}$ او $x = -1 - \sqrt{2}$

اذن (C_f) يقطع (xx) في النقطة $A(-1+\sqrt{2},0)$ والنقطة $C(-1-\sqrt{2},0)$

7) الرسم



8) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m.

لدينا $m^2+2x-1-mx+m=0$

$$m^2+2x-1=mx-m$$

$$m^2+2x-1=m(x-1)$$

$$\frac{x^2+2x-1}{x-1}=m$$

$$f(x)=m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات التي معادلتها من الشكل $y=m$.

إذا كان:

$m\in]-\infty;1[$ يوجد حل سالب تماما واخر موجب تماما.

$m=1$ يوجد حل معدوم وأخر سالب تماما

$m\in]1;f(1-\sqrt{2})[$ يوجد حلان سالبان تماما.

$m=f(1-\sqrt{2})$ يوجد حل سالب تماما.

$m\in]f(1-\sqrt{2})\,;f(1+\sqrt{2})[$ لا يوجد حل.

$m=f(1+\sqrt{2})$ يوجد حل موجب تماما.

$m\in]f(1+\sqrt{2});+\infty[$ يوجد حلان موجبان تماما.

II) $g(x)=|f(x)|\ /\ \ D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

أ) كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$\|\|$	$+$

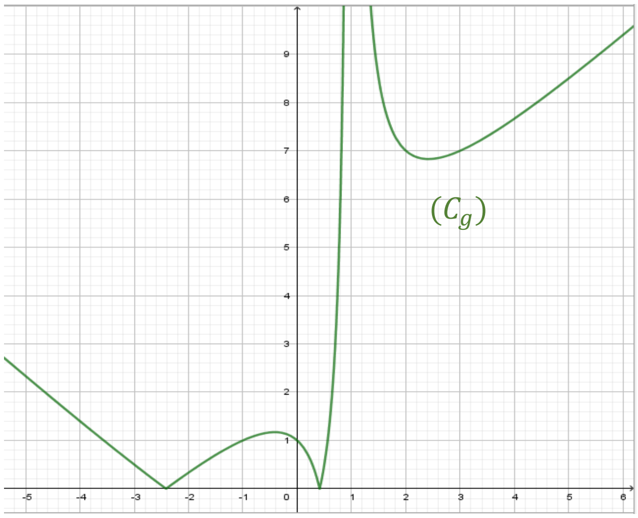
$$\begin{cases} f(x) & ; \quad x\in[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\,]\cup]1;+\infty[\\ -f(x) & ; \quad x\in[-\infty;-1-\sqrt{2}\,[\cup]-1+\sqrt{2};1[\end{cases}$$

ب) تفسير:

المنحنى (C_g) ينطبق على (C_f) إذا كان $x\in[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\,]\cup]1;+\infty[$

المنحنى (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل إذا كان $x\in]-\infty;-1-\sqrt{2}\,[\cup]-1+\sqrt{2};1[$

الرسم البياني:



$$h(x) = f(|x|) \;\; / \quad D_h = \mathbb{R} - \{-1,1\}$$

أ- كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \in [0; 1\, [\cup] 1; +\infty[\\ \\ f(-x) & ; \quad x \in [-\infty; -1\, [\cup] -1; 0[\end{cases}$$

ب- أولا تبيان ان h زوجية.

$x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ يكافئ $x \neq -1 \quad x \neq 1$

يكافئ $-x \neq 1$ وَ $-x \neq -1$

يكافئ $-x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

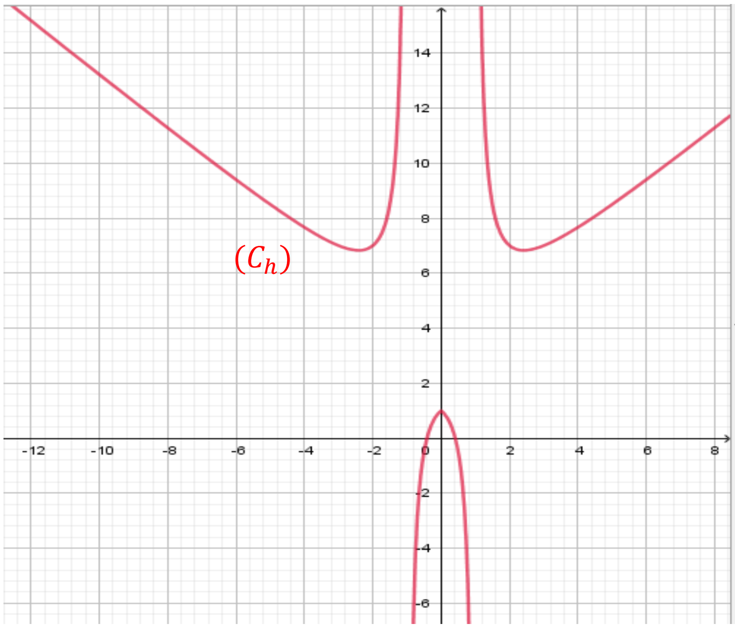
$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

اذن h زوجية.

تفسير:

المنحنى (C_h) ينطبق على (C_f) إذا كان $x \in [0; 1\, [\cup] 1; +\infty[$

ولرسم بقية المنحنى نعتمد على الخواص الهندسية للدالة الزوجية أي منحنى الدالة h متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.



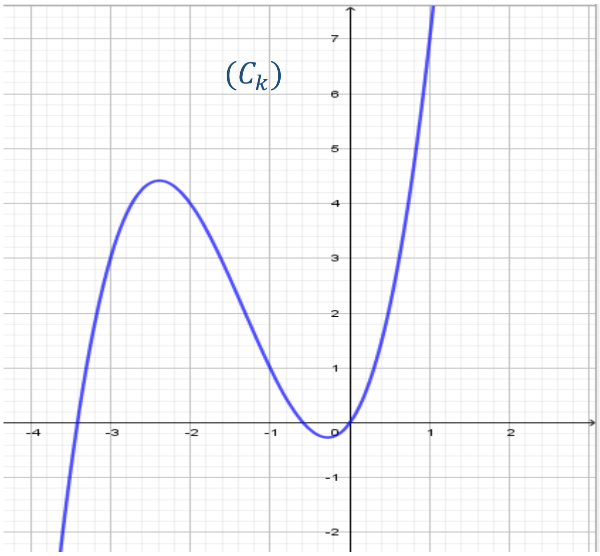
III) $k(x) = \frac{x^2+4x+2}{x} \quad / \quad D_k = \mathbb{R}^*$

أ) تبيان ان من أجل $x \neq 0$ $\quad k(x) = f(x+1)$

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^2+2(x+1)-1}{(x+1)-1} = \frac{x^2+2x+1+2x+2-1}{x} = \frac{x^2+4x+2}{x}$$

اذن $\quad f(x+1) = k(x)$

وهو المطلوب.



حل المسألة 03

ا)

1) الوضع النسبي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
الوضعـــية	(δ) تحت (D)	(δ) يقطع (D) في النقطة $A(\alpha;\alpha-11)$	(δ) فوق (D)

2) أ- تبيان من أجل $x \in \mathbb{R}$ $g(x)=h(x)-y$

$$h(x)-y = x^3+x+1-(-5x-11)$$
$$= x^3+x+1+5x+11$$
$$= x^3+6+12$$
$$= g(x)$$

و هو المطلوب.

ب) استنتاج إشارة $g(\alpha)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

ج) تحقق من أن $-1{,}48 < \alpha < -1{,}47$

$$g(-1{,}48) \approx -0{,}12$$
$$g(-1{,}47) \approx 0{,}003$$
$$g(-1{,}48) \times g(-1{,}47) < 0$$

اذن $-1{,}48 < \alpha < -1{,}47$

3) تعين a ، b ، c و d

$$\begin{array}{r|l} x^3-6 & x^2+2 \\ \cline{2-2} -x^3+2x & x \\ \hline -2x-6 & \end{array}$$

اذن $f(x)=\frac{x(x^2+2)-2x-6}{x^2+2}=x+\frac{-2x-6}{x^2+2}$

ومنه $f(x)=x+\frac{-2x-6}{x^2+2}$

أي $a=1$ ، $b=0$ ، $c=-2$ ، $d=-6$

4) حساب النهايات للدالة f عند أطراف حدود مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

5) أ- تبيان من اجل $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+2)-2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2}=\frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)}=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

ب) تغيرات وجدول تغيرات:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]\alpha,+\infty[$ والمجال $]-\infty,0[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]0,\alpha[$

5) أ) تبيان ان (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-y=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-2x-6}{x^2+1}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$$

وهو المطلوب.

ب) دراسة الوضع النسبي :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(-3;-3)$	(C_f) تحت (Δ)

6) تبيان ان $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ أي تبيان ان $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$

$$f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha=\frac{2(\alpha^3-6)-3\alpha(\alpha^2+2)}{\alpha^2+2}$$

$$\frac{\alpha^3-6\alpha-12}{\alpha^2+2}=\frac{-g(\alpha)}{\alpha^2+2}=0$$

اذن $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

حصر $f(\alpha)$

لدينا

$$-1{,}48<\alpha<-1{,}47$$

$$-\frac{48}{25}<f(\alpha)<-\frac{441}{200}$$

وهو المطلوب.

7) رسم المنحنى