ثانوية الشهيد حميدي عيسى - أولاد دراج - المسيلة

يسرني أن أتقدم لكم بهذا العمل المتواضع والمتمثل في مذكرات مادة الرياضيات لسنة ثانية ثانوي شعبة:

★ علوم تجريبية ★ رياضيات ★ تقني رياضي ★

يتضمن هذه العمل:

- **مذكرة 31:** نهاية دالة عند عدد حقيقي(المنتهية وغير المنتهية).
- **مذكرة 32:** نهاية دالة عند مالانهاية (المنتهية وغير المنتهية).
- **مذكرة 33:** العمليات على النهايات.
- **مذكرة 34:** المستقيم المقارب المائل.
- **مذكرة 35:** دراسة دالة.

لا تنسونا من صالح الدعاء للوالدين الكريمين ولي. محبكم في الله الأستاذ: فراحتية المحفوظ

آخر تحديث: 24 / 01 / 2023

السنة الدراسية: 2022 / 2023

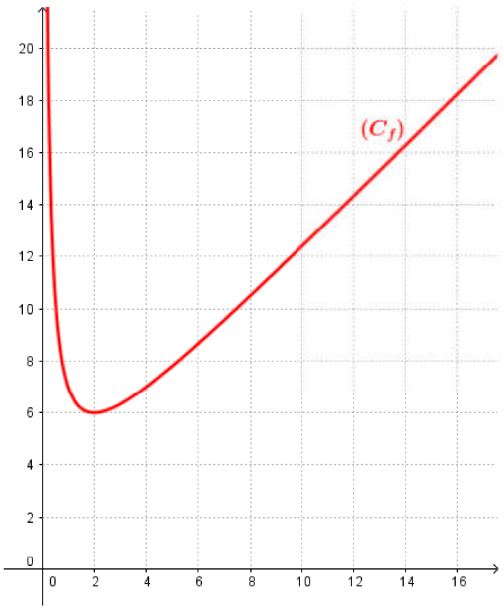
أنشطة محور النهايات

نشـــاط : (العمليات على النهايات)

نعتبر الدالتين $f : x \longmapsto \frac{1}{x-2}$ و $g : \longmapsto x^2$ المعرفتين على $\mathbb{R} - \{2\}$ و $\mathbb{R}$ على الترتيب

1. أحسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$
2. أحسب $\lim\limits_{x\to 2}(f+g)(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to 2}(f\times g)(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{g})(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{f}{g})(x)$ ماذا تستنتج ؟
3. نفس نفس الأسئلة لما $x \longmapsto -\infty$ و $x \longmapsto +\infty$

نشـــاط : (المستقيم المقارب المائل)



نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+4}{x}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل.
و ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+2$
* لتكن $M(x, f(x))$ نقطة من (C_f) و $P(x,y)$ نقطة من (Δ).

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ فإن: $f(x) = x+2+\frac{4}{x}$.
2. أحسب بدلالة x المسافة MP. ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} MP$.
3. ماذا يمكنك القول عن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]$ ؟
4. في نفس المعلم أرسم (Δ)، ماذا تلاحظ ؟

الأستاذ: فراحتية المحفوظ

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 31

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 2 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : النهايات. **الموضوع :** نهاية دالة عند عدد حقيقي(المنتهية وغير المنتهية).

✍ **المكتسبات القبلية:** دراسة الدوال العددية.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** حساب نهاية دالة عند عدد حقيقي، معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يوازي حامل محور التراتيب.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـــر الـــدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
التشخيـــص والاكتشـــاف	**مناقشة نشـاط 01 صفحـة 110 :** الهدف: نهاية غير منتهية لدّالة عند عدد حقيقي. الدّالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ ، 1. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها تشكيل جدول تغيرات الدالة f : أ-حساب $f'(x)$: تذكير: $\left(\frac{1}{u^n}\right)'=\frac{-nu'}{u^{n+1}}$ f دّالة معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ ولدينا: $f'(x)=\frac{-2}{(x-3)^3}$. ب-إشارة $f'(x)$: جدول إشارة $f'(x)$ جـ-جدول تغيّرات الدالة f : جدول تغيرات f 2. إكمال، باستعمال آلة حاسبة، جدول القيم: جدول القيم 3. الملاحظة: نلاحظ أنّه كلما إقترب x من 3 إلا وأخذ $f(x)$ قيما كبيرة جدا . **نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي :** **تعريف** ✍ القول أن نهاية دالة f عند عدد حقيقي x_0 هي $+\infty$ يعني انه $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة جدا بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$. **مـــثـــال - 1 -** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ ✔ نلاحظ انه كلما اقترب x من 3 بالقدر الكافي إلا و أخذ $f(x)$ قيم كبيرة جدا، نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ عند 3 (او لما يؤول x إلى 3) ونكتب: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=+\infty$	
بنـــاء معـــارف		

أ-حساب $f'(x)$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
-2		$-$			$-$
$x-3$		$-$			$+$
$f'(x)$		$+$			$-$

جـ-جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$-$
$f(x)$		↗	‖		↘

جدول القيم

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3,0001	3,001	3, 01	3, 1
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8	10^8	10^6	10^4	10^2

مبرهنـة 01

نقبل دون برهان النتيجة التالية $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$

مـــثـــال - 2 -

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{(x-7)^2}=+\infty$

مناقشة نشـاط 02 صفحـة 110 :

الهدف: نهاية غير منتهية لدّالة عند عدد من اليمين(أو من اليسار) .

الدّالة g معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ،

1 . بعد حساب $g'(x)$ و دراسة إشارتها تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

أ ـ حساب $g'(x)$:

تذكير: $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$.

g دّالة معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ولدينا: $g'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0$.

جـ ـ جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	↘	؟	‖	؟	↘

2 . إكمال، باستعمال آلة حاسبة، جدولي القيم:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	x	1,0001	1,001	1,01	1,1
$g(x)$	-10	-10^2	-10^3	-10^4	$g(x)$	10^4	10^3	10^2	10

3 . الملاحظة: نلاحظ أنّه كلما إقترب x من 1 فإنّ $|g(x)|$ تأخذ قيماً كبيرة أكثر فأكثر .

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار :

تعريف

✍ القول أن نهاية دالة f عند عدد حقيقي x_0 بقيم صغرى (النهاية من اليسار) هي $-\infty$ يعني انه $f(x)$ يأخذ قيما صغيرة جدا بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي

ونكتب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=-\infty$.

✍ القول أن نهاية دالة f عند عدد حقيقي x_0 بقيم كبرى (النهاية من اليمين) هي $+\infty$ يعني انه $f(x)$ يأخذ قيما كبيرة جدا بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي

ونكتب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=+\infty$.

ملاحظـــــة :

يمكن الحصول على تعاريف لنهايات مماثلة بنفس الطريقة مثل: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=+\infty$. و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=-\infty$

مـــثـــال - 3 -

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

لتكن g_1 و g_2 الدالتان المعرفتان على $]1,+\infty[$ و $]-\infty,1[$ على الترتيب. حيث $f(x)=g_1(x)=g_2(x)$

① نلاحظ أن $g_1(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من العدد 1 من جهة اليمين بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to 1} g_1(x)=+\infty$

② ونلاحظ أن $g_2(x)$ تأخذ قيما صغيرة بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من العدد 1 من جهة اليسار بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to 1} g_2(x)=-\infty$

✔ نقول عندئذ أن نهاية f هي $+\infty$ عند 1 من اليمين ونكتب : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$

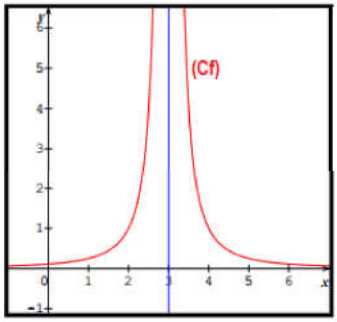
✔ و نهاية f هي $-\infty$ عند 1 من اليسار ونكتب : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$

مبرهنة 02

نقبل دون برهان النتيجة التالية : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}\dfrac{1}{(x-a)}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\dfrac{1}{(x-a)}=+\infty$

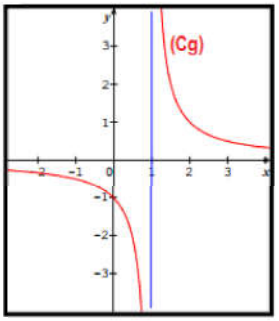
ملاحظـــــــة :

❖ في النشاط رقم (1) نلاحظ أن المنحني الممثل للدالة f (الشكل1) يقترب بالقدر الذي نريد من المستقيم ذو المعادلة $x=3$ نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $x=3$ هو مستقيم مقارب لمنحني الدالة f.



(شكل 1)

❖ في النشاط رقم (2) نلاحظ أن المنحني الممثل للدالة g (الشكل2) يقترب بالقدر الذي نريد من المستقيم ذو المعادلة $x=1$ نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو مستقيم مقارب لمنحني الدالة g.



(شكل 2)

التفسير البياني (المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب) :

تعريف

✍ (C_f) هو التمثيل البياني لدالة f في معلم ، و a عدد حقيقي، إذا كانت النهاية (أو النهاية من اليمين أو من اليسار) للدالة f عند العدد a هي $+\infty$ أو $-\infty$ نقول أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x=a$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

مـــثـــال - 4 -

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)}$

✔ حسب المبرهنة رقم (2) نجد $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}5}\dfrac{1}{(x-5)}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}5}\dfrac{1}{(x-5)}=+\infty$

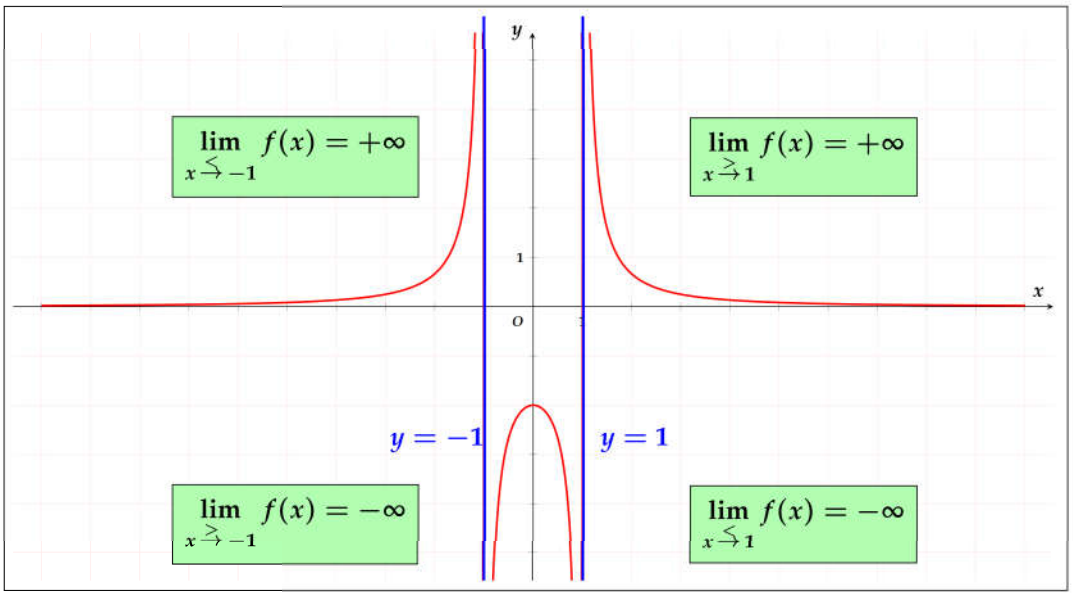
إذن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x=5$ مستقيم مقارب عمودي (موازي لمحور التراتيب) لمنحنى الدالة f

---

بنـــاء المعـــــارف

مـــثـال - 5 -

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$



مناقشة نشـاط 03 صفحـة 110 :

الهدف: نهاية منتهية لدّالة عند عدد حقيقي.

الدّالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$.

1 . إكمال جدولي القيم:

x	1,997	1,998	1,999		2,001	2,002	2,003
$f(x)$	2,997	2,998	2,999		3,001	3,002	3,003

2 . الملاحظة:

نلاحظ كلما اقترب x من 2 إلا واقترب $f(x)$ من 3 .

نهاية منتهية عند عدد حقيقي :

تعريف

القول أن نهاية دالة f عند عدد حقيقي x_0 هي b يعني انه $f(x)$ تقترب من العدد b شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

مـــثـال - 6 -

① $\lim\limits_{x\to 2}(-3x+1)=-5$ ② $\lim\limits_{x\to -3}(-6x)=18$

③ $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x})=3$ ④ $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}}(\dfrac{1}{x})=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

التقويم

تطبـــيق

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;2[\cup]2;3]$ بـ: $f(x)=-2+\frac{2}{x-2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

① أدرس نهاية الدالة f عند 2 . ماذا تستنتج بيانيا؟

② احسب $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

① ارسم في معلم متعامد $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنى (C_f).

عمـــل منـــزلي

تمـارين 14 - 16 - 18 - 26 الصفحـة 132 - 133

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 32

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 2 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : النهايات. **الموضوع :** نهاية دالة عند مالانهاية (المنتهية وغير المنتهية).

✍ **المكتسبات القبلية:** دراسة الدوال العددية.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** حساب نهاية دالة عند مالانهاية، معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يوازي حامل محور الفواصل.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـــر الـــدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

مناقشة نشـاط 04 صفحـة 111 :

الهدف: نهاية منتهية لدّالة عند مالانهاية.

الدّالة h معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{2x+1}{x}$،

التشخيـــص والاكتشـــاف

1. تبيين أنّ $h(x)=a+\dfrac{b}{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان يُطلب تعيينهما:

لدينا: $h(x)=\dfrac{2x+1}{x}=\dfrac{2x}{x}+\dfrac{1}{x}=2+\dfrac{1}{x}$ إذن: $\boxed{h(x)=2+\dfrac{1}{x}}$.

2. بعد حساب $h'(x)$ و دراسة إشارتها تشكيل جدول تغيرات الدالة h:

أ–حساب $h'(x)$:

h دّالة معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ ولدينا: $h'(x)=\dfrac{-1}{x^2}<0$.

ب–جدول تغيّرات الدالة h:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	
$h(x)$	؟ ↘		‖	$+\infty$ ↘	؟

3. إكمال جدولي القيم:

x	-10	-10^3	-10^5	-10^7	x	10	10^3	10^5	10^7
$h(x)$	1,9	1,999	1,99999	1,9999999	$h(x)$	2, 1	2,001	2,000 01	2,000000 1

4. الملاحظة:

نلاحظ أنه كلما أخذت $|x|$ قيماً كبيرة أكثر فأكثر، $h(x)$ تقترب من العدد 2 .

بنـــاء معـــارف

نهاية منتهية عند مالانهاية :

تعريف

✍ القول أن نهاية دالة f عند $+\infty$ هي b يعني انه $f(x)$ تأخذ قيما قريبة جدا من العدد b بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما موجبة جد كبيرة ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

✍ القول أن نهاية دالة f عند $-\infty$ هي b يعني انه $f(x)$ تأخذ قيما قريبة جدا من العدد b بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن يكون x سالبا وتأخذ $|x|$ قيما جد كبيرة ونكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

مثال - 1 -

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $f(x)=2+\frac{1}{x}$

✔ $f(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد شريطة ان يأخذ x قيما موجبة جد كبيرة، نقول في هذه الحالة ان نهاية f هي 2 عند $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

✔ $f(x)$ تاخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد شريطة ان يكون x سالبا ويأخذ $|x|$ قيما كبيرة جدا ، نقول في هذه الحالة أن نهاية f هي 2 عند $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

مبرهنة 01

a عدد حقيقي. نقبل دون برهان النتائج التالية :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+a}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+a}=0$

مثال - 2 -

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+6}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-9}=0$

نشاط مقترح :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}+2$ وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لها في معام متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y=2$ ، ولتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x و P نقطة من المستقيم (Δ) فاصلتها x.

❶ أحسب المسافة MP

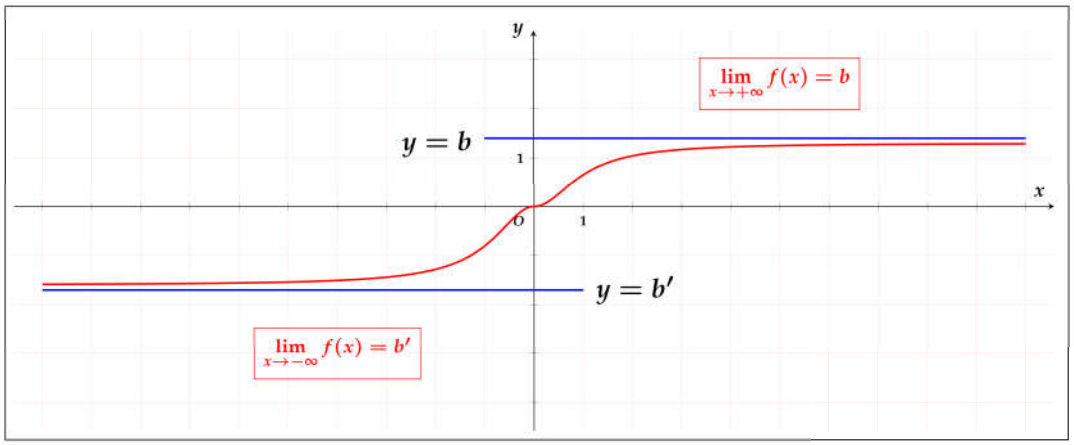
❷ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} MP$

❸ ارسم المنحنى (C_f) و (Δ) في نفس المعلم، ماذا تلاحظ.

التفسير البياني (المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل) :

تعريف

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي منسوب إلى معلم ، وليكن b عدد حقيقي.
القول أن المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل ذو المعادلة $y=b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (علي الترتيب عند $-\infty$) يعني أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (علي الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$)



مـــثـال - 3 -

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-5\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{(x+5)}$

✔ حسب المبرهنة رقم (1) نجد $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+5}=0$ إذن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y=5$ مستقيم مقارب أفقي (موازي لمحور الفواصل) لمنحنى الدالة f عند (بجوار) $-\infty$

✔ حسب المبرهنة رقم (1) نجد أيضا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+5}=0$ إذن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y=5$ مستقيم مقارب أفقي (موازي لمحور الفواصل) لمنحنى الدالة f عند (بجوار) $+\infty$

مناقشة نشـاط 03 صفحـة 110 :

الهدف: نهاية غير منتهية لدّالة عند مالانهاية.

الدّالة k معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x)=x^2$ ، (k هي الدالة "مربع")

1 . تشكّيل جدول تغيرات الدالة k :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	؟	↘	0	↗	؟

2 . إكمال جدولي القيم:

x	-10	-10^2	-10^3	-10^4	x	10	10^2	10^3	10^4
$k(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8	$k(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8

3 . الملاحظة: نلاحظ أنّ $k(x)$ تأخذ قيما كبيرة جدا أكثر فأكثر كلما أخذت $|x|$ قيما كبيرة جدا .

نهاية غير منتهية عند مالانهاية :

تعريف

✍ القول أن نهاية دالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني انه $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة جدا شريطة أن ياخذ x قيما موجبة جد كبيرة ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

✍ القول أن نهاية دالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$ يعني انه $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة جدا شريطة أن يكون x سالبا وتأخذ $|x|$ قيما جد كبيرة ونكتب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

ملاحظـــــة :

يمكن الحصول على تعاريف لنهايات مماثلة بنفس الطريقة مثل: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

مـــثـال - 4 -

① $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

③ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ ④ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$

بناء المعارف

التقويم

خـواص

❖ النهاية عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الاعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$).

❖ النهاية عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحد لأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$).

مـــثـــال - 5 -

$$\lim_{x\to+\infty} x^3+4x^2-1 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad ①$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3+4x^2-1 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad ②$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty \quad ③$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3x = -\infty \quad ④$$

تطبـــيق

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2+4x+6$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

① أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② احسب $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

II) نعتبر الدالة g المعرفة على على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x) = -4+\frac{6x-5}{3x+3}$، وليكن (C_g) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

① أدرس نهاية الدالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$. ماذا تستنتج بيانيا؟

② احسب $g'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.

① ارسم في معلم متعامد $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ المنحنى (C_g).

عمـــل منـــزلي

تمارين 15 - 19 - 20 - 21 - الصفحة 132 - 133

تمارين 24 - 25 - 26 - 27 - الصفحة 133

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 33

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 2 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : النهايات.
الموضوع : العمليات على النهايات.

المكتسبات القبلية: دراسة الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة: حساب نهايات باستعمال مبرهنات المجموع، الجداء، المقلوب وحاصل القسمة.
حساب نهايات بإزالة حالة عدم التعيين.
الأدوات المستعملة: المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـــر الـــدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التشخيص والاكتشاف

نشـاط مقترح :

نعتبر الدالتين $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ و $g : \longmapsto x^2$ المعرفتين على $\mathbb{R}-\{2\}$ و $\mathbb{R}$ على الترتيب

1. أحسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$
2. أحسب $\lim\limits_{x\to 2}(f+g)(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to 2}(f\times g)(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{g})(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{f}{g})(x)$ ماذا تستنتج ؟
3. نفس نفس الأسئلة لما $x \longmapsto -\infty$ و $x \longmapsto +\infty$

ملاحظـــــات :

- يتم بصفة عامة حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.
- إذاكانت دالة f قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $x \mapsto sinx$ لا تقبل نهاية لما يؤول x إلى $+\infty$.

مبرهنات أولية على النهايات :

f و g دالتان و x_0 يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' أعداد حقيقية. نقبل بدون برهان المبرهنات التالية:

نهاية مجموعة دالتين :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	$l\succ 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$l\prec 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\times g(x)]$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$l'\prec 0$	$l'\succ 0$	$l'\prec 0$	$l'\succ 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

بنـــاء معـــارف

نهاية مقلوب دالة :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

ملاحظـــــة :

❖ تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية " بحالات عدم التعيين (ح ع ت) ".

مـــثـــال - 1 -

إذا اعتبرنا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x^3+3x^2$

✔ لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty\end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

✔ ولدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty\end{cases}$ في هذه الحالة لا يمكننا استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$

لإزالة حالة عدم التعيين نكتب $f(x)=x^2(2x+3)$

✔ وبما ان $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+3)=-\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

إزالة حالة عدم التعيين :

طريقـــة

لإزالة حالات عدم التعيين عند وجودها نتبع مايلي:

- بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة .
- بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة البسط و المقام.
- بالنسبة لدوال الجذرية عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في أغلب الحالات نضرب و نقسم في المرافق.
- بالنسبة لحالات عدم التعيين عندما x يؤول إلى x_0 نلجأ للإختزال وذلك بتوضيف الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك أو ممكن نستخدم العدد المشتق.

تطبـــيق

أحسب نهاية الدالة f في كل حالة :

① $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3+6x^2-20$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}+x$

③ $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-3)(x+1)$

④ $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

⑤ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

⑥ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}=-\infty$

عمـــل منـــزلي

تمارين 24 ⇐ 29 الصفحة 133 - 134

بناء المعارف

التقويم

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـذكـرة رقـم 34

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـوم :
المدة : 2 سـاعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : النهايات.
الموضوع : المستقيم المقارب المائل.

المكتسبات القبلية: دراسة الدوال العددية. حساب نهاية دالة لما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$.
الكفاءات المستهدفة: تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب مائل. البحث عن مستقيم مقارب مائل.
الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل.
الأدوات المستعملة: المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، برنامج GeoGebra، الأنترنت.

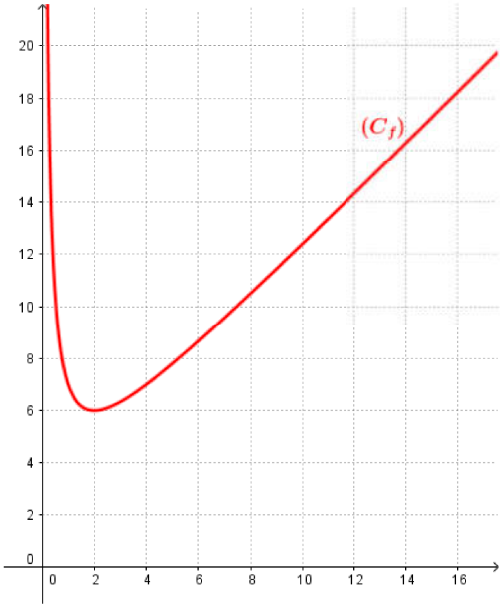
المراحل	عناصـر الـدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق التشخيص والاكتشاف		

نشـاط مقترح :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل.
و ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+2$
* لتكن $M(x,f(x))$ نقطة من (C_f) و $P(x,y)$ نقطة من (Δ).



1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ فإن: $f(x)=x+2+\frac{4}{x}$.
2. أحسب بدلالة x المسافة MP. ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} MP$.
3. ماذا يمكنك القول عن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]$ ؟
4. في نفس المعلم أرسم (Δ)، ماذا تلاحظ ؟

مناقشة النشاط :

1. **لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ فإن:**

$$x+2+\frac{4}{x}=\frac{(x+2)x+4}{4}=\frac{x^2+2x+4}{x}=f(x)$$

2. **حساب بدلالة x المسافة MP**

$$MP=\sqrt{0+(y_M-y_P)^2}=\sqrt{\left(\left(x+2+\frac{4}{x}\right)-(x+2)\right)^2}=\left|\frac{4}{x}\right|=\frac{4}{x}$$

- **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} MP$:

$$\lim_{x\to+\infty} MP=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

3. **لدينا:** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty} MP=0$

4. **رسم المستقيم (Δ) (باستعمال برنامج GeoGebra)**

- **الملاحظة:** نلاحظ أن المنحنى (C_f) يقترب من المستقيم (Δ) لما يؤول x إلى $+\infty$. نقول في هذه الحالة أن المستقيم $(\Delta): y=x+2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

المستقيم المقارب المائل :

تعريف

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$.
القول ان المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \qquad \left(\text{على الترتيب } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \right)$$

مـــثـــال - 1 -

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ: $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{2}{x+2}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$. وليكن في نفس المعلم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 4$.

بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + 4 + \dfrac{2}{x+2} - (2x+4)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+2} = 0$

و $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + 4 + \dfrac{2}{x+2} - (2x+4)\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x+2} = 0$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 4$ مستقيم مقارب لمحنى الدالة f بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$

ملاحظـــة :

❖ إذاكانت f دالة بحيث $f(x) = (ax+b) + g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ فإنه من الواضح أن:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$.
(نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$).

تطبـــيق

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{x-1}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

① احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

② عين الأعداد الحقيقية a , b و c بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

③ بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

البحث عن المستقيم المقارب المائل :

نتيجة

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$. يكون المستقيم (Δ) هو مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$ على الترتيب)،

إذا وفقط إذا تحقق مايلي: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$

(على الترتيب $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b$)

الإثبـــات :

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$. نفرض ان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

① نفرض ان (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$، ومنه حسب التعريف $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

نضع $g(x) = f(x) - (ax+b)$

ومنه $f(x) = g(x) + ax + b$ حيث $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{g(x)+ax+b}{x} = \dfrac{1}{x} \times g(x) + a + \dfrac{b}{x}$

بمالان : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \times g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ فإن : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a}$

لدينا من جهة ثانية $f(x) - ax = g(x) + b$ و بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ فإن $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b}$

② نفرض ان $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$

من الواضح أن $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ ومنه فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$

تطبـــيق

نعتبر الدالة f المعرفة على : $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

✍ أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ وعند $-\infty$ يطلب تحديد معادلته.

حل التطبيق :

مستقيم مقارب معادلته من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+3x+3}{x^2+2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+3x+3}{x+2} - x \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

إذ المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل :

طريقـــة

f دالة عددية و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وليكن في نفس المعلم المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) ذو المعادلة $y = ax + b$.

لمعرفة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل نقوم بحساب الفرق $f(x) - (ax+b)$ ثم ندرس إشارته بحيث:

- إذا كان $f(x) - (ax+b) > 0$ فإن (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب المائل
- إذا كان $f(x) - (ax+b) < 0$ فإن (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل
- إذا كان $f(x) - (ax+b) = 0$ فإن (C_f) و المستقيم المقارب المائل يتقاطعان (حذاري فواصل نقط التقاطع يجب أن تكون في D_f)

ملاحظـــة :

❖ f و g دالتان معرفتان بجوار $\pm\infty$ ، نضع (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين لهما على الترتيب .

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ فإن المنحنيان (C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $\pm\infty$.

التقويم

تطبـــيق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=x+1+\frac{5}{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم

1. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف .
2. أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$
3. أدرس وظعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

حل التطبيق :

① **حساب النهايات**

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1+\frac{5}{1-x})=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{1-x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1+\frac{5}{1-x})=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{1-x}=0$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}(x+1+\frac{5}{1-x})=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}(x+1)=2$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}(1-x)=0^+$ و

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\frac{5}{1-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}(x+1+\frac{5}{1-x})=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}(x+1)=2$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}(1-x)=0^-$ و

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{5}{1-x}=-\infty$

② **إثبات أن المستقيم $(\Delta):y=x+1$ مقارب مائل**

بماأن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{1-x}=0$

فإن المستقيم$(\Delta):y=x+1$مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\pm\infty$

③ **دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :**

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)-(x+1)=\frac{5}{x-1}$ ،إذن إشارة الفرق من نفس إشارة $(1-x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$\|$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	$\|$	(C_f) تحت (Δ)

عمـــل منـــزلي

تمارين 43 - 44 - 45 - 46 الصفحة 136

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 35

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 2 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : النهايات.
الموضوع : دراسة دالة.

✍ **المكتسبات القبلية:** دراسة الدوال العددية.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** دراسة دالة، حل مسائل.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـــر الـــدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

دراسة دالة :

تمهيد :

بعد ما تطرقنا إلى حساب المشتقات و تطبيقاتها في استنتاج اتجاه تغير دالة و من تم القيم الحدية و بعد التطرق إلى حساب النهايات و دراسة السلوك التقاربي لمنحني دالة أضحى من الممكن جدا دراسة دالة و تمثيلها بيانيا. نقترح فيما يلي مخططا لدراسة دالة علما أنه يمكن إجراء تغيير جزئي عل الترتيب المقترح كما يمكن إلغاء بعض المراحل و ذلك حسب طبيعة الدالة المدروسة.

مخطط دراسة دالة

لدراسة دالة نتبع المخطط التالي :

بناء معارف

① تحديد مجموعة تعريف الدالة إذا لم تكن قد أعطيت في النص.
② دراسة شفعية الدالة(زوجية او فردية)ان امكن ودورية الدالة قصد تقليص مجال الدراسة.
✍ اذا كانت الدالة دورية ودورها t فيمكن دراستها على مجال طوله t.
✍ اذا كانت الدالة فردية او زوجية فيكفي دراستها على نصف مجال التعريف.
③ حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف
④ دراسة اتجاه التغير الدالة ويتم فيها ما يلي:
✍ حساب المشتقة على المجالات التي تقبل فيها الدالة الاشتقاق.
✍ دراسة اشارة المشتقة واستنتاج تغيرات الدالة.
✍ تحديد القيم الحدية في حالة وجودها.
⑤ تشكيل جدول تغيرات الدالة.
⑥ التمثيل البياني للدالة ويتم فيه ما يلي:
✍ رسم المستقيمات المقاربة.
✍ تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب إحداثياتها ونذكر بصفة خاصة النقط الحدية ونقط تقاطع المنحنى مع محوري الاحداثيات.
✍ رسم المماسات عند القيم الحدية وأخرى المطلوبة في النص.
✍ استغلال عناصر تناظر المنحنى ان وجدت(مراكز التناظر ومحاور التناظر)

التقويم

تطبـــيق

دراسة دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

ملاحظـــة :

❖ إذا إخترق المنحني (C_f) مماسه عند نقطة ما. تسمى هذه النقطة، نقطة انعطاف للمنحني (C_f).
❖ المنحني الممثل للدالة: $x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ حيث $a \neq 0$ يقبل دائما مركز تناظر.

بناء المعارف

التقويم

الدالة التناظرية :

تعريف

نسمي دالة تناظرية كل دالة f من الشكل: $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية مع $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$.

تطبيق

دراسة دالة تناظرية

ملاحظة :

❖ يسمى المنحني الممثل لدالة تناظرية من الشكل: $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ قطعا زائدا معادلتا مستقيميه المقاربين هما: $x = -\frac{d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$.

عمل منزلي

تمارين 58 ⇐ 68 الصفحة 139 - 140

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....