معادلة مستقيم

. مفاهيم أساسية

◆ كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له

◆ (AB)و (CD) لهما نفس معامل التوجيه $\Leftrightarrow$ $(AB)//(CD)$

. حساب معامل وشعاع توجيه مستقيم

المستقيم	$ax+by+c=0$	$y=ax+b$
معامل توجيهه (الميل)	$-\frac{a}{b}$	a
شعاع توجيهه	$\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

✱ معامل توجيه مستقيم يشمل نقطتين $A(x_A\,;\,y_A)$ ، $B(x_B\,;\,y_B)$ هو $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

. قاعدة المستقيمان المتوازيان

المستقيمان المتوازيان لهما نفس معامل التوجيه ونفس شعاع التوجيه

. المعادلة المكافئة: يمكن الانتقال من المعادلة $ax+by+c=0$ إلى المعادلة $y=ax+b$ بتغيير أطراف المساواة و بضرب أو قسمة المعاملات على عدد حقيقي غير معدوم.

مثال: كل المعادلات التالية متكافئة ولنفس المعادلة.

$$2x-y-4=0 \Leftrightarrow -2x+y+4=0 \Leftrightarrow -6x+3y+12=0$$
$$y=2x-4 \Leftrightarrow 12x-6y-24=0 \Leftrightarrow -12x+6y+24=0 \Leftrightarrow$$

. طرق إيجاد معادلة مستقيم

1) مستقيم يشمل نقطتين

. طريقة ① (الارتباط الخطي)

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$A(1;-1)$; $B(4;5)$

❶ حساب مركبة $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\5-(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

❷ نفرض النقطة $M(x;y)$ حيث $M\in(AB)$

❸ نحسب مركبة $\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}$$

❹ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AB}\ /\!/\ \overrightarrow{AM} \Rightarrow \begin{vmatrix}3 & x-1\\6 & y+1\end{vmatrix}=0$$
$$\Rightarrow 3(y+1)-6(x-1)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{-6x+3y+9=0}$$

إذن معادلة (AB) هي: $\boxed{y=2x-3}$

✓ طريقة ② (معامل التوجيه)

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$A(1;-1)$; $B(4;5)$

❶ حساب معامل التوجيه a

$$a=\frac{5-(-1)}{4-1}=\frac{6}{3}=2$$

و منه معادلة (AB) هي: $y=2x+b$

❷ نحسب المعامل b بتعويض احداثي A أو B في المعادلة

نعوض A تصبح المعادلة $-1=2(1)+b$

$$\Rightarrow b=-3$$

إذن معادلة (AB) هي: $\boxed{y=2x-3}$

أو من الشكل: $\boxed{2x-y-3=0}$

2) مستقيم معرف بنقطة وشعاع توجيه

✓ **طريقة ③ (الارتباط الخطي)**

مثال: $E(2;1)$; $\vec{v}\binom{3}{4}$

أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه $\vec{v}$

❶ نفرض النقطة $M(x;y)$ حيث $M \in (D)$

❷ نحسب مركبة $\overrightarrow{EM}$

$$\overrightarrow{EM}\binom{x-2}{y-1}$$

❸ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\vec{v}$ و $\overrightarrow{EM}$

$$\vec{v} \,/\!/\, \overrightarrow{EM} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x-2 \\ 4 & y-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y-1) - 4(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-4x+3y+5=0}$$

إذن معادلة (D) هي: $\boxed{4x-3y-5=0}$

✓ **طريقة ④ (استخلاص المعاملات)**

مثال: $E(2;1)$; $\vec{v}\binom{3}{4}$

أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه $\vec{v}$

❶ نستخلص المعاملات a و b من شعاع التوجيه

لدينا $\vec{v}\binom{3}{4}$ شعاع توجيه من الشكل $\vec{v}\binom{-b}{a}$

و منه نستنتج أن $\begin{cases} -b=3 \\ a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=-3} \\ \boxed{a=4} \end{cases}$

أي معادلة (D) من الشكل $4x-3y+c=0$

❷ إيجاد المعامل c

نعوض E في المعادلة $4x-3y+c=0$

$$\Rightarrow 4(2)-3(1)+c=0$$

$$\Rightarrow \boxed{c=-5}$$

إذن معادلة (D) هي: $\boxed{4x-3y-5=0}$

3) مستقيم يشمل نقطة ويوازي مستقيم

✓ **طريقة ⑤ (الارتباط الخطي)**

مثال:

(D) مستقيم معادلته $5x+2y-6=0$; $F(-3;4)$

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

❶ نستخلص شعاع التوجيه $\vec{u}$ للمستقيم (D)

$$\vec{u}\binom{-b}{a} \Rightarrow \boxed{\vec{u}\binom{-2}{5}}$$

❷ نفرض النقطة $M(x;y)$ حيث $M \in (\Delta)$

❸ نحسب مركبة $\overrightarrow{FM}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{FM}\binom{x+3}{y-4}$

❹ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{FM}$

$(D) \,/\!/\, (\Delta) \Leftarrow \vec{u}$ و $\overrightarrow{FM}$ مرتبطان خطيا

$$\vec{u} \,/\!/\, \overrightarrow{FM} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & x+3 \\ 5 & y-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(y-4) - 5(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-5x-2y-7=0}$$

إذن معادلة (Δ) هي: $\boxed{5x+2y+7=0}$

✓ **طريقة ⑥ (استنتاج المعاملات)**

مثال:

(D) مستقيم معادلته $5x+2y-6=0$; $F(-3;4)$

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

❶ $(D) \,/\!/\, (\Delta)$ $\Leftarrow$ (Δ) و (D) لهما نفس معامل وشعاع التوجيه.

$\Leftarrow$ (Δ) و (D) لهما نفس المعاملين a و b

و منه معادلة (Δ) من الشكل $\boxed{5x+2y+c=0}$

❷ إيجاد المعامل c

نعوض F في المعادلة $5x+2y+c=0$

$$\Rightarrow 5(-3)+2(4)+c=0$$

$$\Rightarrow \boxed{c=7}$$

إذن معادلة (Δ) هي: $\boxed{5x+2y+7=0}$

$(D) \,/\!/\, (\Delta) \Leftarrow (\Delta)$ و (D) لهما نفس معامل و شعاع التوجيه

4) مستقيم معرف بنقطة ومعامل توجيه

✓ **طريقة ⑦ (استخلاص المعاملات)**

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل $G(6;5)$ و معامل توجيهه $\frac{3}{2}$

❶ من معامل التوجيه نستنتج المعاملين a و b

$$-\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -a=3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=-3} \\ \boxed{b=2} \end{cases}$$

و منه معادلة (K) من الشكل $-3x+2y+c=0$

❷ نعوض G في المعادلة تصبح:

$$-3(6)+2(5)+c=0 \Rightarrow \boxed{c=8}$$

إذن معادلة (K) هي $\boxed{-3x+2y+8=0}$

✓ **طريقة ⑧ (تعويض معامل التوجيه)**

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل $G(6;5)$ و معامل توجيهه $\frac{3}{2}$

❶ نعوض معامل التوجيه في المعادلة $y=ax+b$

إذن معادلة (K) من الشكل $y=\frac{3}{2}x+b$

❷ نعوض G في المعادلة تصبح b

$$5=\frac{3}{2}(6)+b$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-4}$$

و منه معادلة (K) هي $\boxed{y=\frac{3}{2}x-4}$

أو من الشكل $\boxed{3x-2y-8=0}$