الواجب المنزلي رقم ⑥
[محور: النهايات والسلوك التقاربي]

المستوى: ثانية ثانوي | الأستاذة: قويسم الخليل

سلم يوم: 22 جانفي 2023 | يعاد يوم: 25جانفي 2023

التمرين الأول [04 نقاط]

لتكن الدالة f حيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

• عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c و d حتى يقبل (C_f) مستقيم مقاربا معادلته $x=-1$ ومستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=-x+2$ عند $\pm\infty$ ويشمل مبدأ المعلم

التمرين الثاني: [08 نقاط]

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

❶ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

❷ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

❸ استنتج تغيرات الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها

❹

أ/ أوجد الاعداد الحقيقية a، b و c حيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ لدينا:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

❺ أوجد نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محور الفواصل والتراتيب

❻ مثل بيانيا كلا من (D) و (C_f)

II) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$g(x) = \frac{x^2+4x+4}{|x+1|}$$

و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

❷ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) الممثل للدالة g انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم أنشئه

التمرين الثالث [08 نقطة]

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x + 4$$

❶ احسب $g(-1)$، ثمّ استنتج تحليلا لـ $g(x)$

❷ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x) = 0$ ثمّ شكل جدول إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2 - x^3}{1 + x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

❶

أ/ بيّن أنّ:

$$f'(x) = \frac{-x \cdot g(x)}{(1 + x^2)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنّ (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ كمقارب مائل له، ثمّ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

❸ ليكن $\omega \in [-2; -1]$ ، جد حصرا للعدد L حيث:

$$L = \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{2 - \omega^3}}$$

❹ بين أنه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة كل منهما

(نسمي المماسين (T_1) و (T_2))

❺ ارسم كلا من (Δ)، (T_1)، (T_2) و (C_f)

❻ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين (E) و (E') حيث:

$$\frac{1}{2}x^3 = 1 - m - mx^2 \dots (E) \quad ; \quad f(x) = -x + m \dots (E')$$

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

❶ ادرس شفعية الدالة h

❷ وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم أنشئه

وَما نَيلُ المَطالِبِ بِالتَمَنّي وَلَكِن تُؤخَذُ الدُنيا غِلابا
وَما اِستَعصى عَلى قَومٍ مَنالٌ إِذا الإِقدامُ كانَ لَهُم رِكابا

- أحمد شوقي

تصحيح مقترح للواجب المنزلي:
[محور: النهايات والسلوك التقاربي]

تصحيح التمرين الأول [04 نقاط]

- تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c و d :

• لدينا: $\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x) = 0 \end{cases}$ حيث: $g(x) = \dfrac{c}{x+d}$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = ax + b$ عند $\pm\infty$

ولدينا من المعطيات، (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = -x + 2$ عند $\pm\infty$

بالمطابقة نجد: $\boxed{a = -1}$ و $\boxed{b = 2}$ ومنه: $f(x) = -x + 2 + \dfrac{c}{x+d}$ [02 ن]

• ولدينا: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = -1$

معناه: $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = +\infty$

وهذا لا يتحقق إلا اذا كان: $-1 + d = 0$ ومنه: $\boxed{d = 1}$ ومنه: $f(x) = -x + 2 + \dfrac{c}{x+1}$ [01 ن]

• ولدينا: (C_f) يشمل المبدأ أي يمر من النقطة ذات الاحداثيات $(0;0)$ ومنه:

$f(0) = 0 \Longrightarrow -(0) + 2 + \dfrac{c}{0+1} = 0 \Longrightarrow 2 + c = 0 \Longrightarrow \boxed{c = -2}$ [01 ن]

ومنه: $\boxed{f(x) = -x + 2 - \dfrac{2}{x+1}}$

تصحيح التمرين الثاني: [08 نقاط]

1)

❶ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$ [0.25 ن]
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$ [0.25 ن]
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ [0.25 ن]
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ [0.25 ن]

❷ تبيين أن $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{(2x+4)(x+1) - (x^2+4x+4)}{(1+x)^2} = \dfrac{2x^2+2x+4x+4-x^2-4x-4}{(1+x)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2} = \boxed{\dfrac{x(x+2)}{(1+x)^2}}$ [01 ن]

❸ استنتاج تغيرات الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(1+x)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x+2)$

لدينا: $x(x+2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ أو $x+2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ أو $x = -2$ [0.5 ن]

ومنه:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	‖	$+\infty$	↘	↗	$+\infty$
					‖		4		

[0.5 ن]

❹

أ/ التحقق أن $f(x)=x+3+\frac{1}{x+1}$:

$$f(x)=x+3+\frac{1}{x+1}=\frac{(x+3)(x+1)+1}{x+1}=\frac{x^2+x+3x+3+1}{x+1}=\boxed{\frac{x^2+4x+4}{x+1}}=f(x)$$ [0.5 ن]

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) :

لدينا:

$$\begin{cases} f(x)=x+3+\dfrac{1}{x+1} \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=0 \end{cases}$$ [0.5 ن]

ومنه المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=x+3}$ مقارب مائل لـ (C_f)

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D):

$$f(x)-y_{(D)}=x+3+\frac{1}{x+1}-(x+3)=\frac{1}{x+1}$$

لدينا: $x+1\neq 0\Longrightarrow x\neq -1$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	‖	$+$
الوضعية	(D) تحت (C_f)	‖	(D) فوق (C_f)

[0.5 ن]

❺ ايجاد نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل والتراتيب:

- مع حامل محور الفواصل:

$$f(x)=0\Longrightarrow\frac{x^2+4x+4}{x+1}=0\Longrightarrow x^2+4x+4=0$$

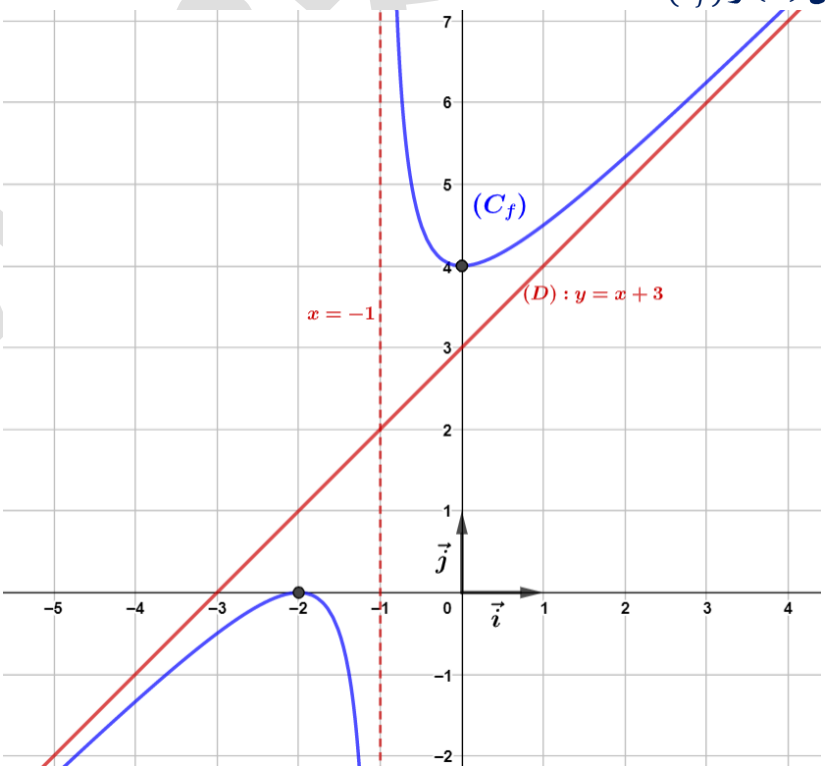
لدينا: $\Delta=4^2-4(1)(4)=0$ ومنه: $x=-2$ ومنه: $\boxed{(C_f)\cap(xx')=\{-2\}}$ [0.5 ن]

- مع حامل محور التراتيب:

$$f(0)=\frac{0^2+4(0)+4}{0+1}=4$$

ومنه: $\boxed{(C_f)\cap(yy')=\{4\}}$ [0.5 ن]

❻ تمثيل كلا من (D) و (C_f):



[0.75 ن] + [0.25 ن]

II)

❶ كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة: [0.5 ن]

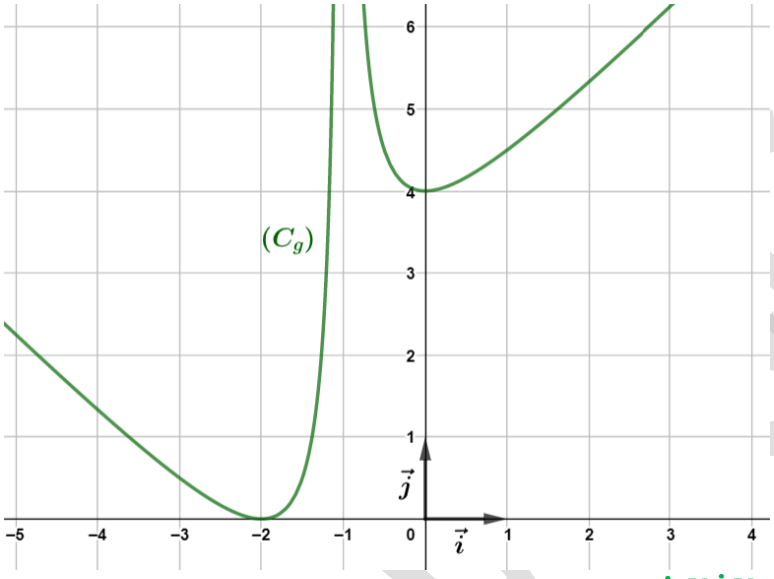
$$g(x)=\frac{x^2+4x+4}{|x+1|}=\frac{(x+2)^2}{|x+1|}=\frac{|(x+2)^2|}{|x+1|}=\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right|=|f(x)|=\begin{cases} f(x)\ ;\ f(x)\geq 0 \\ -f(x)\ ;\ f(x)\leq 0 \end{cases}$$

❷ شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) : [0.5 ن]

(C_g) ينطبق على (C_f) لما (C_f) يكون فوق محور الفواصل

وَ (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل لما (C_f) يكون تحت محور الفواصل

- إنشاء (C_g) [0.5 ن]



تصحيح التمرين الثالث [08 نقاط]

1)

❶ حساب $g(-1)$، واستنتاج تحليلا لـ $g(x)$: [0.25 ن]

لدينا: $g(-1)=(-1)^3+3(-1)+4=0$

ومنه: $g(x)=\big(x-(-1)\big)(ax^2+bx+c)$

	1	0	3	4
-1	0	-1	1	-4
	1	-1	4	0

[0.5 ن]

ومنه: $\boxed{g(x)=\big(x-(-1)\big)(ax^2+bx+c)=(x+1)(x^2-x+4)}$

❷ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$: [0.25 ن]

$$g(x)=0\Rightarrow(x+1)(x^2-x+4)=0\Rightarrow\begin{cases} x+1=0 \\ \text{أو} \\ x^2-x+4=0 \end{cases}$$

لدينا: $x+1=0$ ومنه: $x=-1$

ولدينا: $x^2-x+4=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta=(-1)^2-4(4)(1)=-15<0$

ومنه:

- جدول إشارة $g(x)$: [0.5 ن]

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II)

❶

أ/ تبيين أنّ: $f'(x)=\frac{-x\cdot g(x)}{(1+x^2)^2}$;

$$f'(x)=\frac{-3x^2(1+x^2)-2x(2-x^3)}{(1+x^2)^2}=\frac{-3x^2-3x^4-4x+2x^4}{(1+x^2)^2}=\frac{-x^4-3x^2-4x}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{-x(x^3+3x+4)}{(1+x^2)^2}=\boxed{\frac{-x\cdot g(x)}{(1+x^2)^2}}$$

[ن 0.5]

ب/ دراسة تغيرات الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

- **النهايات:**

[ن 0.25]

[ن 0.25]

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{-x\cdot g(x)}{(1+x^2)^2}$$

لدينا: $(1+x^2)^2>0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-x\cdot g(x))$

[ن 0.5]

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x$	$+$		$+$		0		$-$
$g(x)$	$-$		0		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		0		$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	2	↘	$-\infty$

❷ تبيين أنّ (C_f) يقبل (Δ) كمقارب مائل له،

[ن 0.5]

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-y_{(\Delta)}]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{2-x^3}{1+x^2}-(-x)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{2-x^3+x+x^3}{1+x^2}\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{2+x}{1+x^2}\right]$$
$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$$

ومنه (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ كمقارب مائل

- **دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):**

لدينا:

$$f(x)-y_{(\Delta)}=\frac{2+x}{1+x^2}$$

لدينا: $1+x^2>0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $2+x$

لدينا:

$$2+x=0\Rightarrow x=-2$$

ومنه:

[ن 0.5]

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$		

- (C_f) **تحت** (Δ) **لما** $x\in\,]-\infty;-2[$
- (C_f) **يقطع** (Δ) **لما** $x=-2$
- (C_f) **فوق** (Δ) **لما** $x\in\,]-2;+\infty[$

❸ ايجاد حصرا للعدد L :

لدينا:

[ن 0.25]

$$L=\sqrt{\frac{1+\omega^2}{2-\omega^3}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2-\omega^3}{1+\omega^2}}}=\frac{1}{\sqrt{f(\omega)}}$$

ولدينا: الدالة f متناقصة لما $x\in[-2;-1]$

وعليه:

$$-2\le\omega\le-1\Rightarrow f(-1)\le f(\omega)\le f(-2)\Rightarrow\frac{3}{2}\le f(\omega)\le 2\Rightarrow\sqrt{\frac{3}{2}}\le\sqrt{f(\omega)}\le\sqrt{2}$$

[ن 0.5]

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{f(\omega)}\le\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\Rightarrow\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\le L\le\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

❹ تبيين أنه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا لـ (Δ) :

(T) يوازي (Δ) معناه: أنّ لهما نفس معامل التوجيه

ومنه:

$$f'(a)=-1\Rightarrow\frac{-a^4-3a^2-4a}{(1+a^2)^2}=-1\Rightarrow-a^4-3a^2-4a=-(1+a^2)^2$$

[ن 0.25]

$$\Rightarrow-a^4-3a^2-4a=-(1+a^4+2a^2)\Rightarrow-a^4-3a^2-4a+1+a^4+2a^2=0$$
$$\Rightarrow-a^2-4a+1=0$$

لدينا: $\Delta=(-4)^2-4(-1)(1)=20$ ومنه: $\boxed{a_1=-2-\sqrt{5}}$ أو $\boxed{a_2=-2+\sqrt{5}}$

إذن (C_f) يقبل مماسين موازين لـ (Δ)

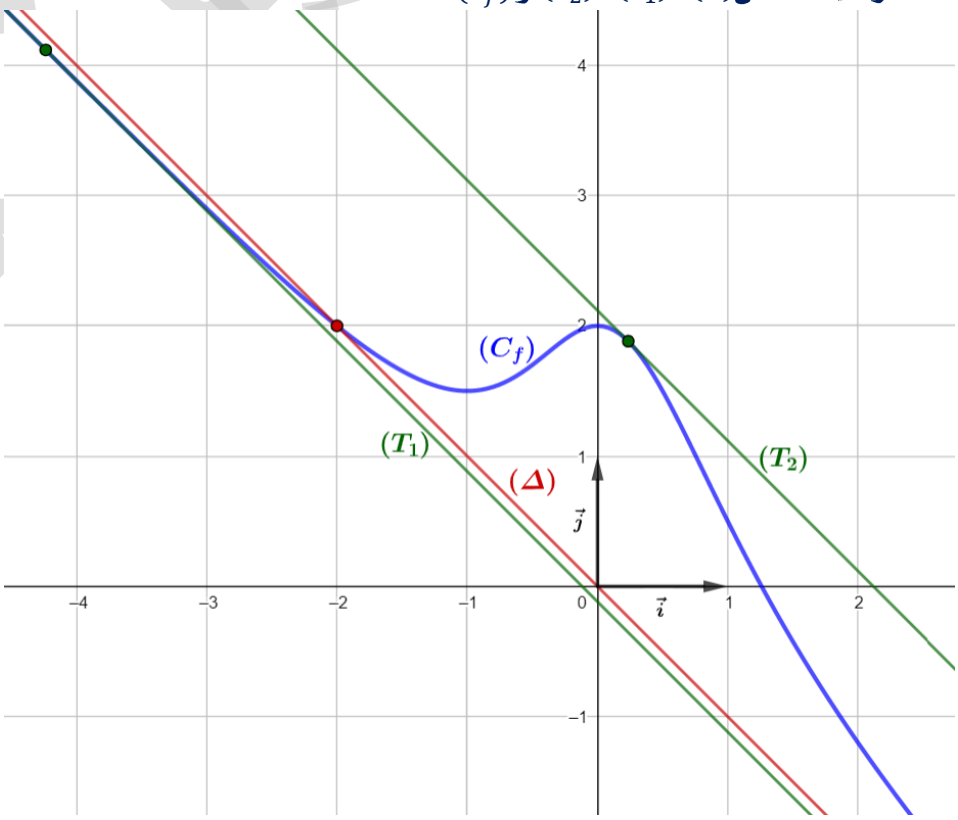
- إيجاد معادلتي المماسين:

$$(T_1):y=f'(a_1)(x-a_1)+f(a_1)=f'\left(-2-\sqrt{5}\right)\left(x+2+\sqrt{5}\right)+f\left(-2-\sqrt{5}\right)$$
$$=-\left(x+2+\sqrt{5}\right)+f\left(-2-\sqrt{5}\right)=\boxed{-x-2-\sqrt{5}+f\left(-2-\sqrt{5}\right)}\approx-x-0.12$$

[ن 0.25]

$$(T_2):y=f'(a_2)(x-a_2)+f(a_2)=f'\left(-2+\sqrt{5}\right)\left(x+2-\sqrt{5}\right)+f\left(-2+\sqrt{5}\right)$$
$$=-\left(x+2-\sqrt{5}\right)+f\left(-2+\sqrt{5}\right)=\boxed{-x-2+\sqrt{5}+f\left(-2+\sqrt{5}\right)}\approx-x+2.12$$

❺ رسم كلا من (Δ)، (T_1)، (T_2) و (C_f) :



[ن 01]

❻ المناقشة البيانية لحلول المعادلتين (E) و (E')

$$\frac{1}{2}x^3 = 1 - m - mx^2 \dots (E)$$

$$\frac{1}{2}x^3 = 1 - m - mx^2 \Rightarrow -x^3 = -2 + 2m + 2mx^2 \Rightarrow 2 - x^3 = 2m + 2mx^2$$

$$\Rightarrow 2 - x^3 = 2m(1 + x^2) \Rightarrow \frac{2 - x^3}{1 + x^2} = 2m \Rightarrow \boxed{f(x) = 2m}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = 2m$:

لما $2m < \frac{3}{2}$ أي: $m < \frac{3}{4}$ المعادلة تقبل حل موجب تماما

لما $2m = \frac{3}{2}$ أي: $m = \frac{3}{4}$ المعادلة تقبل حل موجب تماما وحل مضاعف سالب

لما $\frac{3}{2} < 2m < 2$ أي: $\frac{3}{4} < m < 1$ المعادلة تقبل حل موجب تماما وحلين سالبين تماما [ن 0.5]

لما $2m = 2$ أي: $m = 1$ المعادلة تقبل حل مضاعف معدوم وحل سالب تماما

لما $2m > 1$ أي: $m > 1$ المعادلة تقبل حل سالب تماما

$$f(x) = -x + m \dots (E')$$

حلول المعادلة (E') هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = -x + m$:

لما $m < -0.12$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = -0.12$ المعادلة تقبل حل سالب تماما

لما $-0.12 < m < 0$ المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حل سالب تماما [ن 0.5]

لما $0 < m < 1$ المعادلة تقبل حلين متمايزين ومختلفين في الإشارة

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حل موجب تماما وحل مضاعف سالب تماما

لما $1 < m < 2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين ومختلفين في الإشارة

لما $m = 2$ المعادلة تقبل حل موجب تماما وحل مضاعف معدوم

لما $2 < m < 2.12$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماما

لما $m = 2.12$ المعادلة تقبل حل موجب تماما

لما $m > 2.12$ المعادلة لا تقبل حلولا

III) [ن 0.25]

❶ دراسة شفعية الدالة h:

لدينا: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$ ومنه الدالة h زوجية

❷ توضيح كيف يمكن إنشاء (C_h): [ن 0.25]

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \geq 0 \\ f(-x) & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$ ، وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب

- إنشاء (C_h) [ن 0.25]