الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية سعدي الصديق تبسة — السّنة الدّراسيّة:

المستوى: أولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا — التّاريخ:

ميدان التّعلم: تحليل — أستاذ المادة: قرايدية سمير

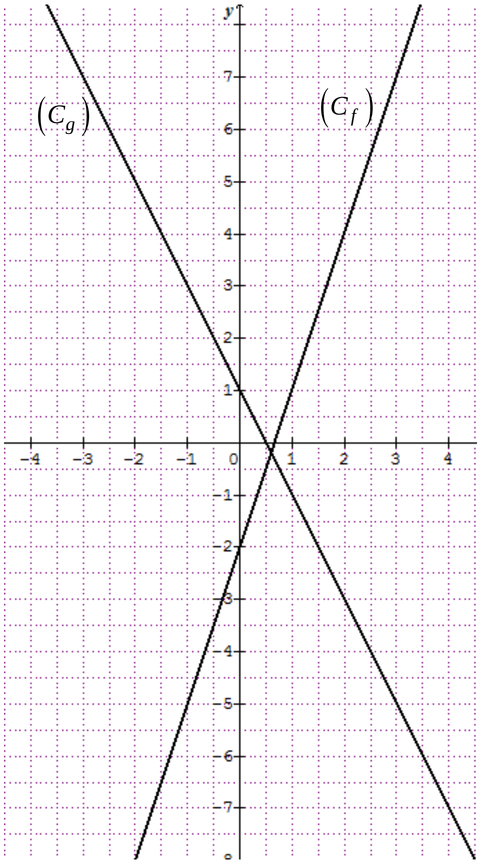
الوحدة: الدّوال المرجعيّة

موضوع الحصّة: الدّالة التّآلفيّة

المكتسبات القبلية: عموميّات حول الدّوال العدديّة

الكفاءات القاعدية: حساب معامل التّوجيه، تعيين عبارة دالة تآلفية

مدّة الإنجاز: ساعتان



نشـــــــاط:

نعتبر الدّالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x-2$ و $g(x)=-2x+1$ ، ليكن (C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيّان المرفقان في الشّكل المقابل.

1) أحسب النّسبة $\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$ ، $\dfrac{f(6)-f(8)}{6-8}$ ، $\dfrac{g(4)-g(2)}{4-2}$ و $\dfrac{g(-9)-g(0)}{-9-0}$ ، ماذا تُلاحظ؟ عمّم النّتائج من أجل كل عددين حقيقيّين x_1 و x_2 (حيث $x_1 \neq x_2$).

2) أدرس اتجاه تغيّر كل من الدّالتين f و g على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج؟

3) عيّن إشارة كل من f و g على $\mathbb{R}$ ؟

الحـــل:

1) لدينا (بعد إجراء مختلف الحسابات): $\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=3$ ، $\dfrac{f(6)-f(8)}{6-8}=3$ ، $\dfrac{g(4)-g(2)}{4-2}=-2$ و $\dfrac{g(-9)-g(0)}{-9-0}=-2$.

نُلاحظ أنّ: $\dfrac{f(6)-f(8)}{6-8}=\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$ وأنّ $\dfrac{g(-9)-g(0)}{-9-0}=\dfrac{g(4)-g(2)}{4-2}$ ، ويُمكن أن نقول أنّه من أجل كل عددين حقيقيّين x_1 و x_2 يكون $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=3$ و $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=-2$ أي أنّ قيمة النّسبة $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ أو النّسبة $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$ مستقلّة عن قيمة العددين x_1 و x_2 .

2) من أجل كل عددين حقيقيّين a و b لدينا: $a<b$ يستلزم $3a-2<3b-2$ يستلزم $f(a)<f(b)$ وبالتّالي الدّالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

- من أجل كل عددين حقيقيّين a و b لدينا: $a<b$ يستلزم $-2a+1>-2b+1$ يستلزم $g(a)>g(b)$ وبالتّالي الدّالة g متناقضة تماماً على $\mathbb{R}$.
- نستنتج أنّ اتجاه تغيّر الدّالتين f و g متعلّق بإشارة النّسبة $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ و $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$ على التّرتيب، فإذا كانت النّسبة موجبة تماماً كانت الدّالة متزايدة تماماً وإذا كانت النّسبة سالبة تماماً كانت الدّالة متناقصة تماماً.

3) الدّالة f موجبة تماماً على المجال $\left]\dfrac{2}{3},+\infty\right[$ ، سالبة تماماً على المجال $\left]-\infty,\dfrac{2}{3}\right[$ وتنعدم من أجل $x=\dfrac{2}{3}$ ، بينما تكون الدّالة g موجبة تماماً على المجال $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[$ ، سالبة تماماً على المجال $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ وتنعدم من أجل $x=\dfrac{1}{2}$.

1) الدّالة التّآلفيّة:

تعريـــــــف:

نُسمّي دالة تآلفيّة كلّ دالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بالشّكل $f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مفروضان.

مثـــال:

1) الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=4-5x$ هي دالة تآلفيّة.

2) الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=4x+9$ هي دالة تآلفيّة.

3) الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=5x^2+2$ ليست دالة تآلفيّة.

حالات خاصة:

1) إذا كان $b=0$ فإنّ الدّالة $f: x\mapsto ax$ تُسمّى دالة خطيّة.

2) إذا كان $a=0$ فإنّ الدّالة $f: x\mapsto b$ تُسمّى دالة ثابتة.

3) الخاصّة المميّزة للدّالة التّآلفيّة:

مبرهنـــــة1:

تكون دالة f تآلفيّة إذا وفقط إذا كانت النّسبة $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ ثابتة من أجل كلّ عددين حقيقيين مختلفين x_1 و x_2 . (بمعنى أنّ تزايد الصّورة متناسب مع تزايد المتغيّر).

النّسبة $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ تُسمّى نسبة تزايد الدّالة f .

4) التّمثيل البياني لدالّة تآلفيّة:

التّمثيل البياني لدالة تآلفيّة في معلم هو مستقيم (D) معامل توجيهه a ويشمل النّقطة $B(0,b)$ حيث b هي التّرتيب إلى المبدأ، كما أنّ المعادلة $y=ax+b$ هي المعادلة المبسّطة للمستقيم (D) .

5) اتّجاه تغيّر دالة تآلفيّة:

مبرهنـــــة2:

لتكن f دالة تآلفيّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax+b$.

1) تكون الدّالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $a>0$.

2) تكون الدّالة f متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $a<0$.

برهان:

1) **إذا كان** $a>0$:

مـن أجـل كـل عـددين حقيقـيّين x_1 و x_2 لـدينا: $x_1<x_2$ يسـتلزم $ax_1+b<ax_2+b$ يسـتلزم $f(x_1)<f(x_2)$ وبالتّالي الدّالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ، وجدول تغيّراتها هو:

x	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

2) **إذا كان** $a<0$:

مـن أجـل كـل عـددين حقيقـيّين x_1 و x_2 لـدينا: $x_1<x_2$ يسـتلزم $ax_1+b>ax_2+b$ يسـتلزم $f(x_1)>f(x_2)$ وبالتّالي الدّالة f متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ ، وجدول تغيّراتها هو:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$

تطبيق:

1) عيّن عبارة الدّالة التّآلفيّة f التي تحقّق $f(2)=-1$ وبيانها يشمل النّقطة $A(0,3)$.

2) عيّن عبارة الدّالة التّآلفيّة g التي يشمل بيانها النّقطتين $A(-1,2)$ و $B(2,5)$.

الحـــل:

1) بما أنّ f دالة تآلفيّة فإنها معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax+b$ ، وكون بيانها يشمل النّقطة $A(0,3)$ فإنّ $b=3$ ، ومن جهة أخرى الدّالة f تحقّق $f(2)=-1$ فإنّ $a(2)+3=-1$ ومنه $a=-2$ ، إذن عبارة الدّالة f هي: $f(x)=-2x+3$.

2) بما أنّ g دالة تآلفيّة فإنها معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=ax+b$ ، وكون بيانها يشمل النّقطة $A(-1,2)$ والنّقطة $B(2,5)$ فإنّ: $\begin{cases} g(-1)=2 \\ g(2)=5 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a(-1)+b=2 \\ a(2)+b=5 \end{cases}$ إذن بطرح المعادلتين طرفاً لطرف نجد أنّ $3a=3$ ومنه $a=1$ ، وبالتّعويض عن قيمة a في إحدى المعادلتين نجد أنّ $b=3$ ، وعليه تكون عبارة الدّالة g هي: $g(x)=x+3$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية سعدي الصديق تبسة — **السّنة الدّراسيّة:**

المستوى: أولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا — **التّاريخ:**

ميدان التّعلم: تحليل — **أستاذ المادة: قرايدية سمير**

الوحدة: الدّوال المرجعيّة

موضوع الحصّة: الدّالة مربّع

المكتسبات القبلية: عموميّات حول الدّوال العدديّة

الكفاءات القاعدية: التّعرّف على الدّالة مربّع وخواصها

مدّة الإنجاز: ساعة واحدة

نشـــــاط[1]:

اقترحت سلطات منطقة سياحيّة بيع أراضي لا تفوق مساحاتها $3600\,m^2$ وسعر كل متر مربّع هو 1 وحدة (الوحدة هي مليون سنتيم).

قال حميد لشريكه عثمان: " سعر القطعة الأرضية يزداد كلما يزداد طول ضلعها ! " وأضاف عثمان:" وكذلك ينقص كلما ينقص الضلع ".

يرمز x لطول القطعة الأرضيّة المربّعة (الوحدة هي المتر) ولسعرها الوحدة هي مليون سنتيم).

1) عيّن مجموعة تعريف الدّالة f باعتبار شروط النّص ثمّ عبّر عن $f(x)$ بدلالة x .

2) لخّص أقوال حميد و عثمان باستعمال الدّالة x .

3) اتمم الجدول الآتي:

x	0	10	20	30	40	50
$f(x)$						

4) استعمل معلماً متعامداً $(O,\vec{i},\vec{j})$ و اختر $1cm$ من أجل $10\,m$ و $2\,cm$ من أجل 10^9 مليون سنتيم لتُمثّل بيانيّاً الدّالة f .

الحـــل:

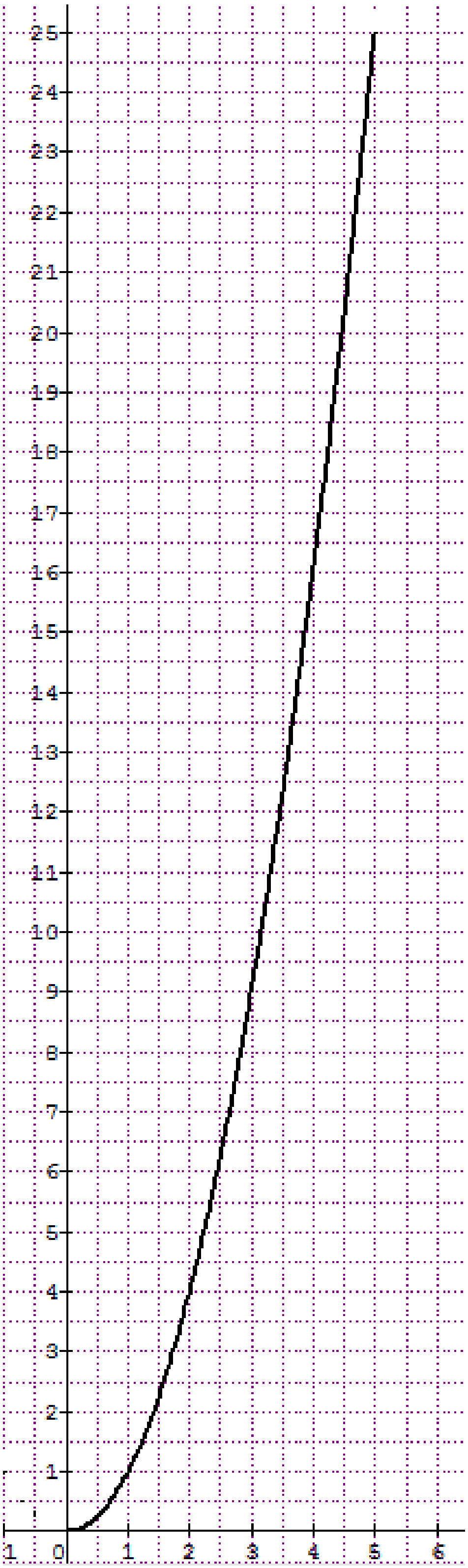
1) مجموعة تعريف الدّالة f باعتبار شروط النّص هي: $[0,60]$.

2) سعر المتر المربّع الواحد هو $10^4\,DA$ إذن ثمن القطعة الأرضيّة هو $f(x)=10^4x^2$.

3) إتمام الجدول:

x	0	10	20	30	40	50
$f(x)$	0	10^6	4×10^6	9×10^6	16×10^6	25×10^6

4) التّمثيل البياني للدّالة f موضّح في الرّسم المقابل.



1) الدّالة مربّع:

تعريـــــف:

الدّالة مربّع هي الدّالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x مربّعه x^2 ، أي إذا رمزنا للدّالة مربّع بالرّمز f فإنّنا نكتب: $f(x)=x^2$ أو $x \xrightarrow{f} x^2$ أو $f: x \mapsto x^2$.

2) اتّجاه التغيّر:

مبرهنــــــة:

الدّالة مربّع متزايدة تماماً على $[0,+\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]-\infty,0]$.

برهان:

- ليكن a و b عددين حقيقيّين من المجال $[0,+\infty[$، لدينا $a<b$ يستلزم $a^2<b^2$ يستلزم $f(a)<f(b)$

[1] نشاط 01 صفحة 84 من الكتاب المدرسي.

ومنه الدّالة مربّع متزايدة تماماً على المجال $[0,+\infty[$.

• ليكن a و b عددين حقيقيّين من المجال $]-\infty,0]$ ، لدينا $a<b$ يستلزم $a^2>b^2$ يستلزم $f(a)>f(b)$

ومنه الدّالة مربّع متناقصة تماماً على المجال $]-\infty,0]$.

وجدول تغيّرات الدّالة مربّع هو:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	↘ 0 ↗

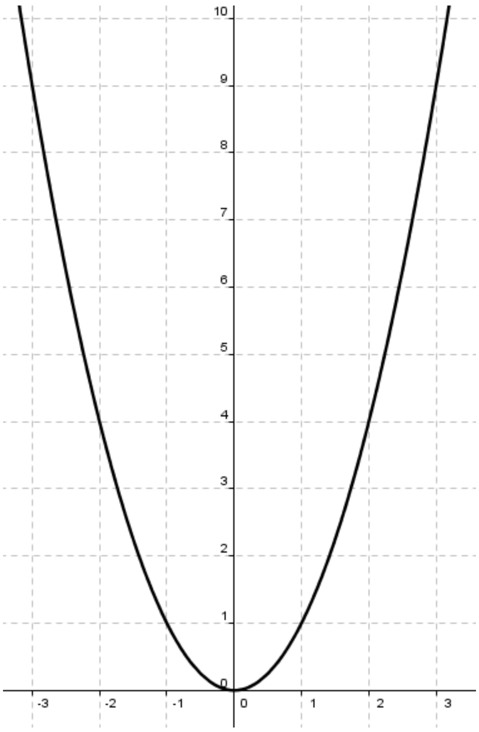
3) شفعيّة الدّالة مربّع:

مبرهنـــــــة:

الدّالة مربّع دالة زوجيّة.

برهان:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ ومنه الدّالة مربّع دالة زوجيّة بيانها متناظر بالنّسبة إلى محور التّراتيب، وتمثيلها البياني موضّح في الشّكل المقابل.



تطبيق:

لتكن f دالة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=x^2$.

1) أحسب صور الأعداد: $\sqrt{3}$ ، $1-\sqrt{2}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{3}$.

2) قارن بين صورتي العددين: $\sqrt{3}-2$ و $2-\sqrt{3}$.

الحــــل:

1) لدينا: $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$ ، $f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{2}$ ، $f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

2) لدينا: $f(2-\sqrt{3})=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$ و $f(\sqrt{3}-2)=(\sqrt{3}-2)^2=7-4\sqrt{3}$ ومنه يكون لدينا $f(\sqrt{3}-2)=f(2-\sqrt{3})$ (لأنّ الدّالة مربّع زوجية).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية سعدي الصديق تبسة — السّنة الدّراسيّة:

المستوى: أولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا — التّاريخ:

ميدان التّعلم: تحليل — أستاذ المادة: قرايدية سمير

الوحدة: الدّوال المرجعيّة

موضوع الحصّة: الدّالة مقلوب

المكتسبات القبلية: عموميّات حول الدّوال العدديّة

الكفاءات القاعدية: التّعرّف على الدّالة مقلوب وخواصها

مدّة الإنجاز: ساعة واحدة

نشـــــاط:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x}$.

1) أحسب $f(1)$ و $f(-1)$ ثمّ قارن بينهما، أحسب $f(2)$ و $f(-2)$ ثمّ قارن بينهما واستنتج شفعيّة الدّالة f .

2) أدرس اتجاه تغيّر الدّالة f على المجالين: $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

الحــــل:

1) لدينا: $f(-1)=-1$ و $f(1)=1$ إذن $f(1)=-f(-1)$ ، كذلك $f(-2)=-\frac{1}{2}$ و $f(2)=\frac{1}{2}$ إذن $f(2)=-f(-2)$.

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا: $f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$ إذن الدّالة f فرديّة بيانها متناظر بالنّسبة إلى مبدأ المعلم.

2) **دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f :**

أ) **على المجال $]-\infty,0[$:**

ليكن a و b عددين حقيقيّين من المجال $]-\infty,0[$ ، لدينا $a<b$ يستلزم $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ يستلزم $f(a)>f(b)$

إذن الدّالة f متناقصة تماماً على $]-\infty,0[$.

ب) **على المجال $]0,+\infty[$:**

ليكن a و b عددين حقيقيّين من المجال $]0,+\infty[$ ، لدينا $a<b$ يستلزم $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ يستلزم $f(a)>f(b)$

إذن الدّالة f متناقصة تماماً على $]0,+\infty[$.

وجدول تغيّرات الدّالة f هو:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

1) الدّالة مقلوب:

تعريـــــف:

الدّالة مقلوب هي الدّالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x غير معدوم مقلوبه $\frac{1}{x}$ ، أي إذا رمزنا للدّالة مقلوب بالرّمز f فإنّنا نكتب: $f(x)=\frac{1}{x}$ أو $x\xrightarrow{f}\frac{1}{x}$ أو $f:x\mapsto\frac{1}{x}$.

2) اتجاه التغيّر:

مبرهنـــــة:

الدّالة مقلوب متناقصة تماماً على المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

برهان:

أنظر النّشاط.

3) شفعيّة الدّالة مقلوب:

مبرهنـــــــة:

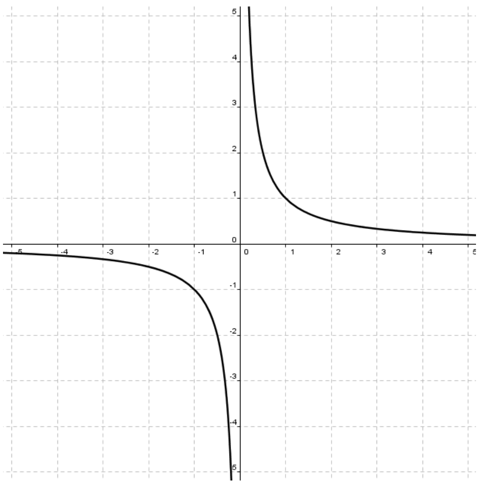
الدّالة مربّع دالة فرديّة.

برهان:

أنظر النّشاط.

4) التّمثيل البياني للدّالة مقلوب:

التّمثيل البياني للدّالة مقلوب موضّح في الرّسم المقابل:



تطبيق:

هل يُمكن أن يشكّل الجدول التّالي الدّالة مقلوب؟

x	$0,4$	10^{-1}	1	$\sqrt{2}-1$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
$f(x)$	$2,5$	$0,1$	1	$\sqrt{2}+1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

الحـــل:

الدّالـــة مقلـــوب معرّفـــة علـــى $\mathbb{R}^*$ بــــ: $f(x)=\frac{1}{x}$ ، ومنـــه لـــدينا: $f(0,4)=\frac{1}{0,4}=2,5$ ، $f\left(10^{-1}\right)=\frac{1}{10^{-1}}=10$ ، $f(1)=1$ ، $f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $f\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

وعليه الجدول لا يُعرّف الدّالة مقلوب.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية سعدي الصديق تبسة | السّنة الدّراسيّة:
المستوى: أولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا | التّاريخ:
ميدان التّعلم: تحليل | أستاذ المادة: قرايدية سمير

الوحدة: الدّوال المرجعيّة

موضوع الحصّة: دالة الجذر التّربيعي
المكتسبات القبلية: عموميّات حول الدّوال العدديّة
الكفاءات القاعدية: التّعرّف على دالة الجذر التّربيعي وخواصها
مدّة الإنجاز: ساعة واحدة

نشـــــــاط:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}_+$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$.

1) أحسب صور الأعداد: 0 ، 1 ، 3 و 4 بواسطة الدّالة f .

2) أدرس اتجاه تغيّر الدّالة f على المجال $[0,+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

الحـــــل:

1) لدينا: $f(0)=0$ ، $f(1)=1$ ، $f(3)=\sqrt{3}$ و $f(4)=2$.

ليكن a و b عددين حقيقيّين من المجال $[0,+\infty[$ ، لدينا $a<b$ يستلزم $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ يستلزم $f(a)<f(b)$ إذن الدّالة f متزايدة تماماً على $[0,+\infty[$.

وجدول تغيّرات الدّالة f هو:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

1) دالة الجذر التّربيعي:

تعريـــــف:

دالة الجذر التّربيعي هي الدّالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x موجب جذره التّربيعي $\sqrt{x}$ ، أي إذا رمزنا لدالة الجذر التّربيعي بالرّمز f فإنّنا نكتب: $f(x)=\sqrt{x}$ أو $x\xrightarrow{f}\sqrt{x}$ أو $f:x\mapsto\sqrt{x}$.

2) اتّجاه التغيّر:

مبرهنــــــة:

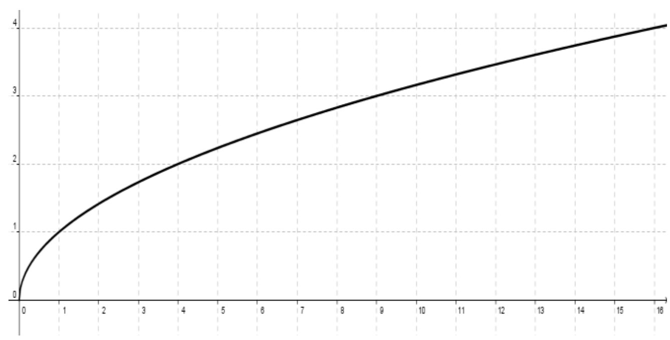
دالة الجذر التّربيعي متزايدة تماماً على المجال $[0,+\infty[$.

برهان:

أنظر النّشاط.

3) التّمثيل البياني لدالة الجذر التّربيعي:

التّمثيل البياني لدالة الجذر التّربيعي موضّح في الرّسم المقابل:



تطبيـــق: نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}_+$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$.

أحسب صور الأعداد: 0 ، 3 ، 10^4 ، 3×10^6 و $(-a-b)^2$ حيث a و b عددان حقيقيّان.

الحـــل:

لدينا: $f(0)=0$ ، $f(3)=\sqrt{3}$ ، $f\left(10^4\right)=10^2$ ، $f\left(3\times10^6\right)=1000\sqrt{3}$ و $f\left((-a-b)^2\right)=|a+b|$.