الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
المفتشية العامة التربية الوطنية

الدوال الأصلية و الحساب التكاملي

يوم تكويني لفائدة أساتذة
المقاطعة الجزائر شرق 03

من إعداد أساتذة المقاطعة
تحت إشراف
بادي ربيعي
مفتش التربية الوطنية

جانفي 2022

المحتوى المعـرفي : ⌘ الدوال الأصلية.　　الـــــحصة : الأولى (ساعة واحدة)

الكفاءة المستهدفة : ⌘ تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال .

⌘ تعيين الدوال الأصلية لدوال مألوفة .

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال

نشاط : الدوال العددية f ، F و G معرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1} \text{ ، } F(x)=\ln(x^2-1) \text{ و } G(x)=\ln(x^2-1)+3$$

- تحقق أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$ و $G'(x)=f(x)$

حل النشاط: لدينا من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $F'(x)=\frac{2x}{x^2-1}=f(x)$ و $G'(x)=\frac{2x}{x^2-1}=f(x)$.

الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على Iومن أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

أمثلة

1) من النشاط السابق الدالتان F و G دالتان أصليتان للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

2) الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=x^2+x+e^x$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=2x+1+e^x$

3) الدالة G المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $G(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ هي دالة أصلية
للدالة gالمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة (خواص تقبل دون برهان):

- إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل على الأقل دالة أصلية على I .
- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f
على I هي الدوال: $x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

مثال1 : الدالة G المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $G(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ هي دالة أصلية
للدالة gالمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

وعليه الدوال الأصلية للدالة g على $]0;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto\frac{1}{x}+\sqrt{x}+k$ حيث k ثابت حقيقي

مثال2 : الدالة $F:x\mapsto x^3+x$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $f:x\mapsto 3x^2+1$

وعليه الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x\mapsto x^3+x+k$ حيث k ثابت حقيقي

تقويم : f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x+e^{x-1}$

1) بين أن الدالة f تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$

2) عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

3) عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(1)=5$.

حل :

1) الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$

2) لدينا الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال : $x \mapsto x^2+e^{x-1}+k$ حيث k عدد حقيقي.

3) لدينا من جهة $F(x)=x^2+e^{x-1}+k$ و لدينا من جهة ثانية : $F(1)=5$.

$F(1)=5$ يعني $1+e^0+k=5$ أي $k=3$. نجد هكذا أن $F(x)=x^2+e^{x-1}+3$

الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. و x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي .

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط : $F(x_0)=y_0$

تقويم : F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x)=\dfrac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}$ و $G(x)=\dfrac{-6x-2}{x^2+x+1}$

1) تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة f على $\mathbb{R}$ أ) **بحساب الفرق** $F(x)-G(x)$ ، **ب) باستعمال المشتق**

2) عين الدالة الأصلية H للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تحقق : $H(1)=5$

تقويم : f الدالةالمعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(3x+1)e^{-x}$.

أحسب العددان الحقيقيان a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=(ax+b)e^{-x}$

دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الجواب: $a=-3$ و $b=-4$

تقويم :

لتكن الدالة G المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $G(x)=(ax+b)\ln x$.

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{2x-3+2x\ln x}{x}$

1) أحسب العددين a و b لكي تكون الدالة G دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$ التي تنعدم من أجل e القيمة للمتغير x .

حل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $G'(x)=g(x)$

نجد: $G(x)=(2x-3)\ln x$

2) F دالة أصلية أخرى لـ f على $]0;+\infty[$: $F(x)=G(x)+k$

$F(e)=0$ تكافئ: $G(e)+k=0$ نجد: $k=3-2e$

المحتوى المعرفي : ⌘ الدوال الأصلية. الحصة : الثانية (ساعتين)

الكفاءة المستهدفة : ⌘ الدوال الاصلية لدوال مألوفة و العمليات على الدوال الأصلية.

3. الدوال الأصلية لدوال مألوفة : يستنتج من مشتقات دوال مألوفة.

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

إذاكان: $f(x)=$	فإن: $F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+c$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+c$	
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$;$(k\in\mathbb{Z})$

خواص: 1) إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لِـ f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية لِـ $f+g$ على I

2) إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I ، $(k\in\mathbb{R})$.

نتائج:

. كل دالة كثير حدود تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$.

. كل دالة ناطقة تقبل دوالا أصلية عل أي مجال من مجموعة تعريفها .

تقويم :

عين دالة أصلية F للدالة f على المجال I في الحالتين:

1) $f(x)=x+2+\frac{1}{x^2}+e^x$ ، $I=]0;+\infty[$ 2) $f(x)=4x^2+\frac{5}{x}-3\sqrt{x}$ ، $I=[1;2]$

3. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u^{n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^{n}}$ $(n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$
$u'e^{u}$	$e^{u}+c$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)+c$	
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)+c$	

يشار إلى أن الدالة $\ln|u|+c$ أصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ على المجال I بحيث :

$u(x)>0$ من أجل كل x من I، أو $u(x)<0$ من أجل كل x من I.

تقويم (1) و تطبيقات منزلية :

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية F للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=2x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$, $I=]-1;+\infty[$

2) $f(x)=e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)^2$, $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x)^2$ ، $I=]0;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{e^{x}-1}{\left(x-e^{x}\right)^2}$, $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$ ، $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=e^{2x}+1-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}$ ، $I=]-\infty;0[$

7) $f(x)=\frac{2e^{x}}{\sqrt{e^{x}-1}}$ ، $I=]0;+\infty[$

8) $f(x)=2\sin(2x)+3\cos(4x)$ ، $I=[0;\pi]$

9) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}e^{\sqrt{x-2}}$ ، $I=]2;+\infty[$

تقويم (2)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x-(x-1)e^{-x}$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)-x=1-e^{-x}-f'(x)$

ب) استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

الأجوبة: ـ تقويم (1) ـ

1) $f(x)=ax+b+\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ مع: $u(x)=x+1$ إذن: $F(x)=2\frac{x^2}{2}+x+\frac{-1}{x+1}=\boxed{x^2+x-\frac{1}{x+1}}$

2) $f=-\frac{1}{2}u'\times u^2$ حيث : $u(x)=1-e^{2x}$ و منه : $F(x)=-\frac{1}{2}\frac{(u(x))^3}{3}\boxed{=-\frac{1}{6}\left(1-e^{2x}\right)^3}$

3) $f=u'\times u^2$ حيث : $u(x)=\ln(x)$ و منه : $F(x)=\frac{(u(x))^3}{3}\boxed{=\frac{1}{3}(\ln x)^3}$

4) $f=-\frac{u'}{u^2}$ حيث : $u(x)=\ln(x)$ و منه : $F(x)=\frac{(u(x))^3}{3}\boxed{=\frac{1}{3}(\ln x)^3+c}$ c ثابت حقيقي

5) $f=\frac{u'}{u}$ حيث : $u(x)=e^x-x$ و $(e^x-x>0)$ و منه: $F(x)=\ln|e^x-x|\boxed{=\ln\left(e^x-x\right)}$

6) $f(x)=e^{ax+b}+1-\frac{u'(x)}{u(x)}$ حيث : $u(x)=e^x-1$ و $e^x-1<0$ على $]-\infty;0[$

و منه : $F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+x-\ln|u(x)|\boxed{=\frac{1}{2}e^{2x}+x-\ln\left(1-e^x\right)}$

7) $f=2\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$ حيث : $u(x)=e^x-1$ و منه : $F(x)=2\times\left(2\sqrt{u(x)}\right)\boxed{=4\sqrt{e^x-1}}$

8) $F(x)=2\times-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+\frac{1}{4}\sin(4x)=-\cos(2x+3)+\frac{1}{4}\sin(4x)$

9) $f=2\times\left(u'e^u\right)$ حيث : $u(x)=\sqrt{x-2}$ و منه : $F(x)=2\times e^{u(x)}=2\times e^{\sqrt{x-2}}$

الأجوبة: ـ تقويم (2) ـ

أ) من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=1-\left[e^{-x}-e^{-x}(x-1)\right]=1+e^{-x}(x-2)$

من جهة : $1-e^{-x}-f'(x)=1-e^{-x}-1-e^{-x}(x-2)=-e^{-x}(x-1)$

و من جهة ثانية : $f(x)-x=-(x-1)e^{-x}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)-x=1-e^{-x}-f'(x)$

ب) لدينا $f(x)-x=1-e^{-x}-f'(x)$ معناه: $f(x)=x+1-e^{-x}-f'(x)$

نستنتج أن : $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+e^{-x}-f(x)$.

$F(x)=\frac{x^2}{2}+x+e^{-x}-x+(x-1)e^{-x}=\frac{x^2}{2}+xe^{-x}$.

المحتوى المعـرفي : الدوال الأصلية. الـــــحصة : الثالثة (ساعة واحدة)

الكفاءة المستهدفة : حل معادلات تفاضلية من الشكل : $y'=f(x)$ و $y''=f(x)$.

نشاط: نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلتين التفاضليتين : $y'=4e^{2x}+e^{-x}$..........(1) و $y''=4e^{2x}+e^{-x}$..........(2)

- عين في $\mathbb{R}$ الدوال الأصلية G للدالة: $x\to 4e^{2x}+e^{-x}$ ، ثم استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة (1) .
- عين في $\mathbb{R}$ الدوال الأصلية F للدوال G ، ثم استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة (2) .

1) المعادلات التفاضلية من الشكل : $y'=f(x)$

مبرهنة:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $\boxed{y'=f(x)}$ هي الدوال y حيث: $\boxed{y=F(x)+c}$ مع c عدد حقيقي ثابت.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{x^2}$ في $]0;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=-\frac{1}{x}+c$ مع c ثابت حقيقي.

تقويم:

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : (E)..... $y'=\frac{2x}{x^2+1}$.   الجواب : $F(x)=\ln(x^2+1)+c$

2) عين حلا خاصا F للمعادلة (E) بحيث: $F\left(\sqrt{e-1}\right)=1$. $F\left(\sqrt{e-1}\right)=1$ نجد: $c=0$

.

2) المعادلات التفاضلية من الشكل : $y''=f(x)$

مبرهنة:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $\boxed{y''=f(x)}$ هي الدوال y حيث: $\boxed{y=G(x)+\alpha x+\beta}$ مع α و β عددان حقيقيان ثابتان.

تقويم: 1) حل في المجال $]1;+\infty[$ المعادلة التفاضلية : (E)..... $y''=\frac{1}{(x-1)^2}$.

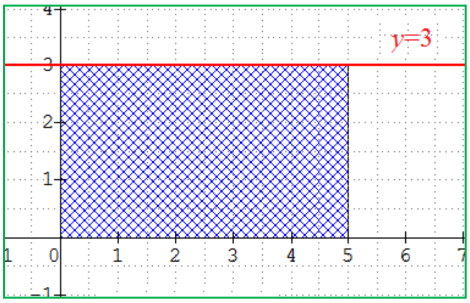
2) عين حلا خاصا F للمعادلة (E) بحيث: $F(2)=0$ و $F'(2)=1$ الجواب : $F(x)=-\ln(x-1)+2x-4$

المحتوى المعــــرفي : ✠ الحساب التكاملي . الــــــمدة : ساعتان (02)

الكفاءة المستهدفة : ✠ توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح

1. مـفهوم التكامل:

نشاط: نزود المستوي في كل ما سيأتي بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث وحدة الأطوال هي $1cm$.

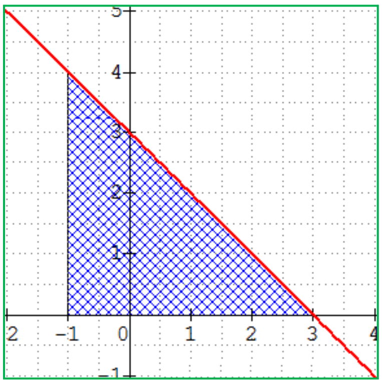


1) f_1 الدالةالمعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f_1(x)=3$.

(C_1) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نرمز بِـ A_1 إلى مساحة الحيز الملون تحت المنحني (C_1) بين العددين 0 و 5.

1. أحسب بِـ cm^2 المساحة A_1 .
2. عين دالة أصلية F_1 للدالة f_1 على $\mathbb{R}$.
3. أحسب $F_1(5)-F_1(0)$

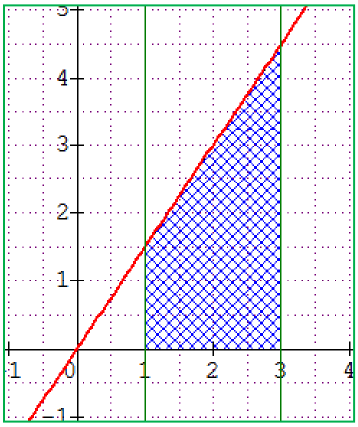


2) f_2 الدالةالمعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f_2(x)=-x+3$.

و (C_2) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نرمز بِـ A_2 إلى مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_2) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=3$.

1. أحسب بِـ cm^2 المساحة A_2 .
2. عين دالة أصلية F_2 للدالة f_2 على $\mathbb{R}$.
3. أحسب $F_2(3)-F_2(-1)$



3) f_3 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f_3(x)=\dfrac{3}{2}x$.

و ليكن (C_3) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نرمز بِـ A_3 إلى مساحة الحيزمجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $1\le x\le 3$ و $0\le y\le f_3(x)$

1. أحسب بِـ cm^2 المساحة A_3 .
2. عين دالة أصلية F_3 للدالة f_3 على $\mathbb{R}$
3. أحسب $F_3(3)-F_3(1)$.

4) ماذا تلاحظ في الحالات الثلاث؟ ضع تخمينا

حل النشاط : 1) (1 $A_1=5\times3=15\,cm^2$ (2 $F_1(x)=3x$ (3 $F_1(5)-F_1(0)=3\times5-3\times0=15$

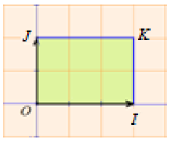
2) (1 $A_2=\dfrac{4\times4}{2}=8\,cm^2$ (2 $F_2(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$ (3 $F_2(3)-F_2(-1)=\dfrac{9}{2}+\dfrac{7}{2}=8$

3) (1 $A_3=\dfrac{(1.5+4.5)\times2}{2}=6\,cm^2$ (2 $F_3(x)=\dfrac{3}{4}x^2$ (3 $F_3(3)-F_3(1)=\dfrac{27}{4}-\dfrac{3}{4}=6$

الملاحظة: نلاحظ أن : $\boxed{A_1=F_1(5)-F_1(0)}$ و $\boxed{A_2=F_2(3)-F_2(-1)}$ و $\boxed{A_3=F_3(3)-F_3(1)}$

وضع تخمين : مساحة حيز تحت المنحني (C_f) الممثل لدالة موجبة f بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$. حيث F دالة أصلية لِـ f

2. تكامل دالة ـ مساحة الحيز تحت منحني لدالة مستمرة و موجبة



في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. لتكن النقطتان K احداثييها $(1;1)$

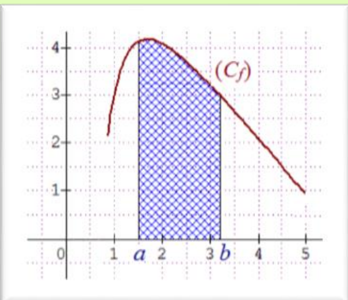
وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$ نرمز له بـ ua .

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I . a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\le b$

و F دالة أصلية للدالة f على المجال I. (C_f) منحنى الدالة f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

⌘ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=a$ و $x=b$

هو : $F(b)-F(a)$



ملاحظات: الحيز السابق هوالحيز لمجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي

حيث $a\le x\le b$ و $0\le y\le f(x)$

3.التكامل

تعريف f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I و F دالة أصلية للدالة f على المجال I. يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ التكامل من a إلى b لِـ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$

نقرأ: "التكامل من a إلى b لِـ $f(x)$ تفاضل x" ونكتب: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

ملاحظات:

1) العدد $F(b)-F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I.

2) يمكن استبدال المتغير x بأي متغير آخر ماعدا a و b و f مثلا: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(\mathrm{z})\mathrm{dz}=...$

أمثلة :

(1 $$\int_1^2(x^2-4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_1^2=\left(\frac{2^3}{3}-4\times2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-4\times1\right)=\boxed{-\frac{5}{3}}$$

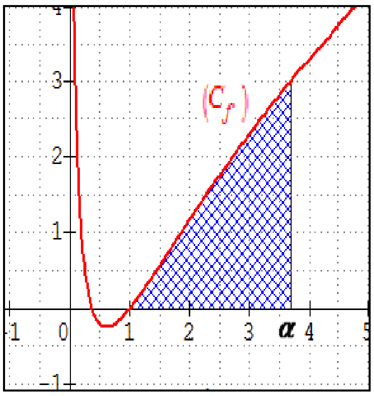
(2 $$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left[\ln(e^x+1)\right]_0^{\ln 2}=\ln(e^{\ln 2}+1)-\ln(e^0+1)=\ln 3-\ln 2=\boxed{\ln\frac{3}{2}}$$

نتيجة: إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[a;b]$.

فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)

و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$

هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx$.



تقويم: ت 23 ص 185

المحتوى المعــرفي : ✦ الحساب التكاملي. الـــــحصة : الثانية الـــــــمدة : ساعة(01)

الكفاءة المستهدفة : ✦ توظيف خواص التكامل لحساب دوال أصلية.

نشاط: f دالة مستمرة على مجال I . من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I

بين أن $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

حل النشاط : F دالة أصلية لِـ f على I:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=[F(b)-F(a)]+[F(c)-F(b)]=[F(c)-F(a)]=\int_a^c f(x)dx$$

1. خواص التكامل:

خاصية شال : f دالة مستمرة على مجال I . من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I

لدينا: $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

نتيجة: من الواضح أن : $\int_a^a f(x)dx=0$ ومنه إذا أخذنا $c=a$ نحصل على $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

خاصية 2 الخطية : f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ ......(1) $\int_a^b k\times f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ ......(2)

برهان: (1) F و G دالتان أصليتان على الترتيب للدالتين f و g على المجال I

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=[F(x)+G(x)]_a^b=[F(b)+G(b)]-[F(a)+G(a)]$$

$$=[F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)]=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

(2) $$\int_a^b k\,f(x)dx=[kF(x)]_a^b=kF(b)-kF(a)=k[F(b)-F(a)]=k\int_a^b f(x)dx$$

مثال : $$\int_0^1\left(x^2+\frac{6x}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^2dx+3\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+3\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{3}+3\ln 2$$

خاصية 3 المقارنة : f و g دالتان مستمرتان على المجال I ، a و b عددان من I ، $(a<b)$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x)\geq 0$ فإن : $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x)\leq g(x)$ فإن : $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

برهان:

(1) F دالة أصلية للدالة f على المجال I . إذن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$.

بما أن $f(x)\geq 0$ على $[a;b]$ فإن : F متزايدة على المجال $[a;b]$ و بالتالي: $F(a)\leq F(b)$

أي : $F(b)-F(a)\geq 0$ و ومنه : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(2) يكفي أن ملاحظة أن: $g(x)-f(x)\geq 0$ و نطبق النتائج السابقة.

ملاحظات: f دالة مستمرة على المجال $[-a;a]$.

- إذا كانت f زوجية فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- إذا كانت f فردية فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

تقويم:

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-x$.

2) استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم بين دون حساب أن : $\int_1^2 x\,dx < \int_1^2 e^x\,dx$ ......(I)

3) تحقق بالحساب من صحة (I) .

حل:

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^x-1$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
e^x-1	$-$ 0 $+$

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

2) من (1) نستنتج أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\geq f(0)$ ($f(0)$ قيمة حدية صغرى للدالة f) معناه : $f(x)\geq 1$

و بالتالي : $f(x)>0$ أي : $e^x-x>0$ ومنه من أجل كل x من $[1;2]$: $e^x-x>0$ تكافئ : $x<e^x$

و بالتالي (الخاصية السابقة) : $\int_1^2 x\,dx < \int_1^2 e^x\,dx$

3) $\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \boxed{1,5}$ و $\int_1^2 e^x\,dx = \left[e^x\right]_1^2 = \boxed{e^2-e^1} \simeq 4,67$

تمرين :

1) احسب التكاملين I و J حيث:

$$I=\int_1^e \ln x\,dx+\int_1^e\left(x+\ln\frac{1}{x}\right)dx \qquad J=\int_1^e \ln(1+t^2)dt+\int_e^1 \ln(1+t^2)dt$$

2) قارن، دون حساب، بين التكاملين K وL :

$$K=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \quad ; \quad L=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

حل : 1) حساب I و J:

$$I=\int_1^e \ln x\,dx+\int_1^e\left(x+\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e\left(\ln x+x+\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e(\ln x+x-\ln x)dx=\int_1^e x dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$J=\int_1^e \ln(1+t^2)dt+\int_e^1 \ln(1+t^2)dt=\int_1^e \ln(1+t^2)dt-\int_1^e \ln(1+t^2)dt=0$$

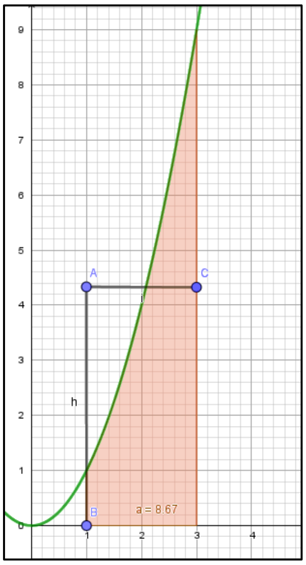
2) المقارنة بين التكاملين Kو L

لدينا : $0\le x\le 1$ ومنه $0\le \frac{x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^2}$ وبالتالي $\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\le\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ أي : $L\le K$

المحتوى المعـرفي : ✦ الحساب التكاملي الـحصة الثالثة (ساعة)

الكفاءة المستهدفة : ✦ مفهوم القيمة المتوسطة لدالة وحصرها .

نشاط : f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=x^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=1cm$



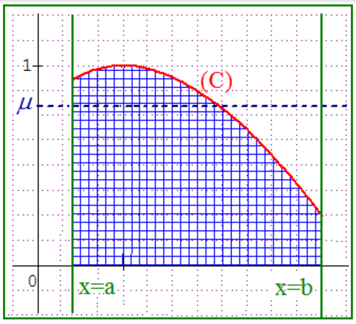
- أحسب A_1 مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x=1$ و $x=3$
- قارن بين A_1 و A_2 حيث A_2 مساحة المستطيل الذي بعداه 2 و $\frac{13}{3}$.

1. القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي μ حيث: $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

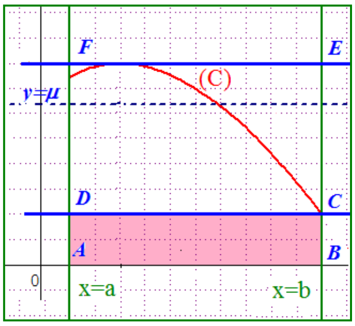
التفسير البياني في حالة دالة موجبة:



نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$.

$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يعني: $\mu(b-a)=\int_a^b f(x)dx$



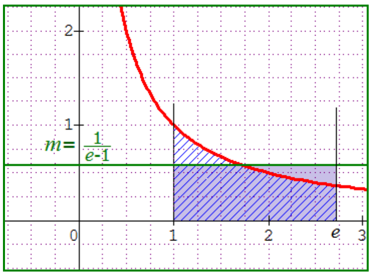
$\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

$\mu(b-a)$ هي مساحة لمستطيل بعداه $b-a$ و μ (القيمة المتوسطة)

القيمة المتوسطة لِـ f على $[a;b]$، هي الارتفاع μ المستطيل الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

بما أن المساحة $\int_a^b f(x)dx$ محصورة بين مساحة المستطيل $ABCD$ و مساحة المستطيل $ABEF$

من الواضح أنه يوجد مستطيل ارتفاعه μ أي مساحته $\mu(b-a)$ مساوية للمساحة $\int_a^b f(x)dx$.



مثال:

القيمة المتوسطة للدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $[1;e]$

هي العدد الحقيقي: $m=\frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}dx=\frac{1}{e-1}[\ln x]_1^e=\boxed{\frac{1}{e-1}}$

2. حصر القيمة المتوسطة لدالة على مجال

خاصية: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $m \le f(x) \le M$

فإن: $m(b-a) \le \int_b^b f(x)dx \le M(b-a)$

برهان: إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$: $m \le f(x) \le M$ فإن $\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$

أي $m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$ و بما أن $\int_a^b dx=[x]_a^b=b-a$

نحصل على: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

حالة خاصة:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M

بحيث من أجل كل x من I، $|f(x)| \le M$ فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$.

تمــرين: f دالة معرفة على المجال $[1;2]$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x}$

أ) عين حصرا للعدد $\int_1^2 f(x)\,dx$ ب) استنتج حصرا لـ: $\ln 2$

حل

أ) لدينا f مستمرة على المجال $[1;2]$ ومنه من أجل $1 \le x \le 2$ فإن $\frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le 1$ أي $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$ ومنه

$\frac{1}{2}\int_1^2 dx \le \int_1^2 f(x)dx \le \int_1^2 dx$ أي $\frac{1}{2}[x]_1^2 \le \int_1^2 f(x)dx \le [x]_1^2$ بمعنى $\frac{1}{2} \le \int_1^2 f(x)dx \le 1$

ب) لدينا $\frac{1}{2} \le \int_1^2 f(x)dx \le 1$ أي $\frac{1}{2} \le [\ln x]_1^2 \le 1$ ومنه $\frac{1}{2} \le \ln 2 - \ln 1 \le 1$ بالتالي $0.5 \le \ln 2 \le 1$

المحتوى المعـــرفي : ✦ الحساب التكاملي . الـــــــحصة : الرابعة (ساعة)

الكفاءة المستهدفة : ✦ توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة .

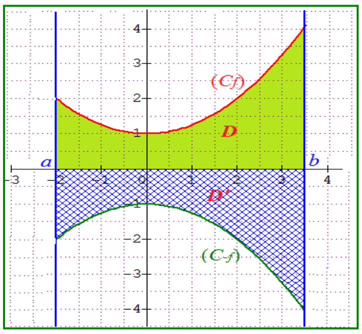
1.التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

1) تكامل دالة سالبة على مجال

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بِـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=a$، $x=b$ و $y=0$

و A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f}) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=a$، $x=b$ و $y=0$



بما أن f سالبة على $[a;b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a;b]$

الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل

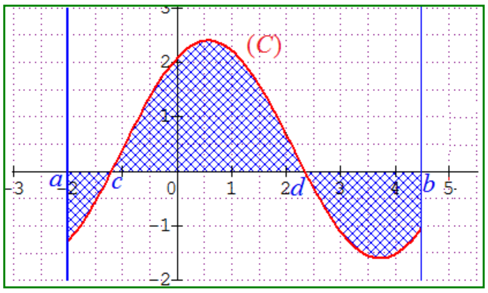
فمساحتاهما متساويتان أي $\boxed{A'=A}$.

و بالتالي : $A=\int_a^b -f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx$

2) تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

لتكن مثلا f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a;b]$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.



في مثل هذه الحالة مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C)

و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$

هي S حيث : $S=\int_a^b |f(x)|dx$

مثلا في الشكل أعلاه لدينا : $S=-\int_a^c f(x)dx+\int_C^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$

تقويم:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=x^2-2x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

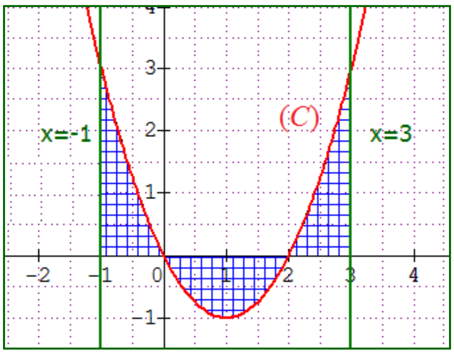
أحسب بـ cm^2 المربع مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=-1$، $x=3$ و $y=0$

حل:

لدينا $S=\int_{-1}^{3}|f(x)|dx$

. تحديد إشارة $f(x)$:

x	-1		0		2		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



$$S=\int_{-1}^{3}|f(x)|dx=\left[\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx\right]\times 4cm^2$$
$$=\left(\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{2}^{3}\right)\times 4cm^2=16cm^2$$

ملاحظة :

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f) ، (C_g)

و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي: S حيث : $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$

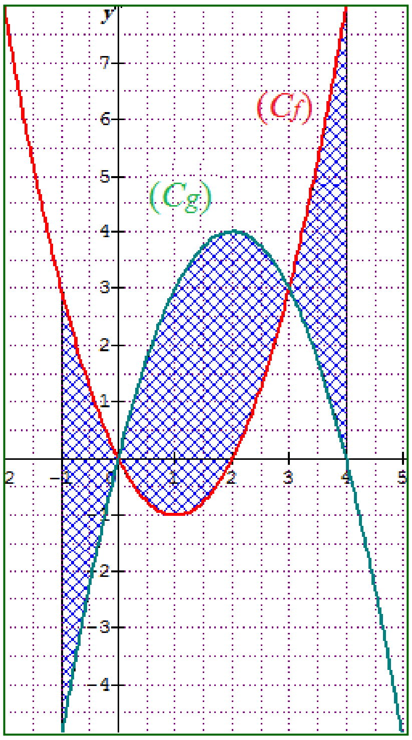
تطبيق :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول هي $1cm$ على كل محور

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$

كما يلي: $f(x)=x^2-2x$ و $g(x)=-x^2+4x$ و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=4$.

حل:



لدينا $S=\int_{-1}^{4}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{4}|2x^2-6x|\,dx$

ندرس إشارة $2x^2-6x$

x	−1	0	3	4
$2x^2-6x$	+	0 −	0 +	

$$S=\left(\int_{-1}^{0}(2x^2-6x)dx-\int_{0}^{3}(2x^2-6x)dx+\int_{3}^{4}(2x^2-6x)dx\right)cm^2$$
$$=\left(\left[\frac{2}{3}x^3-3x\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{2}{3}x^3-3x\right]_{0}^{3}+\left[\frac{2}{3}x^3-3x\right]_{3}^{4}\right)cm^2$$
$$=\frac{49}{3}cm^2$$

المحتوى المعـــرفي : ✦ الحساب التكاملي . الــــــــحصة : الخامسة . ساعتان

الكفاءة المستهدفة : ✦ استعمال التكامل بالتجزئة .

✦ توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية .

1.المكاملة بالتـــجزئة

نشاط : u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I . u' و v' دالتاهما المشتقتان مستمرتان على I

1) بين أن : $uv' = (uv)' - u'v$

2) استنتج من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I: $\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)dx$

مبرهنة: u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I . u' و v' دالتاهما المشتقتان مستمرتان على I.

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا: $\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)dx$

مثال1: باستعمال المكاملة بالتجزئة لنحسب ما يلي: $A = \int_1^2 xe^x dx$

نضع: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$$A = \int_1^2 xe^x dx = [xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$$

مثال2: باستعمال المكاملة بالتجزئة لنحسب التكامل: $A = \int_1^e \ln(x)dx$

نضع: $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$$A = \int_1^e \ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e \left(x \times \frac{1}{x}\right)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e 1dx = [x\ln(x) - x]_1^e = 1$$

تقويم:

باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب ما يلي: 1) $A = \int_{-1}^0 \ln(x+2)dx$. 2) $B = \int_0^1 (2x+1)e^{2x}dx$

حل 1) نضع: $\begin{cases} u(x) = \ln(x+2) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x+2} \\ v(x) = x+2 \end{cases}$

$$A = \int_{-1}^0 \ln(x+2)dx = [(x+2)\ln(x+2)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \left((x+2) \times \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= [(x+2)\ln(x+2)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 1dx = [(x+2)\ln(x+2) - x]_{-1}^0 = 2\ln 2 - 1$$

2) نضع: $\begin{cases} u(x)=2x+1 \\ v'(x)=e^{2x} \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} u'(x)=2 \\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$B=\int_0^1 (2x+1)e^{2x}dx = \left[\frac{(2x+1)}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx = \left[\frac{(2x+1)}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \left[xe^{2x}\right]_0^1 = \boxed{e^2}$$

2. الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة

مبرهنة: f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I.

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة F : $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

مثال: f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

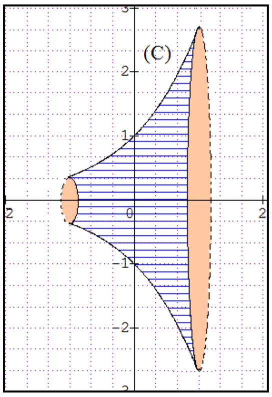
الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على $]0;+\infty[$ و التي تنعدم من أجل 1 هي الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث :

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(t-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-\sqrt{t}\right]_1^x=\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}+1$$

3. حجوم مجسمات بسيطة

حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$: ليكن (C) المنحني الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a;b]$.

دوران (C) حول المحور $(x'x)$ يولد مساحة دورانية محورها $(x'x)$ تحدد مجسما



خاصية: حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) ممثل لدالة f مستمرة و موجبة على مجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$

مثال:

أحسب حجم المجسم الدوراني المولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ للمنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على المجال $[-1;1]$ كما يلي : $f(x)=e^x$

الجواب : $V=\int_{-1}^1 \pi(e^x)^2dx=\int_{-1}^1 \pi e^{2x}dx=\frac{1}{2}\left[\pi e^{2x}\right]_{-1}^1=\frac{1}{2}\pi\left(e^2-\frac{1}{e^{-2}}\right)$ uv