2AS
ثانوي
جذع مشترك علوم

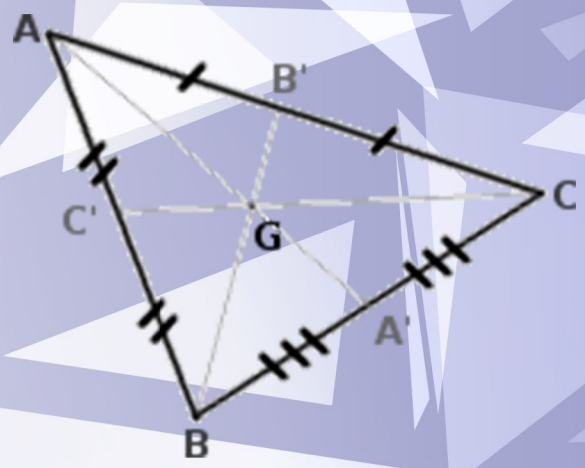
سلسلة الخباش في الرياضيات

المرجح في المستوي

BAC 2025

تتضمن هذه السلسلة ملخص الدرس
و سلسلة التمارين لكل من

- تذكير بالحساب الشعاعي
- مرجح نقطتين
- مرجح ثلاث نقط



جمع و إعداد الأستاذ :
أمين كـــروش

ملخص الدرس - المرجح -

01 تذكير بالأشعة في المستوي

◆ الإرتباط الخطي و التوازي

◄ القول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما مرتبطان خطيا. معناه أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث : $\vec{v}=k.\vec{u}$.

◄ القول عن مستقيمان (AB) و (CD) أنهما متوازيان. معناه أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$

◄ القول عن النقط A ، B ، C في استقامية واحدة . معناه أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

◆ علاقة شال :

A و B نقطتان من المستوي

من أجل كل نقطة M من المستوي فإن : $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

ملاحظات و نتائج هامة

◄ $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتان من المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

◄ مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

◄ طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

◄ إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة $[AB]$: $I\left(x_I=\frac{x_A+x_B}{2};y_I=\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

◄ $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ شعاعان من المستوي،

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $xy'-x'y=0$

02 المرجح في المستوي

01 مرجح نقطتين

تعريف

لتكن A و B نقطتين متمايزتين وليكن α و β عددين حقيقيين حيث: $\alpha+\beta\neq 0$.

نسمي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$

ملاحظات و نتائج هامة

◄ الثنائية $(A;\alpha)$ تسمى نقطة مثقلة

◄ الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقلتين

◄ إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل على $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ والنقطة G منتصف $[AB]$

◄ النقطة G وحيدة

◄ G مرجح الجملة $\{(A;\lambda\alpha);(B;\lambda\beta)\}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

◄ النقط A، B و G على استقامية واحدة

◄ من أجل كل نقطة M من المستوي: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

◄ إذا كان $\alpha+\beta=0$ فإن الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ لا تقبل مرجحا

◆ إنشاء مرجح نقطتين:

لإنشاء G نعتمد العلاقة: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

ملاحظة هامة:

◄ إذا كان α و β من نفس الإشارة فإنّ G تكون من القطعة $[AB]$.

◄ إذا كان α و β مختلفين في الإشارة فإنّ G تكون خارج القطعة $[AB]$.

◆ إحداثيتي مرجح نقطتين

G مرجح النقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ المرفقين بالمعاملين α و β على الترتيب و $G(x_G;y_G)$ ، لدينا:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \quad \text{و} \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$$

ملاحظة هامة:

من أجل كل ثلاثة نقط متمايزة A ، B و C على استقامة واحدة من المستوي. فإن كل نقطة منها تمثل حتما مرجحا لنقطتين الاخريتين

02 مرجح ثلاث نقط

تعريف

A ، B و C ثلاث نقط متمايزة و α ، β و γ أعداد حقيقية حيث $(\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$ نسمي G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

ملاحظات و نتائج هامة

◄ إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإنّ المرجح غير موجود

◄ إذا كان $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ فإن G تسمى مركز المسافات المتساوية

◄ إذا كان $\alpha=\beta=\gamma=1$ والنقط A، B و C ليست على استقامية فإن G مركز ثقل المثلث ABC

◄ النقطة G وحيدة

◄ G مرجح الجملة $\{(A;\lambda\alpha);(B;\lambda\beta);(C;\lambda\gamma)\}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

◄ من أجل كل نقطة M من المستوي:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

◆ خاصية التجميع:

مبرهنة

G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب.

إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ وكانت النقطة I مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.

فإن النقطة G مرجح النقطتين I و C المرفقتين بالمعاملين $\alpha+\beta$ و γ

◆ إنشاء مرجح ثلاث نقاط :

طريقة

لإنشاء مرجح ثلاث نقاط يمكن تعويض نقطتين من هذه النقط بمرجحهما بشرط أن نرفقه بمجموع معامليهما. و بالتالي انشاء مرجح ثلاث نقط يؤول لانشاء مرجح نقطتين.

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \quad ,\quad \overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$

◆ إحداثيات مرجح ثلاث نقاط :

G مرجح النقط $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ و $C(x_C;y_C)$ المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب و $G(x_G;y_G)$ ، لدينا:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad ,\quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

KERROUCHE MATHS
الأستاذ: أمين كروش

03 بعض مجموعات النقط المألوفة في المستوي

العلاقة الشعاعية	المجموعة و عناصرها المميزة	الملاحظة
$\|\|\overrightarrow{AM}\|\| = \|\|\overrightarrow{BM}\|\|$	هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.	A و B نقطتان معلومتان
$\|\|\overrightarrow{AM}\|\| = \alpha$	هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = \alpha$	A نقطة معلومة و $\alpha > 0$ عدد حقيقي موجب معلوم
$\|\|\overrightarrow{AM}\|\| = \|\|\overrightarrow{AB}\|\|$	هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = AB$	A و B نقطتان معلومتان
$\|\|\overrightarrow{AM}\|\| \leqslant \alpha$	هي القرص المغلق الذي مركزه A ونصف قطرها $r = \alpha$	A نقطة معلومة و $\alpha > 0$
$\|\|\overrightarrow{AM}\|\| < \alpha$	هي القرص المفتوح (ماعدا الحافة) الذي مركزه A ونصف قطرها $r = \alpha$	A نقطة معلومة و $\alpha > 0$
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ و k يمسح $\mathbb{R}$	هي المستقيم الذي يشمل A و شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$	A و B نقطتان معلومتان
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ و k يمسح المجال $[0;1]$	قطعة المستقيم $[AB]$	A و B نقطتان معلومتان
$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AB}$	هي المستقيم الذي يشمل A وعمودي على الشعاع $\overrightarrow{AB}$	A و B نقطتان معلومتان
$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$	هي دائرة مركزها A قطرها $[AB]$	A و B نقطتان معلومتان

النقطة G مرجح الجملة: $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$
والنقطة G' مرجح الجملة: $\{(A;\alpha');(B;\beta')\}$

- **كل علاقة من الشكل** $\boxed{\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\| = \|\alpha'\overrightarrow{MA} + \beta'\overrightarrow{MB}\|}$
حيث: $|\alpha + \beta| = |\alpha' + \beta'| \neq 0$ ، **هي محور القطعة** $[GG']$
- **كل علاقة من الشكل:** $\boxed{\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\| = \|\lambda\overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB}\|}$
حيث: $\lambda \neq 0$ و $\alpha + \beta \neq 0$ ،
هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث: $r = \dfrac{|\lambda|}{|\alpha + \beta|} \times AB$
- **كل علاقة من الشكل:** $\boxed{\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\| = k}$
حيث k عدد حقيقي موجب تماما و $\alpha + \beta \neq 0$
هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث: $r = \dfrac{k}{|\alpha + \beta|}$

03 جزء مخصص للتلميذ :

سلسلة التمارين - المرجح -

التمرين 01
الصعوبة: ★★★★½

$[AB]$ قطعة مستقيمة حيث $AB = 5cm$، أنشئ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ في الحالتين التاليتين:

1) $\alpha = 3$ و $\beta = -2$
2) $\alpha = 3009$ و $\beta = 2006$

التمرين 02
الصعوبة: ★★★★★

A و B نقطتان متمازيتان من المستوي، أنشئ G مرجح الجمل المثقلة

1) $\{(A;4);(B;5)\}$
2) $\{(A;-2);(B;3)\}$
3) $\{(A;-3);(B;-1)\}$

التمرين 03
الصعوبة: ★★★½★

إذا كانت النقطة G مرجح الجملة $\{(A;-5);(B;7)\}$

1) برهن أن A مرجح للجملة $\{(B;-7);(G;2)\}$
2) برهن أن B مرجح للجملة $\{(A;5);(G;2)\}$

التمرين 04
الصعوبة: ★★★★★

A و B نقطتان متمازيتان من المستوي، و G نقطة، جد عددين حقيقين α و β بحيث تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ في كل حالة مما يلي:

1) $3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
2) $-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
3) $2\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GB}$
4) B نظيرة G بالنسبة إلى A

التمرين 05
الصعوبة: ★★★★★

A و B نقطتان من المستوي حيث $AB = 8cm$

1) عين ثم أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A,5);(B,3)\}$
2) عين مجموعة النقط M من المستوي في كل حال مما يلي :
   - $\|5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 4$
   - $\|5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$

التمرين 06
الصعوبة: ★★★★★

A، B و C ثلاث نقط ليست على استقامية

- باستعمال خاصية التجميع للمرجح، أنشئ مرجح الجملتين التاليتين:

1) G مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;1);(C;2)\}$
2) G' مرجح الجملة $\{(A;2);(B;2);(C;-2)\}$

التمرين 07
الصعوبة: ★★★★★

مثل في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقط $A(-1;1)$ ، $B(-1;5)$ ، $C(6;5)$، $D(\frac{5}{2};3)$

1) ماذا نوع المثلث ABC ؟علل.
2) عين احداثيتي النقطة H مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين A و B
3) عين احداثيتي النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$
4) هل يوجد عدد حقيقي α بحيث تكون النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1);(C,\alpha)\}$
4) ماهي المجموعة (E) للنقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 3$. هل A تنتمي إلى (E) ؟ علل.

التمرين 08
الصعوبة: ★★★★★

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي ليست على استقامة واحدة.

1) أنشئ النقطة K مرجح الجملة $\{(B,3);(C,-1)\}$
2) أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,3);(C,-1)\}$
3) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط $A(2;1)$ ، $B(3;2)$ ، $C(2;5)$

- تحقق من أن النقط A ؛ B ؛ C ليست على استقامة واحدة
- عين إحداثي النقطتين K و G
- عين إحداثي النقطة H مركز ثقل المثلث ABC

التمرين 09
الصعوبة: ★★½★★

ليكن ABC مثلث حيث $AB = 8$; $BC = 4$; $AC = 6$

1) أنشئ النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,4)\}$
2) أنشئ النقطة J مرجح الجملة $\{(B,2);(C,-1)\}$
3) نرمز بـ G لمرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B;4);(C,-2)\}$

- بين أن النقطة G هي تقاطع المستقيمين (CI) و (AJ) ثم أنشئها

4) عين ثم أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 5\|2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$
5) عين ثم أنشئ المجموعة (F) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = 4\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\|$
6) نفرض أن المستوي المنسوب الى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ و لتكن النقط: $D(2,4)$; $P(2,1)$; $L(6,0)$; $N(2,0)$

- عين احداثيات H مرجح الجملة $\{(A,1);(B;4);(C,-2)\}$
- عين عددين حقيقين α , β بحيث تكون النقطة P مرجح للجملة $\{(D,\alpha);(N;\beta)\}$

التمرين 10
الصعوبة: ★★½★★

ABC مثلث من المستوي، لتكن النقط A'، B' و C' المعرفة كما يلي:

- A' تحقق العلاقة $3\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC}$
- B' تحقق العلاقة: $2\overrightarrow{B'A} - 3\overrightarrow{B'C} = \vec{0}$
- C' مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-3)\}$

1) أنشئ شكلا مناسبا
2) أثبت أنّ A' و B' هي مرجح لنقطتين من النقط A، B و C بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما
3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-6);(C;-3)\}$

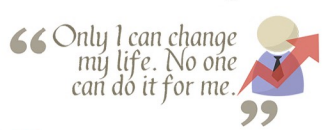
- اثبت أنّ المستقيمات (AA')، (BB') و(CC') تتلاقى في نقطة النقطة G

التمرين 11
الصعوبة: ★★★★★

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط $A(0;1)$ ، $B(0;5)$ و $C(2;1)$

ولتكن G_m مرجح الجملة $\{(A;-m^2+4);(B;m^2-2m);(C;2m)\}$

1) عيّن قيم m التي من أجلها يكون G_m موجودة ووحيدة
2) عين إحداثيي النقطة G_m بدلالة m
3) ما هو المحل الهندسي للنقط G_m لما m ينتمي إلى $\mathbb{R}$



السنة الثانية ثانوي :

حلول سلسلة المرجح

التمرين 01 :

② G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;3);(B;-2)\}$

لدينا $3-2=1$ أي $3-2\neq 0$

ومنه توجد نقطة وحيدة G حيث

$3\vec{GA}-2\vec{GB}=\vec{0}$

ومنه (باستعمال علاقة شال)

$3\vec{GA}-2(\vec{GA}+\vec{AB})=\vec{0}$

$3\vec{GA}-2\vec{GA}-2\vec{AB}=\vec{0}$

$\vec{GA}=2\vec{AB}$

$-\vec{AG}=2\vec{AB}$

$\vec{AG}=-2\vec{AB}$

ملاحظة : الأطوال غير حقيقية

③ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;3009);(B;2006)\}$

لدينا $3009+2006\neq 0$ ومنه

توجد نقطة وحيدة G حيث

$3009\vec{GA}+2006\vec{GB}=\vec{0}$

$\frac{3009}{1003}\vec{GA}+\frac{2006}{1003}\vec{GB}=\vec{0}$

$3\vec{GA}+2\vec{GB}=\vec{0}$

باستعمال علاقة شال

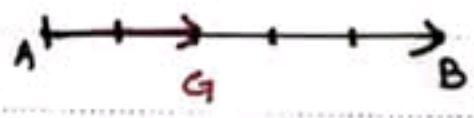
$3\vec{GA}+2(\vec{GA}+\vec{AB})=\vec{0}$

$3\vec{GA}+2\vec{GA}+2\vec{AB}=\vec{0}$

$5\vec{GA}=-2\vec{AB}$

$-5\vec{AG}=-2\vec{AB}$

$\vec{AG}=\frac{2}{5}\vec{AB}$



التمرين 02 :

④ G مرجح $\{(A;4);(B;5)\}$

لدينا $4+5\neq 0$

ومنه توجد نقطة وحيدة G حيث

$4\vec{GA}+5\vec{GB}=\vec{0}$

صيغة

G مرجح الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ معناه

$\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$

$\vec{AG}=\frac{5}{5+4}\vec{AB}$

$\vec{AG}=\frac{5}{9}\vec{AB}$

تذكير

- إذا كانت α و β من نفس الإشارة فالنقطة G تنتمي للقطعة $[AB]$
- إذا كانت α و β مختلفان في الإشارة فـ G تقع خارج القطعة $[AB]$

② G مرجح $\{(A;-2);(B;3)\}$

لدينا $-2+3\neq 0$ ومنه

توجد نقطة وحيدة G حيث

$-2\vec{GA}+3\vec{GB}=\vec{0}$

$\vec{AG}=\frac{3}{-2+3}\vec{AB}$

$\vec{AG}=3\vec{AB}$

KERROUCHEMATHS

⑤ ج مرجح الجملة $\{(A;-3);(B;-1)\}$

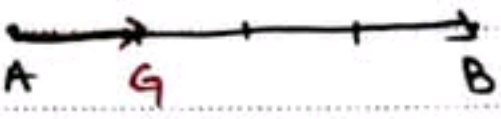
لدينا $-3-1\neq 0$ ومنه

توجد نقطة وحيدة ج حيث

$-3\vec{GA}-\vec{GB}=\vec{0}$

$\vec{AG}=\frac{-1}{-3-1}\vec{AB}$

$\vec{AG}=\frac{1}{4}\vec{AB}$



التمرين 03 ص

① إثبات أن ج مرجح $\{(B;-7);(G;2)\}$

معناه ج مرجح $\{(A;-5);(B;7)\}$

$-5\vec{GA}+7\vec{GB}=\vec{0}$

باستعمال علاقة شال

$-5\vec{GA}+7(\vec{GA}+\vec{AB})=\vec{0}$

$-5\vec{GA}+7\vec{GA}+7\vec{AB}=\vec{0}$

$2\vec{GA}+7\vec{AB}=\vec{0}$

$-2\vec{AG}+7\vec{AB}=\vec{0}$

ومنه $-2+7\neq 0$ مع

A مرجح الجملة المثقلة $\{(B;-7);(G;2)\}$

② برهان أن B مرجح $\{(A;5);(G;2)\}$

معناه ج مرجح $\{(A;5);(B;7)\}$

$-5\vec{GA}+7\vec{GB}=\vec{0}$

ومنه

$-5(\vec{GB}+\vec{BA})+7\vec{GB}=\vec{0}$

$-5\vec{GB}-5\vec{BA}+7\vec{GB}=\vec{0}$

$2\vec{GB}-5\vec{BA}=\vec{0}$

$-2\vec{BG}-5\vec{BA}=\vec{0}$

بالعودة إلى (1-)

$2\vec{BG}+5\vec{BA}=\vec{0}$

مع $2+5\neq 0$

ومنه B مرجح الجملة المثقلة $\{(A;5);(G;2)\}$

التمرين 04 ص

$3\vec{GB}-2\vec{AB}=\vec{0}$ ①

$3\vec{GB}-2(\vec{AG}+\vec{GB})=\vec{0}$

$3\vec{GB}-2\vec{AG}-2\vec{GB}=\vec{0}$

$\vec{GB}+2\vec{GA}=\vec{0}$

مع $2+1\neq 0$

ومنه ج مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1)\}$

$-2\vec{AB}+3\vec{GA}-5\vec{GB}=\vec{0}$ ②

$-2(\vec{AG}+\vec{GB})+3\vec{GA}-5\vec{GB}=\vec{0}$

$-2\vec{AG}-2\vec{GB}+3\vec{GA}-5\vec{GB}=\vec{0}$

$2\vec{GA}-7\vec{GB}+3\vec{GA}=\vec{0}$

$5\vec{GA}-7\vec{GB}=\vec{0}$

مع $5-7\neq 0$

ومنه ج مرجح $\{(A;5);(B;-7)\}$

$2\vec{AB}=\frac{2}{3}\vec{GB}$ ③

$2\vec{AB}-\frac{2}{3}\vec{GB}=\vec{0}$

$2(\vec{AG}+\vec{GB})-\frac{2}{3}\vec{GB}=\vec{0}$

$2\vec{AG}+2\vec{GB}-\frac{2}{3}\vec{GB}=\vec{0}$

$-2\vec{GA}+\frac{6}{3}\vec{GB}-\frac{2}{3}\vec{GB}=\vec{0}$

$-2\vec{GA}+\frac{4}{3}\vec{GB}=\vec{0}$

مع $-2+\frac{4}{3}\neq 0$

ومنه ج مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;\frac{4}{3})\}$

④ نأخذ B بالنسبة لـ A ج

معناه A منتصف $[GB]$ أي

$\vec{GB}=2\vec{GA}$

$\vec{GB}-2\vec{GA}=\vec{0}$

ج مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;1)\}$

KERROUCHEMATHS

التمرين 05 ؟

① تعيين G مرجح الجملة $\{(A;5);(B;3)\}$

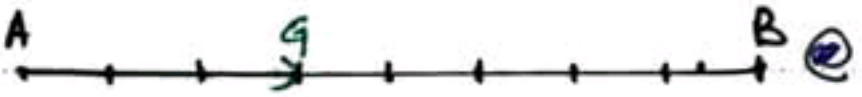
لدينا $5+3 \neq 0$

ومنه توجد نقطة وحيدة G بحيث

$5\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$

أي $\vec{AG} = \frac{3}{5+3}\vec{AB}$

$\vec{AG} = \frac{3}{8}\vec{AB}$



② تعيين مجموعة النقط M :

$\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 4$

$\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 4$

و G مرجح $\{(A;5);(B;3)\}$ ومنه

$5\vec{MA} + 3\vec{MB} = (5+3)\vec{MG}$

$= 8\vec{MG}$

ومنه $\|8\vec{MG}\| = 4$

$8\|\vec{MG}\| = 4$

$\|\vec{MG}\| = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

و منه مجموعة النقط M هي دائرة نصف قطرها $\frac{1}{2}$ ومركزها G.

③ $\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

معناه G مرجح الجملة $\{(A;5);(B;3)\}$

$5\vec{MA} + 3\vec{MB} = (5+3)\vec{MG}$

$= 8\vec{MG}$

ومنه $\|8\vec{MG}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

$8\|\vec{MG}\| = \|\vec{BM} + \vec{MA}\|$

$\|8\vec{MG}\| = \|\vec{BA}\|$

$8\|\vec{MG}\| = BA$

$8\|\vec{MG}\| = 8$ $\quad MG = \frac{8}{8} = 1$

و منه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 1

التمرين 06 ؟

باستعمال خاصية تجميع للمرجح

① إنشاء G مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;1);(C;2)\}$

بما أن $-1+1+2 \neq 0$ ومنه G موجودة وحيدة

نضع I مرجح الجملة $\{(B;1);(C;2)\}$

بما أن $1+2 \neq 0$ إذن I موجودة وحيدة.

ومنه G مرجح الجملة $\{(A;-1);(I;3)\}$

- $\vec{BI} = \frac{2}{1+2}\vec{BC}$ $\quad \boxed{\vec{BI} = \frac{2}{3}\vec{BC}}$
- $\vec{AG} = \frac{3}{-1+3}\vec{AI}$ $\quad \boxed{\vec{AG} = \frac{3}{2}\vec{AI}}$

② إنشاء G' مرجح الجملة $\{(A;2);(B;2);(C;-2)\}$

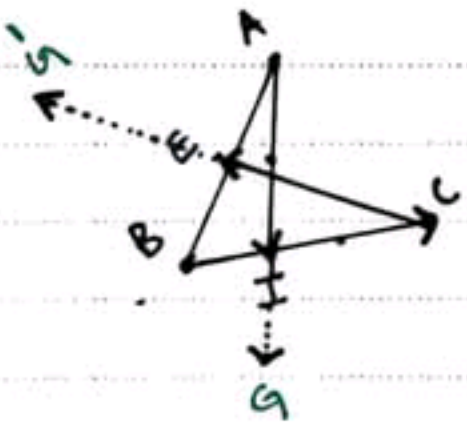
بما أن $2+2-2 \neq 0$ فإن G' موجودة وحيدة.

نضع E مرجح الجملة $\{(A;2);(B;2)\}$

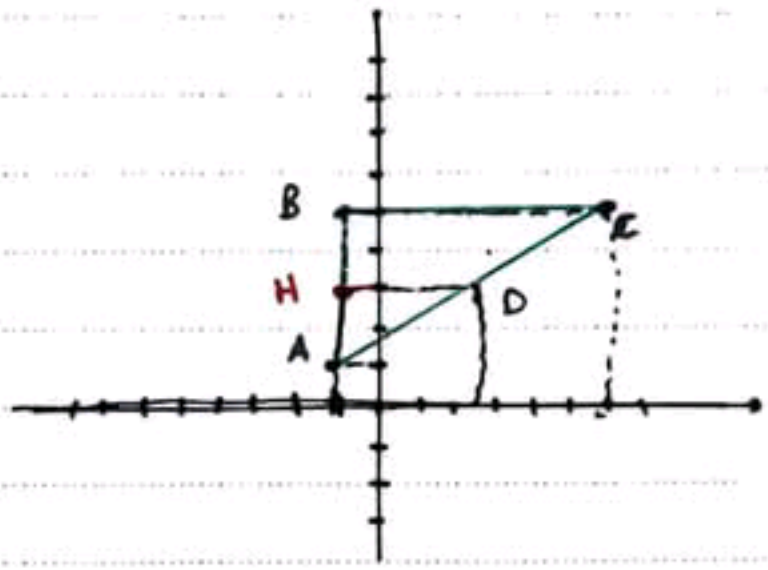
بما أن $2+2 \neq 0$ فإن E موجودة وحيدة

ومنه G' مرجح الجملة $\{(C;-2);(E;4)\}$

- $\vec{AE} = \frac{2}{2+2}\vec{AB}$ $\quad \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB}$
- $\vec{CG'} = \frac{4}{4-2}\vec{CE}$ $\quad \vec{CG'} = 2\vec{CE}$



التمرين 04:



④ نوع المثلث ABC.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (5-1)^2}$

$\boxed{AB = \sqrt{16} = 4}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (5-1)^2}$

$= \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49+16} = \boxed{\sqrt{65}}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (5-5)^2}$

$= \sqrt{7^2 + 0^2} = \sqrt{49} = \boxed{7}$

• لدينا $AC^2 = \sqrt{65}^2 = 65$

و $AB^2 + BC^2 = 4^2 + 7^2 = 65$

ومنه $AC^2 = AB^2 + BC^2$

وحسب الخاصية العكسية لفيثاغورس فالمثلث ABC قائم في B.

② إحداثيتي H مركز مصافتين متساويتين د A و B.

H مركز مصافتين متساويتين د A و B.

معناه H مرجح للجملة $\{(A;1);(B;1)\}$

أي H منتصف القطعة [AB].

$H\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ $H\left(\frac{-1-1}{2}; \frac{5+1}{2}\right)$

$H(-1 ; 3)$

③ إحداثيتي G مرجح $\{(A;1);(B;1);(C;2)\}$

بما أن $1+1+2 = 4 \neq 0$ فمنه G موجودة ووحيدة.

$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \lambda x_C}{\alpha+\beta+\lambda}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \lambda y_C}{\alpha+\beta+\lambda}\right)$

$G\left(\frac{1\times(-1) + 1\times(-1) + 2\times 6}{1+1+2}; \frac{1\times 1 + 1\times 5 + 2\times 5}{1+1+2}\right)$

$G\left(\frac{10}{4}; \frac{16}{4}\right)$ $\boxed{G\left(\frac{5}{2}; 4\right)}$

④ هل يوجد عدد حقيقي α بحيث D مرجح $\{(A;1);(C;\alpha)\}$ علما $1+\alpha \neq 0$ أين

$x_D = \frac{\beta x_A + \alpha x_C}{\alpha+\beta}$ $y_D = \frac{\beta y_A + \alpha y_C}{\beta+\alpha}$

$\frac{5}{2} = \frac{1\times(-1) + \alpha 6}{\alpha+1}$ $3 = \frac{1\times 1 + \alpha\times 5}{1+\alpha}$

$5(\alpha+1) = 2(6\alpha-1)$ $3(1+\alpha) = 5\alpha+1$

$5\alpha+5 = 12\alpha-2$ $3+3\alpha = 5\alpha+1$

$7\alpha = 7$ $2\alpha = 2$

$\boxed{\alpha = 1}$ $\boxed{\alpha = 1}$

$1+1 \neq 0$ و

ومنه D مرجح الجملة $\{(A,1),(C,1)\}$

⑤ مجموعة النقط M:

$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 3$

$\|(1+1+2)\vec{MG}\| = 3$

$\|4\vec{MG}\| = 3$

$4\|\vec{MG}\| = 3$

$\|\vec{MG}\| = \frac{3}{4}$ $MG = \frac{3}{4}$

ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G و نصف قطرها $\frac{3}{4}$

التمرين 08 ص

① إنشاء النقطة K مرجح $\{(B;3);(C;-1)\}$

بما أن $3-1=2 \neq 0$ و K موجودة ووحيدة بحيث

$$3\vec{KB} - \vec{KC} = \vec{0}$$

$$\vec{BK} = \frac{-1}{3-1}\vec{BC}$$

$$\vec{BK} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$$

② إنشاء G مرجح الجملة $\{(B,3)(C,-1)(A,2)\}$

بما أن $3-1+2 \neq 0$ و G موجودة ووحيدة.

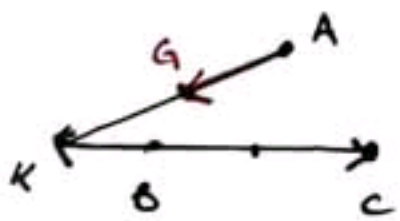
وبما أن K مرجح الجملة $\{(B;3);(C;-1)\}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A;2);(K;2)\}$

$$2\vec{GA} + 2\vec{GK} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{2}{2+2}\vec{AK}$$

$$\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AK}$$



③ • التحقق من أن A,B,C ليست في استقامية:

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \vec{AB}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} \quad \vec{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \quad \vec{BC}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-5 \end{pmatrix} \quad \vec{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

يكفي التحقق من الاستعانة $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ غير مرتبطين خطيا لإثبات أن النقط A,B,C ليست في استقامية.

بما أن

$$1\times 1 - 1\times(-3) = -2 \neq 0$$

معناه $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ غير مرتبطين خطيا

أي النقط A,B,C ليست في استقامة واحدة.

• إحداثيتي النقطتين K و G:

$$K\left(\frac{\alpha x_B + \beta x_C}{\alpha+\beta} ; \frac{\alpha y_B + \beta y_C}{\alpha+\beta}\right)$$

$$K\left(\frac{3\times 3 + 2\times -1}{3-1} ; \frac{3\times 2 - 1\times 5}{3-1}\right)$$

$$K\left(\frac{9-2}{2} ; \frac{6-5}{2}\right)$$

$$K\left(\frac{7}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$

← إحداثيات النقطة G يمكن حسابها بطريقتين

$$G\left(\frac{\alpha x_K + \beta x_A}{\alpha+\beta} ; \frac{\alpha y_K + \beta y_K}{\alpha+\beta}\right)$$

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \lambda x_C + \beta x_B}{\alpha+\beta+\lambda} ; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \lambda y_C}{\alpha+\beta+\lambda}\right)$$ أي

$$G\left(\frac{2\times\frac{7}{2} + 2\times 2}{2+2} ; \frac{2\times\frac{1}{2} + 2\times 1}{2+2}\right)$$

$$G\left(\frac{11}{4} ; \frac{3}{4}\right)$$

• إحداثيتي النقطة H مركز ثقل المثلث ABC

H مركز ثقل المثلث ABC معناه

H هي مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$

ومنه

$$H\left(\frac{1\times 2 + 1\times 3 + 1\times 2}{3} ; \frac{1\times 1 + 1\times 2 + 1\times 5}{3}\right)$$

$$H\left(\frac{7}{3} ; \frac{8}{3}\right)$$

حل التمرين رقم 09

ABC مثلث في المستوي حيث: $AB=8;BC=4;AC=6$

1) -أنشاء النقطة I مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,1);(B,4)\}$ $\quad \overrightarrow{AI}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

2) -أنشاء النقطة J مرجح الجملة المثقلة: $\{(B,2);(C,-1)\}$ $\quad \overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{BC}$

3) - G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,4);(C,-2)\}$

تبيين أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AJ)

لدينا G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,4);(C,-2)\}$ وبالتالي G مرجح الجملة المثقلة $\{(I,5);(C,-2)\}$ ومنه $G\in(IC)$

لدينا J مرجح الجملة المثقلة: $\{(B,2);(C,-1)\}$ وبالتالي J مرجح الجملة المثقلة: $\{(B,4);(C,-2)\}$

ومنه G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(J,2)\}$ و منه $G\in(AJ)$

إذن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AJ)

4) -تعيين ثم أنشاء المجموعة E مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=5\left\|2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

$\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=5\left\|2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|5\overrightarrow{MI}\right\|=5\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$ ومنه $MI=MJ$

وبالتالي : E هي محور القطعة المستقيمة $[IJ]$

5) -تعيين ثم أنشاء المجموعة F مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

$\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $3MG=4CA$ ومنه

$$MG=\frac{4CA}{3}=8$$

والتالي F هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 8

6) -نفرض أن المستوي منسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ ولتكن النقط:

$$D(2,4);P(2,1);L(6,0);N(2,0)$$

تعيين إحداثيات النقطة H مرجح الجملة $\{(D,1);(P,2);(L,1)\}$ ، $H\left(3;\frac{3}{2}\right)$

تعيين عددين حقيقيين α و β بحيث تكون النقطة P مرجح الجملة $\{(D,\alpha);(N,\beta)\}$

P مرجح الجملة $\{(D,\alpha);(N,\beta)\}$

معناه: $\begin{cases}\frac{2\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}=2\\ \frac{4\alpha}{\alpha+\beta}=1\end{cases}$ معناه $\begin{cases}3\alpha-\beta=0\\ \alpha+\beta\neq 0\end{cases}$ نأخذ مثلا: $\beta=3;\alpha=1$

التمرين عدد 8

① إنشاء :

$\rightarrow 3\vec{BA'} = \vec{BC}$ أي $\boxed{\vec{BA'} = \frac{1}{3}\vec{BC}}$

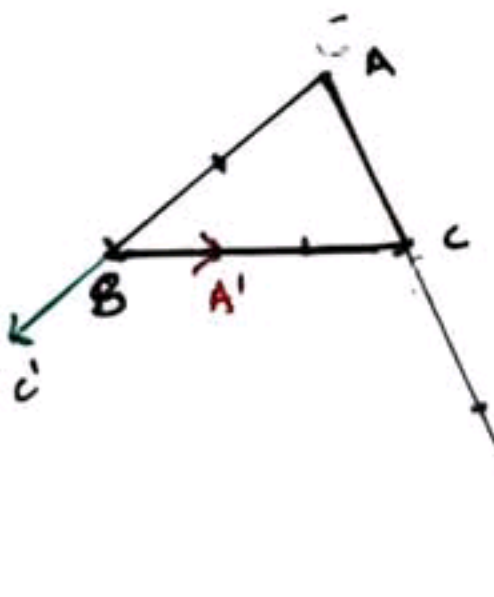
$\rightarrow 2\vec{B'A} - 3\vec{B'C} = \vec{0}$

$2\vec{B'A} - 3\vec{B'A} - 3\vec{AC'} = \vec{0}$

$-\vec{B'A} = 3\vec{AC'}$

$\boxed{\vec{AB'} = 3\vec{AC'}}$

$\rightarrow \vec{C'A} - 3\vec{C'B} = \vec{0}$ $\boxed{\vec{AC'} = \frac{3}{2}\vec{AB}}$



② إثبات أن B' و A' مرجح لنقطتين من النقط A, B, C

* لدينا $2\vec{B'A} - 3\vec{B'C} = \vec{0}$ مع $(2-3 \neq 0)$

ومنه B' مرجح الجملة $\{(A;2)(C;-3)\}$

* ولدينا $3\vec{BA'} = \vec{BC}$ أي $3\vec{BA'} - \vec{BC} = \vec{0}$

باستعمال علاقة شال

$3\vec{BA'} - \vec{BA'} - \vec{A'C} = \vec{0}$

$2\vec{BA'} - \vec{A'C} = \vec{0}$

$-2\vec{A'B} - \vec{A'C} = \vec{0}$

مع $-2-1 \neq 0$

و A' مرجح الجملة $\{(B;-2)(C;-1)\}$

③ إثبات أن G نقطة تقاطع (AA') و (BB') و (CC')

← لدينا B' مرجح الجملة $\{(A;2);(C;-3)\}$

ومنه G مرجح الجملة $\{(B;-6);(B';-1)\}$

أي G تنتمي للمستقيم (BB')

← لدينا C' مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-3)\}$

ومنه C' مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-6)\}$

أي G مرجح الجملة $\{(C';-4);(C;-3)\}$

أي G تنتمي للمستقيم $(C'C)$.

← لدينا A' مرجح الجملة $\{(B;-2);(C;-1)\}$

أي A' مرجح الجملة $\{(B;-6);(C;-3)\}$

ومنه G مرجح الجملة $\{(A';-9);(A;2)\}$

أن G تنتمي للمستقيم $(A'A)$.

بما أن $G \in (AA')$ و $G \in (BB')$ و $G \in (CC')$

ف G نقطة تقاطع المستقيمات (AA') و (BB') و (CC')

التمرين 11 :

① تعيين m حتى تكون G_m موجودة دوما :

$(-m^2+4) + m^2 - 2m + 2m \neq 0$

$4 \neq 0$ (محققة دوما)

ومنه G_m موجودة دوما من أجل كل $m \in \mathbb{R}$

② إحداثيات G_m بدلالة m :

$x_{G_m} = \frac{(-m^2+4)\times 0 + (m^2-2m)\times 0 + 2m\times 2}{-m^2+4+m^2-2m+2m} = \frac{4m}{4} = m$

$y_{G_m} = \frac{1(-m^2+4) + 5(m^2-2m) + 1(2m)}{-m^2+4+m^2-2m+2m}$

$= \boxed{m^2 - 2m + 1}$

إحداثيات G_m هي $G_m(m ; m^2-2m+1)$

③ المحل الهندسي للنقط G_m لما m ينتمي لـ $\mathbb{R}$

هو التمثيل البياني للدالة ذات المعادلة

$y = x^2 - 2x + 1$