الأستاذ : مرنيز وليد — الموسم الدراسي : 2020/2019

الإشتقاقية، النهايات، دراسة دوال

- سلسلة تمارين -

التمرين رقم 1:

في كل حالة من الحالات التالية عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ، ثم احسب النهايات عند اطراف D_f

- $f(x) = 3x^2 + x - 2$
- $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 3$
- $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$
- $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4}{x + 3}$
- $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 2x + 1}$
- $f(x) = \dfrac{3x}{(x + 1)^2}$
- $f(x) = \dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{1}{x^2 - 4}$

التمرين رقم 2:

احسب النهايات في كل حالة من الحالات التالية:

1) حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 5x + 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 1} - x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

2) حالة عدم التعيين من الشكل $0 \times \infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}(1 + \sqrt{x})$

3) حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
- $\lim\limits_{x\, 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

4) حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x - 3}{5x + 4}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 4}$

التمرين رقم 3:

f الدالة المعرفة على $]-\infty; -1[$ بـ : $f(x) = \dfrac{-2x^2 - x}{x + 1}$

1) عين الاعداد a ، b و c بحيث : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$

2) احسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$. ماذا تستنتج؟

3) بين ان المنحنى الممثل للدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - 2x$ كمستقيم مقارب.

4) أدرس وضعية المنحنى بالنسبة الى (D)

التمرين رقم 4:

لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها التالي، f' دالتها المشتقة

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘ $\cdots$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$\cdots$

نقبل ان f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$ حيث : a ، b و c اعداد حقيقية.

1) احسب $f'(x)$ بدلالة a و c

2) بالاستعانة بجدول التغيرات بين ان : $c = 4$ ، $b = -1$ و $a = 1$

3) اتمم جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة

4) بين ان المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل المستقيم $(D) : y = x - 1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، ثم ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D)

السنة الثانية ثانوي

التمرين رقم 5:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{x-1}$

1) بين انه من اجل كل x من D_f يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=2x-1+\frac{2}{x-1}$

2) اثبت ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=2x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

3) ادرس تغيرات f ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (C_f)

4) استنتج رسم (C_h) المنحنى الممثل للدالة h و المعرفة بـ : $h(x)=|f(x)|$

التمرين رقم 6:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x)=ax^3+bx-1$

1) عين العددين الحقيقين a و b بحيث (C_f) يشمل النقطة $A(-1;1)$ ويقبل مماس يوازي محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1

2) نضع : $f(x)=x^3-3x-1$

ا) ادرس تغيرات الدالة f

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) في النقطة B ذات الفاصلة 0 وعين وضعية المنحنى بالنسبة اليه. ماذا تمثل النقطة B

ج) بين ان المعادلة : $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول α ، β ، γ حيث : $\alpha\in[-2;-1]$ و $\beta\in\left[-\frac{1}{2};0\right]$ و $\gamma\in\left[\frac{3}{2};2\right]$

د) ارسم المماس (Δ) و المنحنى (C_f)

التمرين رقم 7:

g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ : $g(x)=\frac{3x^2-5x}{x-3}$. (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة g عند اطراف مجموعة التعريف

2) ادرس تغيرات الدالة g

3) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{3\}$ فان : $g(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$

4) بين ان المستقيم (D) الذي معادلته $y=3x+4$ مقارب مائل للمنحنى (C_g) بجوار $+\infty$

5) بين ان النقطة $\omega(3;13)$ مركز تناظر للمنحنى (C_g)

6) عين نقط تقاطع (C_g) مع المحورين ثم انشئ (C_g)

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $g(x)=m$

8) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{3;-3\}$ بـ : $h(x)=\frac{3x^2-5|x|}{|x|-3}$

ا) بين ان h زوجية. اعط تفسيرا هندسيا لذلك

ب) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتج كيفية رسم منحنى الدالة h

التمرين رقم 8:

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+1}$

ا) تحقق انه : $f(x)=x+3+\frac{1}{x+1}$

ب) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف

ج) بين انه : $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول جدول تغيراتها

2) (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل و ليكن (D)

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم ذي المعادلة : $y=x+3$

ج) انشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f)

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x)=m$

4) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x^2+4x+4}{|x+1|}$. (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

ا) اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب) اشرح كيفية انشاء المنحنى (C_g) اعتمادا على المنحنى (C_f) ، ثم انشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين رقم 9:

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 8x^3 - 9x^2 + 4$

ا) ادرس تغيرات الدالة g ، وشكل جدول تغيراتها

ب) بين ان: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.55 < \alpha < -0.54$

ج) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{-4x+3}{x^3-1}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

ا) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف و فسر النتائج بيانيا.

ب) اثبت ان : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3-1)^2}$

ج) ادرس اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

د) بين ان : $f(\alpha) = \dfrac{-4}{3\alpha^2}$ ، ثم اعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

التمرين رقم 10:

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

ا) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

ب) بين ان : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.5 < \alpha < 0.9$

ج) حدد حسب قيم x اشارة $g(x)$

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{3x}$، (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

ا) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

ب) احسب $f'(x)$ و بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x فان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

د) بين ان : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{1}{2\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

هـ) ارسم المنحنى (C) . (ناخذ : $\alpha \approx \dfrac{2}{3}$)

التمرين رقم 11:

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$

ا) تحقق انه : $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x+1}$

ب) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف

ج) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل وليكن (D)

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم ذي المعادلة : $y = x + 3$

ج) انشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f)

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x) = m - 1$

4) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{|x+1|}$، (C_g) تمثيلها البياني

ا) اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب) اشرح كيفية انشاء (C_g) اعتمادا على المنحنى (C_f)

ج) انشئ في نفس المعلم السابق المنحنى (C_g)

التمرين رقم 12:

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$

ا) عين الاعداد a ، b و c بحيث :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

ب) احسب النهايات عند اطراف مجموعة تعريف الدالة f

ج) بين انه : $f'(x) = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

ا) بين ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما المستقيم (Δ) معادلته $y = x + 1$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ)

ج) تحقق ان النقطة $A(-2; -1)$ نقطة تقاطع المقاربين هي مركز تناظر (C_f)

د) اكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة -1 لـ (C_f)

هـ) ارسم (Δ) ، و المماس و (C_f) بدقة.

3) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ : $g(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{|x+2|}$

ا) بين انه يمكن رسم التمثيل البياني للدالة انطلاقا من رسم تمثيل البياني للدالة f

ب) ارسم (C_g) في نفس المعلم السابق.

التمرين رقم 13:

1) g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{2-3x}{(x-1)^2}$.
ادرس نهاية g عند $+\infty$ ، $-\infty$ ، 1

2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=-x+3+g(x)$.
في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
نعتبر (C_f) المنحنى الممثل لـ f ، و المستقيم $(\Delta):y=-x+3$

ا) باستعمال نتائج السؤال الاول، ماذا نستطيع القول عن (C_f) و المستقيم (Δ)

ب) ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم انشئ جدول تغيراتها

3) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) ، ثم انشئ المنحنى (C_f)

التمرين رقم 14:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{3x-7}{2-x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) عين معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

3) عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات، ثم ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f)

4) بين ان نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحنى

5) بين انه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة : $y=-x+4$

6) نعتبر الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=f(|x|)$

ا) عين D_h ، ثم بين ان h دالة زوجية

ب) ارسم (C_h) باالاعتماد على (C_f) في نفس المعلم

التمرين رقم 15:

1) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$

ا) عين العددين الحقيقين b ، c بحيث يكون من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f(x)=x+b+\frac{c}{x-1}$$

ب) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

ج) ادرس اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها

2) (C_f) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل له بجوار $-\infty$ و $+\infty$

ب) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

ج) اثبت ان النقطة $w(1;2)$ هي مركز تناظر (C_f)

د) انشئ المنحنى (C_f) و المماس (T)

3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

4) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-1$ كمايلي : $h(x)=|\dfrac{x^2+3}{x-1}|$.
اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتج كيفية رسم منحنى الدالة h

التمرين رقم 16:

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=2x^3-3x^2-1$$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم

ا) بين ان $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 1.6 و 1.7

ب) استنتج حسب قيم x ، اشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$.
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (الوحدة $4cm$)

ا) بين ان $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=+\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$. اعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين بين انه من كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج) تحقق انه من اجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$$f(x)-(-x+1)=\frac{(x-1)x^3}{x^3+1}$$

د) بعد دراسة اشارة $f(x)-(-x+1)$ ، استنتج وضعية (C_f) بالنسبة للماس (Δ). ماذا تلاحظ ؟

هـ) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

التمرين رقم 17:

f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x+3+\dfrac{2}{x-1}$
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ا) عين نهاية الدالة f عند 1 ، فسر النتيجة بيانيا
ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) ا) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل المستقيم :
$(D): y=-x+3$ كمستقيم مقارب مائل عند $+\infty$
ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D)
ج) ارسم المنحنى (C_f) و المستقيم (D)

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=m-x$

التمرين رقم 18:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-1}$، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب النهايتين $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)$

2) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين ان النقطة $I(1;-1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

5) ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته : $y=x-2$
ا) بين ان (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)
ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم Δ
ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

التمرين رقم 19:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بجدول تغيراتها المعطى بـ :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-2	↘ $-\infty$	

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ حيث : a ، b و c اعداد حقيقية

1) احسب $f'(x)$

2) اعتمادا على جدول التغيرات الدالة f :
ا) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c
ب) بين ان منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب عمودي
ج) قارن بين صورتي العددين 0 و $\dfrac{1}{2}$ معللا اجابتك

3) ناخذ فيمايلي : $a=-1$ ، $b=2$ ، $c=-1$ وليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس
ا) بين ان (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تحديد معادلة له
ب) ادرس الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f). انشئ المنحنى (C_f)
ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول:

$$f(x)=m$$

التمرين رقم 20:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها، ثم استنتج مستقيما مقارب للمنحنى (C_f)

2) ا) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-1}$
ب) احسب $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}[f(x)-x+1]$ و $\lim\limits_{x\mapsto -\infty}[f(x)-x+1]$ ثم فسر النتائج هندسيا
ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) اكتب معادلة للماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

5) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 : $f(2-x)+f(x)=0$ ، ماذا تستنتج؟

6) انشئ (Δ) ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

التمرين رقم 21:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1) ا) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) ا) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معل متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

3) ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج اشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

5) انشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

ا) تحقق انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$

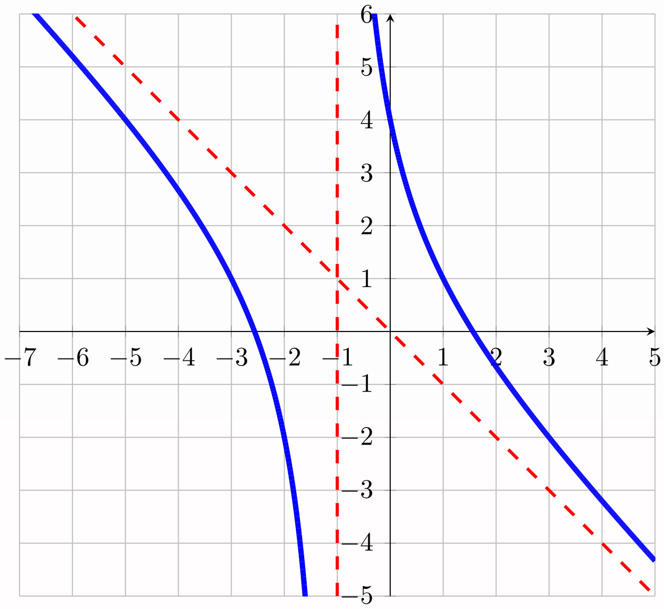
ب) استنتج ان (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم انشئ (C_h) .

التمرين رقم 22:

f دالة معرفة على المجال $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل.



1) ا) احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.

ا) احسب نهاية g عند $+\infty$

ب) تحقق ان (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس تغيرات g

3) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

1) ا) احسب $\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ماذا تستنتج؟

ب) اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) اكتب معادلتي نصف المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$

3) ارسم (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k)

السنة الثانية ثانوي

التمرين 1

حساب نهايات الدوال

1) $f(x)=3x^2+x-2 \; ; D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$

2) $f(x)=-2x^3-x^2+4x+3 \; ; D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -2x^3=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -2x^3=-\infty$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1} \; ; D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

إشارة المقام $x+1: \; - \; -1 \; +$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=+\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=-\infty$

4) $f(x)=\dfrac{-x^2+4}{x+3} \; ; D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$

إشارة المقام $x+3: \; - \; -3 \; +$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 3} f(x)=-\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 3} f(x)=+\infty$

5) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+2x+1} \; ; D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x}=0$

$x^2+2x+1: \; + \; -1 \; +$ إشارة المقام

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)=+\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} -\,-} f(x)=+\infty$

6) $f(x)=\dfrac{3x}{(x+1)^2} \; ; D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x^2}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2}=0$

إشارة المقام $+ \; -1 \; +$

$\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$

7) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4} \; ; D_f=\mathbb{R}-\{1,-2,2\}$

$D_f=]-\infty,-2[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{2x^2-x-7}{(x-1)(x^2-4)}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}=0$

إشارة المقام

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
المقام		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = -\infty$

التمرين 2

1) ح ع ت من الشكل $+\infty - \infty$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 5x + 1$

نطبق الحد الأعلى

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 5x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x}$ (نضرب في المرافق)

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{x-\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x}{x - \sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2+1} - x$ (نستخرج x^2 كعامل مشترك)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2+1} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)} - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{4+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}} - 1\right)$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2+1} - x = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$ (نضرب في المرافق)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

2) ح ع ت من الشكل $0 \times \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}(1+\sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

3) ح ع ت من الشكل $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ (نقوم بتحليل البسط)

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} =$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-6 & x-2 \\ \hline x^2+2x & x+3 \\ 0+3x-6 & \\ -3x+6 & \\ 0 & \end{array}$$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(\cancel{x-2})(x+3)}{(\cancel{x-2})} = \lim\limits_{x \to 2} x+3 = 5$

(نضرب في المرافق) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\sqrt{x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

4) ح.ع.ت من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+x-3}{5x+4} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2}{5x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2}{5}x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+4} = \lim \frac{x+\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x+4}$$

$$= \lim \frac{x+x\sqrt{1+1/x^2}}{x+4} = \lim \frac{x(1+\sqrt{1+\cancel{1/x^2}})}{x(1+\cancel{4/x})}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+4} = 2$

التمرين 3

$f(x) = \frac{-2x^2-x}{x+1}$; $D_f =]-\infty, -1[$

1) لإيجاد الأعداد a ، b و c

ط1) الطريقة 1:

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

بالمطابقة نجد

$\underset{3}{b+c=0}$ و $\underset{2}{a+b=-1}$ و $\boxed{a=-2}$

بتعويض قيمة a في 2 نجد

$b=-1-a$

$b=-1+2$

$\boxed{b=1}$

من (3) نجد $-b=c$

ومنه $\boxed{c=-1}$

ط2) القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{l|l} -2x^2-x & x+1 \\ \hline +2x^2+2x & -2x+1 \\ \hline 0 \quad x & \\ \quad -x-1 & \\ \hline \quad -1 & \end{array}$$

ومنه $\frac{2x^2-x}{x+1} = \frac{(x+1)(-2x+1)-1}{(x+1)}$

ومنه $f(x) = \frac{\cancel{(x+1)}(-2x+1)}{\cancel{(x+1)}} - \frac{1}{(x+1)}$

$$f(x) = -2x+1-\frac{1}{x+1}$$

$a=-2$ ، $b=1$ و $c=-1$

2) حساب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$

إشارة المقام: $x+1$: $-\ \vdots\ +$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1}\frac{-2x^2-x}{x+1} = -\infty$$

وعليه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f

3) إثبات أن $y=1-2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f

أي نثبت أن

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] = 0$$

$f(1)=2$
$f'(1)=0$
$f'(-3)=0$
$f(-3)=-6$

يكفي أخذ 3 عبارات لأن لدينا 3 مجاهيل

لدينا $f(1)=2$

حيث $f(1)=a+b+\frac{c}{2}$

ومنه نستنتج أن

(1) ... $a+b+\frac{c}{2}=2$

لدينا $f'(1)=0$

حيث $f'(1)=a-\frac{c}{4}$

ومنه نستنتج أن

(2) ... $a-\frac{c}{4}=0$

ولدينا كذلك

$f(-3)=-6$

حيث $f'(3)=3a+b+\frac{c}{-2}$

ومنه نستنتج أن

(3) ... $-6a+b-\frac{c}{2}=-6$

من (2) نجد $a=\frac{c}{4}$

نعوض من قيمة a في (1) و (3)

نجد
$$\begin{cases}\frac{c}{4}+b+\frac{c}{2}=2\\ -\frac{3c}{4}+b-\frac{c}{2}=-6\end{cases}$$

أي
$$\begin{cases}\frac{3c}{4}+b=2 & \text{---}(*)\\ -\frac{5c}{4}+b=-6 & (**)\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\cancel{(2x+1)}-\frac{1}{x+1}-\cancel{(1-2x)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x+1}=0$

و

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x+1}=0$

وعليه المستقيم ذو المعادلة $y=1-2x$ مقارب لمنحنى الدالة.

4) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (D)

دراسة إشارة الفرق

$[f(x)-y]=-\frac{1}{x+1}$

حيث

$x+1:\ -\ \ -1\ \ +$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
-1	$-$	‖	$-$
$x+1$	$-$	‖	$+$
إشارة الفرق	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)	‖	(C_f) تحت (D)

التمرين 4

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

1) حساب $f'(x)$

f ق إ على $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث

$f'(x)=a-\frac{c}{(x+1)^2}$

2) إثبات أن $a=1$ و $b=-1$ ، $c=4$ أي

من جدول التغيرات نلاحظ أن

نستنتج أن

بطرح ** من * نجد

$\frac{3c+5c}{4}=8$

$\frac{8c}{4}=8$

ومنه $\boxed{c=4}$

بتعويض قيمة c في ② نجد

$a=\frac{4}{4}$

$\boxed{a=1}$

من المعادلة ① نجد

$b=2-a-\frac{c}{2}$

$b=2-1-2$

$\boxed{b=-1}$

3) إتمام جدول التغيرات

إشارة المقام $-\ |\ +$

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} x-1+\frac{4}{x+1} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

4) إثبات أن $y=x-1$ مقارب لـ (C_g) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty}[f(x)-y] = \lim_{x \to -\infty}\left[x-1+\frac{4}{x+1}-(x-1)\right]$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$

بنفس الطريقة نجد

$\lim_{x \to +\infty} f(x)-y = 0$

ومنه $y=x-1$ م م لـ (C_g) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

5) الوضع النسبي (نفس الطريقة الموضحة في التمرين السابق)

التمرين 5

$f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{x-1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

1) إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$

$f(x)=2x-1+\frac{2}{x-1}$

$2x^2-3x+3$	$x-1$
$-2x^2+2x$	$2x-1$
$-x+3$	
$+x-1$	
2	

$\frac{2x^2-3x+3}{x-1} = \frac{(x-1)(2x-1)}{x-1}+\frac{2}{x-1}$

أي $f(x)=2x-1+\frac{2}{x-1}$

2) إثبات أن $y=2x-1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)-y = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$

3) دراسة تغيرات الدالة f

1) حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

إشارة المقام $-\ |\ +$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$

2) حساب $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ولدينا

$$f'(x)=\frac{(4x-3)(x-1)-(1)(2x^2-3x+3)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{4x^2-4x\cancel{-3x}\cancel{+3}-2x^2\cancel{+3x}\cancel{-3}}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$$

دراسة إشارة المشتقة

المقام موجب تماما وعليه إشارة المشتقة من إشارة البسط حيث

$2x^2-4x=0$ تكافئ

$2x(x-2)=0$ أي $2x=0$ أو $x-2=0$

ومنه $\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=2}$

جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	$f(2)=5$	$\nearrow$	$+\infty$

الإنشاء

تعيين $(C_f)\cap(yy')$

$f(0)=-3$

ومنه $(C_f)\cap(yy')=\{(0,-3)\}$

تعيين $(C_f)\cap(xx')$

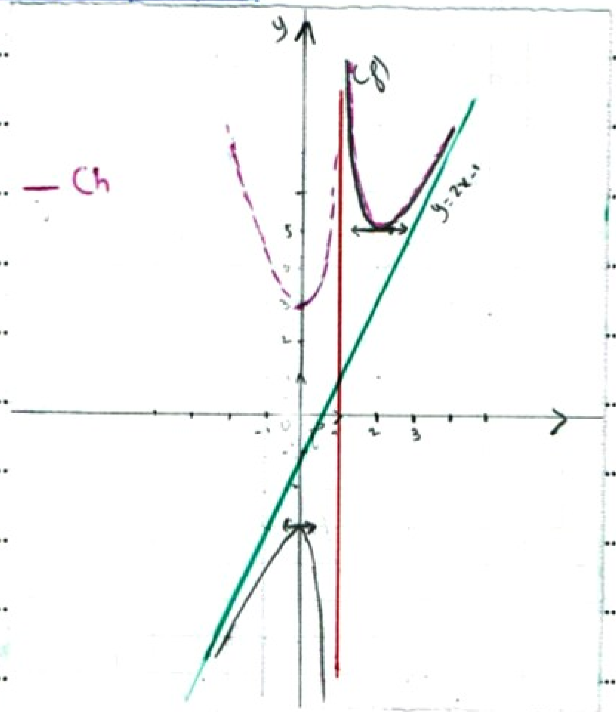
$f(x)=0$ تكافئ $2x^2-3x+3=0$ و $x-1\neq 0$

حساب Δ : $\Delta=9-2\times2\times3$

$\Delta<0$ ومنه (C_f) لا يقطع (xx')

الإنشاء

	D		
x	0	1	-1
y	-1	1	-3



4) استنتاج رسم (C_h)

$h(x)=|f(x)|$

ومنه
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & ; f(x)\geq 0 \\ -f(x) & ; f(x)<0 \end{cases}$$

ومنه
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\in]1,+\infty[\\ -f(x) & ; x\in]-\infty,1[\end{cases}$$

وعليه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x\in]1,+\infty[$

(C_h) نظير جزء (C_f) الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل لما $x\in]-\infty,1[$

التمرين 6

$f(x)=ax^3+bx-1 \; ; \; D_f=\mathbb{R}$

1) تعيين العددان a و b

نعلم أن $A\in(C_f)$ معناه

$f(-1)=1$

حيث $f(-1)=-a-b-1$

وعليه (1) ... $-a-b-1=1$

(C_f) يقبل عند $(1;f(1))$ مماس موازي لمحور الفواصل معناه

$f'(1)=0$

حيث

$f'(x)=3ax^2+b$

ومنه $f'(1)=3a+b$

وعليه (2) ... $3a+b=0$

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد

$2a-1=1$

$2a=2$

ومنه $\boxed{a=1}$

بتعويض قيمة a في (1) نجد

$b=-a-1-1$

$\boxed{b=-3}$

ومنه

$f(x)=x^3-3x-1$

2) أ- دراسة تغيرات الدالة f

حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

حساب $f'(x)$

f ق إ على $\mathbb{R}$ حيث

$f'(x)=3x^2-3$

دراسة إشارة $f'(x)$

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

ومنه $x=1$ أو $x=-1$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

ب/ معادلة المماس عند B

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$

حيث $f(0)=-1$ و $f'(0)=-3$

ومنه $\boxed{(T): y=-3x-1}$

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (T)

$f(x)-y=x^3-3x-1-(-3x-1)$

$=x^3-3x-1+3x+1$

$f(x)-y=x^3$

x^3 : − 0 +

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		−	0	+	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

بما أن منحنى الدالة اخترق المماس عند النقطة B فالنقطة B تمثل نقطة انعطاف

جـ/ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول α و β و γ

1) $\alpha \in [-2,-1]$

من جدول التغيرات نجد أن الدالة f رتيبة على المجال $[-2,-1]$

حيث $f(-2)<0$ و $f(-1)>0$

أي $f(-2)\times f(-1)<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in [-2,-1]$

2) $\beta \in [-\frac{1}{2},0]$

الدالة f رتيبة على المجال $[-\frac{1}{2},0]$

حيث $f(-\frac{1}{2})>0$ و $f(0)<0$

أي $f(-\frac{1}{2})\times f(0)<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد β حيث $\beta \in [-\frac{1}{2},0]$

3) $\gamma \in [\frac{3}{2},2]$

الدالة f رتيبة على المجال $[\frac{3}{2},2]$

حيث $f(\frac{3}{2})<0$ و $f(2)>0$

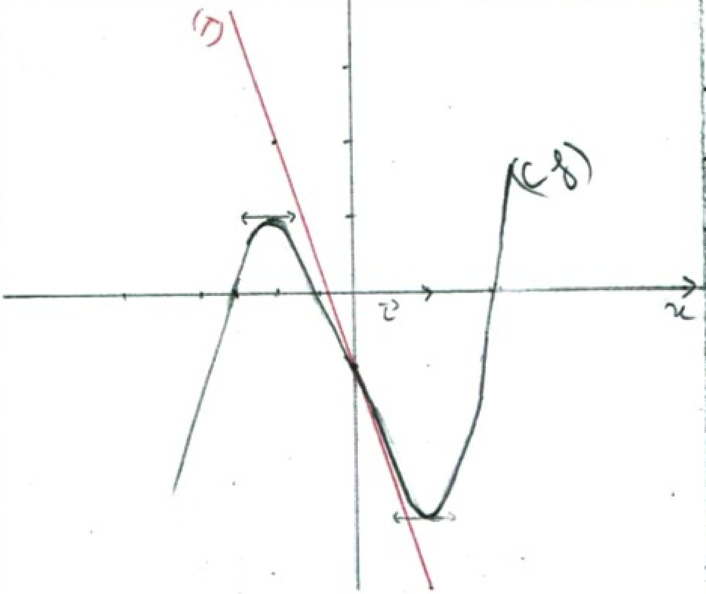
أي $f(\frac{3}{2})\times f(2)<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد γ حيث $\gamma \in [\frac{3}{2},2]$

د/ الانشاء

$(T): y=-3x-1$

x	0	1	-1
y	-1	-4	2



تمرين 7

$$g(x)=\frac{3x^2-5x}{x-3}, \quad D_g=\mathbb{R}-\{3\}$$

1) حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}3x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}3x=+\infty$$

إشارة المقام: $-\ 3\ +$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}3} g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}3} g(x)=+\infty$$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ حيث

$$g'(x)=\frac{(6x-5)(x-3)-1(3x^2-5x)}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{6x^2-18x-5x+15-3x^2+5x}{(x-3)^2}$$

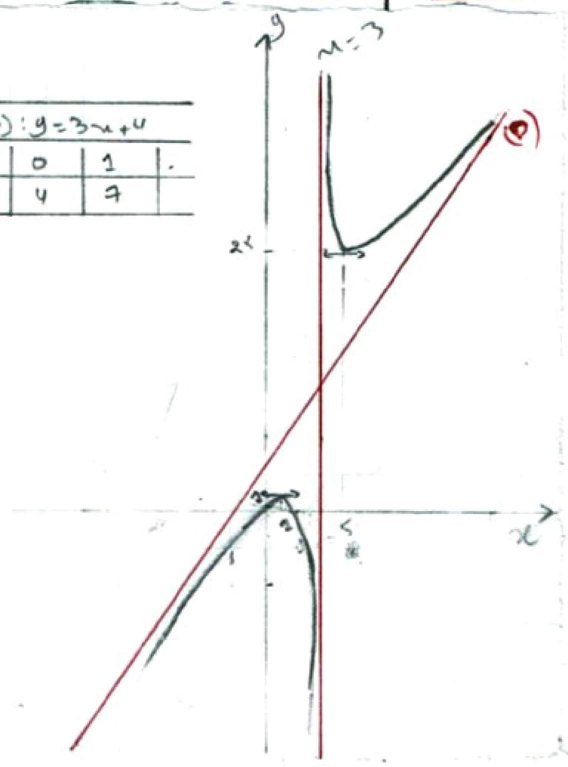
$$g'(x)=\frac{3x^2-18x+15}{(x-3)^2}$$

تحديد إشارة g'

المقام موجب تماما ومنه إشارة g' من إشارة البسط

الانشاء

$(D): y=3x+4$		
x	0	1
y	4	7



7) المناقشة البيانية

$g(x)=m$ مناقشة أفقية

لما $m\in]-\infty,1[$ المعادلة $g(x)=m$ لها تقبل حلين أحدهما موجب والآخر سالب

لما $m=1$ المعادلة لها تقبل حل مضاعف معدوم

لما $m\in]1,25[$ المعادلة لا تقبل حل

لما $m=25$ المعادلة لها تقبل حل مضاعف موجب

لما $m\in]2,+\infty[$ المعادلة لها تقبل حلين موجبان

8) $h(x)=\dfrac{3x^2-5|x|}{|x|+3}$

أ- إثبات أن h دالة زوجية

$h(-x)=\dfrac{3(-x)^2-5|-x|}{|-x|-3}=\dfrac{3x^2-5|x|}{|x|-3}=h(x)$

ومنه h زوجية

ب- كتابة h بدون رمز القيمة المطلقة

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-5x}{x-3} & ; x\geq 0\\[2mm] \dfrac{3x^2+5x}{-x-3} & ; x\leq 0\end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على C_g لما $x\in[0,+\infty[$

وبما أن الدالة h زوجية فإن (C_h) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

وعليه نحصل على جزء (C_h) لما $x\leq 0$ برسم نظير جزء (C_h) لما $x\geq 0$ بالنسبة لمحور التراتيب

التمرين 8

$f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

1) أ) التحقق أن $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x+1}$

نستعمل المطابقة أو القسمة الإقليدية

ب) حساب النهايات

$-\quad -1\quad +$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=+\infty$

2/ اتجاه تغير الدالة f

f ق إ على $\mathbb{R}-\{-1\}$

$f'(x)=\dfrac{(2x+4)(x+1)-1(x^2+4x+4)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+2x+\cancel{4x}+\cancel{4}-x^2-\cancel{4x}-\cancel{4}}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

دراسة إشارة المشتقة

$3x^2-18x+15=0$

حساب Δ: $\Delta=(-18)^2-4(3)(15)$

$\Delta=144$ / $\sqrt{\Delta}=12$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين هما

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1=\frac{18-12}{6}$	$x_2=\frac{18+12}{6}$
$\boxed{x_1=1}$	$\boxed{x_2=5}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	25	↗	$+\infty$

3) تعيين الأعداد الحقيقية a، b و c

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-5x & x-3 \\ \hline -3x^2+9x & 3x+4 \\ 4x & \\ -4x+12 & \\ 12 & \end{array}$$

$$\frac{3x^2-5x}{x-3}=3x+4+\frac{12}{x-3}$$

ومنه $a=3$ ، $b=4$ و $c=12$

4) إثبات أن $y=3x+4$ مقارب لـ (C_g)

نلاحظ أن $f(x)=3x+4+\frac{12}{x-3}$

حسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x-3}=0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{12}{x-3}=0$

وعليه (D) مقارب لـ (C_g) عند $-\infty$ و $+\infty$

5) إثبات أن $\omega(3,13)$ مركز تناظر (C_g)

$\omega(\alpha,\beta)$ مركز تناظر معناه

$$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$$

$$f(2(3)-x)+f(x)=f(6-x)+f(x)$$

$$=\frac{3(6-x)^2-5(6-x)}{6-x-3}+\frac{3x^2-5x}{x-3}$$

$$=\frac{108+3x^2-36x-30+5x}{-x+3}+\frac{3x^2-5x}{x-3}$$

$$=\frac{-(3x^2-31x+78)}{x-3}+\frac{3x^2-5x}{x-3}$$

$$=\frac{-3x^2+31x-78+3x^2-5x}{x-3}$$

$$=\frac{+26x-78}{x-3}=\frac{+26\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}$$

ومنه $f(2(3)-x)+f(x)=2(13)$

وعليه $\omega(3,13)$ مركز تناظر (C_g)

6) تعيين تقاطع (C_g) مع حاملي محوري الاحداثيات

* مع محور التراتيب

$f(0)=0$

$(C_g)\cap(yy')=\{(0,0)\}$

* مع محور الفواصل

$f(x)=0$: $\frac{3x^2+5x}{x-3}=0$

تكافئ $3x^2+5x=0$ و $x-3\neq0$

$x(3x+5)=0$ ذكا $\boxed{x=0}$ او

$3x+5=0$ اي $\boxed{x=\frac{-5}{3}}$

$(C_g)\cap(xx')=\left\{(0,0),\left(\frac{-5}{3},0\right)\right\}$

المقام موجب تماما ومنه إشارة المشتقة من إشارة البسط أي

$x^2+2x=0$ أي $x(x+2)=0$

تكافئ $\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=-2}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2) أ- إثبات أن (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين

لدينا
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$$
(C_g) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-1$

لدينا $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x+1}$

حيث $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$

معناه (C_g) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y=x+3$

ب- الوضع النسبي (C_g) و (D)

$$f(x)-y=(x+3)+\frac{1}{x+1}-(x+3)$$

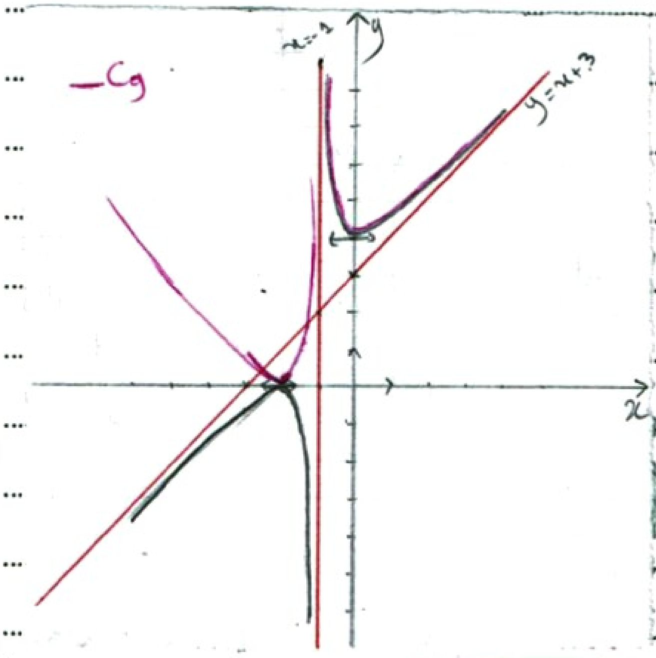
$$f(x)-y=\frac{1}{x+1}$$

دراسة إشارة الفرق

إشارة الفرق من إشارة المقام كون البسط موجب

$x+1$: $-$ -1 $+$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	(C_g) تحت (D)	‖	(C_g) فوق (D)



3) المناقشة

$f(x)=m$ هي مناقشة أفقية

لما $m\in]-\infty,0[$ المعادلة لها تقبل حلان سالبان

لما $m=0$ المعادلة لها تقبل حل مضاعف

لما $m\in]0,4[$ المعادلة لا تقبل حل

لما $m=4$ المعادلة لها تقبل حل مضاعف

لما $m\in]4,+\infty[$ المعادلة لها تقبل حلان أحدهما سالب والآخر موجب

4) $g(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{|x+1|}$

أ- كتابة g بدون رمز القيمة المطلقة

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+4}{x+1} ; & x+1\geq 0\\[2mm] \dfrac{x^2+4x+4}{-(x+1)} , & x+1<0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+4}{x+1} ; & x\geq -1\\[2mm] -\dfrac{x^2+4x+4}{x+1} , & x<-1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) ; & x\geq -1\\ -f(x) ; & x<-1\end{cases}$$

ومنه

لما $x\geq -1$ (C_f) ينطبق على (C_g)

لما $x<-1$ (C_g) نظير جزء (C_f) الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل

التمرين 9

$$g(x)=8x^3-9x^2+4$$

1) دراسة تغيرات الدالة g

* حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 8x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 8x^3=+\infty$$

* حساب $g'(x)$

g ق.ا على $\mathbb{R}$

$$g'(x)=24x^2-18x$$

دراسة إشارة g'

$g'(x)=0$ أي $24x^2-18x=0$

$x(24x-18)=0$ تكافئ $\boxed{x=0}$

أو $24x-18=0$ أي $x=\dfrac{18}{24}$

ومنه $\boxed{x=\dfrac{3}{4}}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	α		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		+		0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗		4	↘		↗	$+\infty$

2) $f(x)=\dfrac{-4x+3}{x^3-1}$

أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{x^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^2}=$$

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_f)

إشارة المقام: $-\quad 1\quad +$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=-\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ حساب $f'(x)$

f ق.ا على $\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{-4(x^3-1)-3x^2(-4x+3)}{(x^3-1)^2}$$

$$=\frac{-4x^3+4+12x^3-9x^2}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{8x^3-9x^2+4}{(x^3-1)^2}=\frac{g(x)}{(x^3-1)^2}$$

جـ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام موجب تماما وعليه

$g(x)=0$

$8x^3-9x^2+4=0$

حيث $g(\alpha)=0$ و $\alpha\in]-0{,}55;-0{,}54[$

x		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

جدول التغيرات

x		α		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	||	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↘		↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ 0

2) إثبات أن $f(\alpha)=\frac{-4}{3\alpha^2}$

$$f(\alpha)+\frac{4}{3\alpha^2}=\frac{-4\alpha+3}{\alpha^3-1}+\frac{4}{3\alpha^2}$$

$$=\frac{(4\alpha+3)3\alpha^2+4(\alpha^3-1)}{(\alpha^3-1)(3\alpha^2)}$$

$$=\frac{-12\alpha^3+9\alpha^2+4\alpha^3-4}{3\alpha^5-3\alpha^2}$$

$$=\frac{-8\alpha^3+9\alpha^2-4}{3\alpha^5-3\alpha^2}=\frac{-g(\alpha)}{3\alpha^5-3\alpha^2}$$

حيث $g(\alpha)=0$ ومنه

$$f(\alpha)+\frac{4}{3\alpha^2}=0$$

إذا

$$f(\alpha)=\frac{-4}{3\alpha^2}.$$

حصر $f(\alpha)$

لدينا $-0{,}55<\alpha<-0{,}54$

$0{,}2916<\alpha^2<0{,}3025$

$0{,}8748<3\alpha^2<0{,}9075$

$$\frac{1}{0{,}9075}<\frac{1}{3\alpha^2}<\frac{1}{0{,}8748}$$

$$-\frac{4}{0{,}8748}<\frac{-4}{3\alpha^2}<-\frac{4}{0{,}9075}$$

ومنه $-4{,}57<f(\alpha)<-4{,}41$

تمرين 10

$g(x)=2x^3+x^2-1$

1) دراسة تغيرات الدالة g

حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$$

حساب $g'(x)$

g ق إ على $\mathbb{R}$ حيث

$g'(x)=6x^2+2x$

دراسة إشارة g'

$g'(x)=0$ تكافئ $6x^2+2x=0$

أي $x(6x+2)=0$ أو $\boxed{x=0}$ و $\boxed{x=-\frac{1}{3}}$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		$-1/3$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	$g(-1/3)$	↘	-1	↗	

ب) إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α

حيث $0{,}5 < \alpha < 0{,}9$

الدالة g رتيبة تماما على المجال $]0{,}5\,;0{,}9[$ حيث $g(0{,}5) < 0$

و $g(0{,}9) > 0$ إذا

$g(0{,}5) \times g(0{,}9) < 0$

ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]0{,}5\,;0{,}9[$

ج/ إشارة $g(x)$

x		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

2) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{3x}$

أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty \qquad x : \; -\overset{0}{|}+$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$$

ب/ حساب $f'(x)$

f ق إ على $\mathbb{R}-\{0\}$ حيث

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(3x) - 3(x^3+x^2+1)}{(3x)^2}$$

$$= \frac{9x^3+6x^2-3x^3-3x^2-3}{(3x)^2}$$

$$= \frac{6x^3+3x^2-3}{9x^2}$$

$$= \frac{\cancel{3}(2x^3+x-1)}{\cancel{3}\times 3x^2}$$

وعليه $f'(x) = \dfrac{g(x)}{3x^2}$

ومنه إشارة f' من إشارة g لأن المقام موجب تماما

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

د/ إثبات أن $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{1}{2\alpha}$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+6}{12\alpha}$$

$$f(\alpha) - \frac{2\alpha^2+6}{12\alpha} \overset{?}{=} 0$$

$$f(\alpha) - \frac{2\alpha^2+6}{12} = \frac{12\alpha(\alpha^3+\alpha^2+1) - (2\alpha^2+6)(3\alpha)}{3\alpha \times 12\alpha}$$

$$= \frac{12\alpha^4+12\alpha^3+12\alpha - (6\alpha^3+18\alpha)}{36\alpha}$$

$$= \frac{12\alpha^4+6\alpha^3-6\alpha}{36\alpha}$$

$$= \frac{\cancel{6\alpha}(2\alpha^3+\alpha^2-1)}{6\times\cancel{6\alpha}} = \frac{2\alpha^3+\alpha^2-1}{6}$$

لدينا $g(\alpha)=0$ أي $2\alpha^3+\alpha^2-1=0$

ومنه نستنتج أن $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{1}{2\alpha}$

حصر $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$$

لدينا:

$$0{,}5 < \alpha < 0{,}9$$

① $$0{,}08 < \frac{\alpha}{6} < 0{,}15$$

$$1 < 2\alpha < 1{,}8$$

② $$0{,}55 < \frac{1}{2\alpha} < 1$$

نجمع ① و ② طرف لطرف نجد

$$1{,}05 < f(\alpha) < 1{,}15$$

تمرين 13

$$g(x) = \frac{2-3x}{(x-1)^2} \quad ; D_g = \mathbb{R}-\{1\}$$

1) حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

2)

$$f(x) = -x+3+g(x)$$

أ/ المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى الدالة f لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

ب/ حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

جـ/ د, اسة اتجاه تغير الدالة f

f ق.إ على $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث

$$f'(x) = (-x+3)' + g'(x)$$

$$f'(x) = -1 + \frac{-3(x-1)^2 - (2x-2)(2-3x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-(x-1)^4 - 3(x^2+1-2x) - (4x-6x^2-4+6x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-x^4+4x^3-6x^2+4x-1-3x^2-3+6x-4x+6x^2+4-6x}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-x^4+4x^3-3x^2}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(-x^2+4-3)}{(x-1)^4}$$

إشارة $f'(x)$

إشارة f' من إشارة البسط لأن المقام موجب تماما أي

$x^2(-x^2+4x-3) = 0$ أي $\boxed{x=0}$

حساب Δ $\quad \Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 16-12$; $\Delta = 4$ / $\sqrt{\Delta} = 2$

يوجد للمعادلة حلان هما

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2}{-2} \qquad \boxed{x_1 = 1}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2}{-2} \qquad x_2 = 3$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $-$	‖ $+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	5 $\searrow -\infty$	‖ $-\infty \nearrow$	$-1{,}75$	$\searrow -\infty$

3- دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$$f(x) - y = g(x)$$

- دراسة إشارة $g(x)$

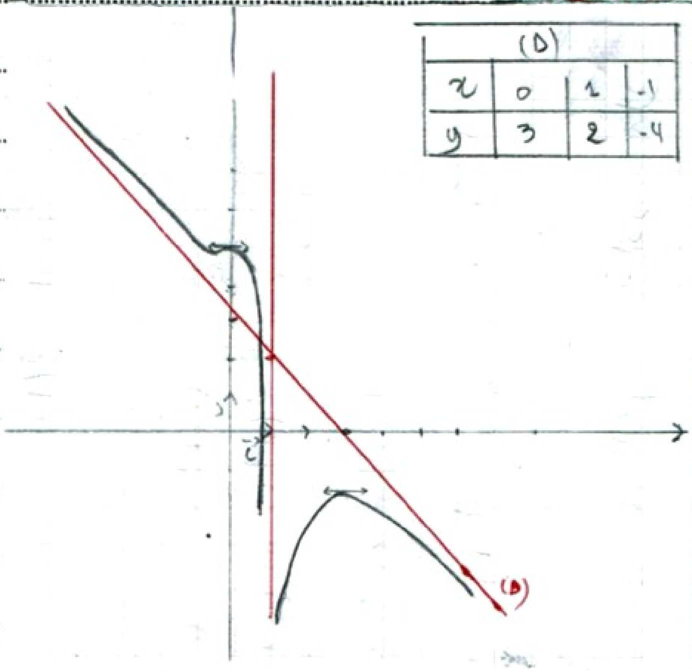
المقام موجب تماما وعليه إشارة $g(x)$ من إشارة البسط أي

$2 - 3x = 0$ أي $x = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق Δ	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

الإنشاء

(Δ)			
x	0	1	-1
y	3	2	-4



تمرين 14 $f(x) = \frac{3x-7}{2-x}$; $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

1) دراسة تغيرات الدالة f

* حساب النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{-x} = -3$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$$

إشارة المقام $2-x$: $+$ 2 $-$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$$

* حساب f'

f ق إ على $\mathbb{R} - \{2\}$ حيث

$$f'(x) = \frac{3(2-x) - (-1)(3x-7)}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{6 - 3x + 3x - 7}{(2-x)^2} = \frac{-1}{(2-x)^2}$$

ومنه $f'(x) < 0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-3 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ -3	

2) المستقيمات المقاربة

لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$

معناه أن المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ م. م. مقارب أفقي لـ (C_f)

لدينا $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$

$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$

معناه أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ م. م. مقارب عمودي لـ (C_f)

3) تعيين نقاط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات

- مع محور التراتيب

$(C_f) \cap (yy') = \{(0, -\frac{7}{2})\}$ أي $f(0) = -\frac{7}{2}$

• مع محور الفواصل

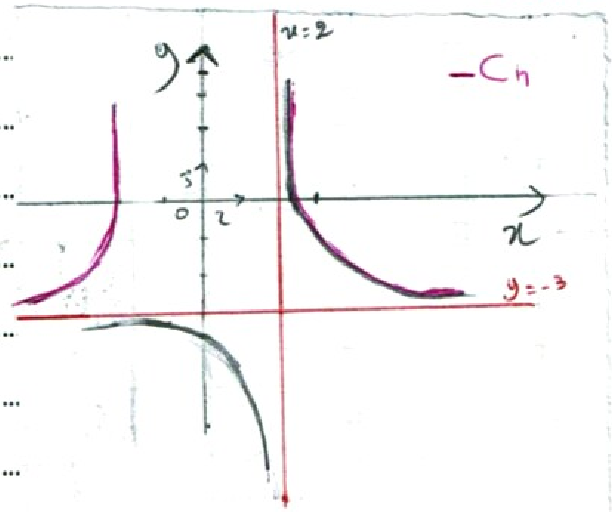
$f(x)=0$ أي $\frac{3x-7}{2-x}=0$

ومنه $3x-7=0$ و $2-x\neq 0$ أي

$x=\frac{7}{3}$ و $x\neq 2$

$(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(\frac{7}{3};0\right)\right\}$

3) نشاء



4) إثبات أن نقطة تقاطع المقاربين هي مركز تناظر (C_f)

نقطة تقاطع المقاربين هي $(2,-3)$

$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

$f(2(2)-x)+f(x)=\frac{3(4-x)-7}{2-(4-x)}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=\frac{12-3x-7}{2-4+x}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=\frac{-3x+5}{-2+x}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=-\frac{-3x+5}{2-x}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=\frac{3x-5+3x-7}{2-x}=\frac{6x-12}{2-x}$

$=\frac{6(\cancel{x-2})}{-(\cancel{x-2})}=-6=2(-3)$

وهو المطلوب

5) (C_f) يقبل مماس يوازي المستقيم ذو المعادلة

$y=-x+4$ معناه $f'(x)=-1$

أي $\frac{-7}{(-x+2)^2}=-1$

$-7=-(x^2+4-4x)$

$-x^2+4x+3=0$

حساب Δ: $\Delta=b^2-4ac$

$=16+12=28$ / $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{7}$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة لها حلين

$x_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{-2}$ ، $x_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{-2}$

$x_1=2+\sqrt{7}$ ، $x_2=2-\sqrt{7}$

ومنه (C_f) يقبل مماس موازي المستقيم ذو المعادلة $y=-x+4$ عند $x_0=2+\sqrt{7}$

و $x_0=2-\sqrt{7}$

6) $h(x)=f(|x|)$

أ/

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & x\geq 0 \\ f(-x), & x\leq 0 \end{cases}$$

$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$

ومنه h زوجية

ومنه

(C_h) ينطبق على (C_f) على المجال $[0,+\infty[$

(C_h) نظير جزء (C_h) لما $x\in[0,+\infty[$ بالنسبة لمحور التراتيب لأن h دالة زوجية

تمرين 19 $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

1) حساب $f'(x)$

$f'(x)=a-\frac{c}{(x-2)^2}$

2) أ- تعيين الأعداد a ، b و c

من جدول التغيرات لدينا

$f(1)=2$

$f'(1)=0$

$f(3)=-2$

حيث $f(1)=a+b-c$

ومنه ① ... $a+b-c=2$

$f'(1)=a-c$

ومنه ② ... $a-c=0$

$f(3)=3a+b+c$

ومنه ③ ... $3a+b+c=-2$

من ② نجد $a=c$

وعليه بتعويض a في ① نجد

$c+b-c=2$

أي $\boxed{b=2}$

بتعويض قيمة b في ③ نجد

$3c+2+c=-2$

$4c=-4$

$\boxed{c=-1}$

ومنه $\boxed{a=-1}$

ب/ إثبات أن (C_f) يقبل مقارب عمودي

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = ?$

لدينا

$f(x)=-x+2-\dfrac{1}{x-2}$

$f(x)=\dfrac{-x^2+3}{x-2}$

$-\quad 2 \quad +$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)=+\infty$ / $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)=-\infty$

وعليه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=2$

(يمكن ملاحظة ذلك من جدول التغيرات)

جـ/ المقارنة بين $f(0)$ و $f(\frac{1}{2})$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,\frac{1}{2}]$ وعليه من أجل كل x

حيث $0\le x\le \frac{1}{2}$ فإن $0<\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2})>f(0)$

3) أ- إثبات أن (C_f) يقبل مستقيم (Δ)

يطلب تعيين معادلته

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+3}{x-2}\times\dfrac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+3}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2}{x^2}$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

بنفس الطريقة نجد

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

ومنه $a=-1$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[-x+2-\dfrac{1}{x-1}+x\right]$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[2-\underbrace{\dfrac{1}{x-2}}_{0}\right]=2$

ومنه $b=2$

$(\Delta): y=-x+2$

ب/ د، دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (D)

$$f(x)-y=-\frac{1}{x-2}$$

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
-1	$-$	$-$
$x-2$	$-$	$+$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)

ج/ مناقشة بيانية

تمرين 21

$$g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$$

1) أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$g'(x)=6x^2-8x+7$$

$$g'(x)=0$$

حساب Δ: $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=64-168$

$\Delta<0$ ومنه المعادلة ليس لها حلول ومنه $g'(x)$ موجبة تماما

أي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) أ- إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد

g دالة متزايدة تماما على $[0,7;0,8]$

(نتيجة) حسب $g(0,7)<0$ و $g(0,8)>0$

ومنه $g(0,7)\times g(0,8)<0$

إذا المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد

α حيث $\alpha\in[0,7;0,8]$

ب/ إشارة $g(x)$

$g(x)$: $-$ α $+$

II) $$f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ / $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ب/ توجيه المقاربات

ومنه معادلة (D)

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\underbrace{\cancel{\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}}}_{\to 0}\right]=\frac{1}{2}$$

$$(D):\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

ج/ الوضع النسبي (إشارة الفرق)

3/ أ

$$f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام موجب تماما

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-0,7$	$\nearrow$	$+\infty$

4- حساب $f(1)$

$f(1) = 0$

بعد توحيد المقامات نجد

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x + 2}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$f(x) = 0$ تكافئ $2x^3 - 4x + 2 = 0$

و $2(2x^2 - 2x + 1) \neq 0$

حسب 1 جذر لـ $2x^3 - 4x + 2$ أي

$$2x^3 - 4x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 4x + 2 & x - 1 \\ \hline -2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + 2x - 2 \\ +2x^2 - 4x + 2 & \\ -2x^2 + 2x & \\ 0 \quad -2x + 2 & \\ \quad +2x - 2 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

ومنه

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x^2 + 2x - 2)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$f(x) = 0$ تكافئ

$2(2x^2 - 2x + 1) \neq 0$ و $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$ أو

اذا $\boxed{x = 1}$

حساب Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 + 16 = 20$ / $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

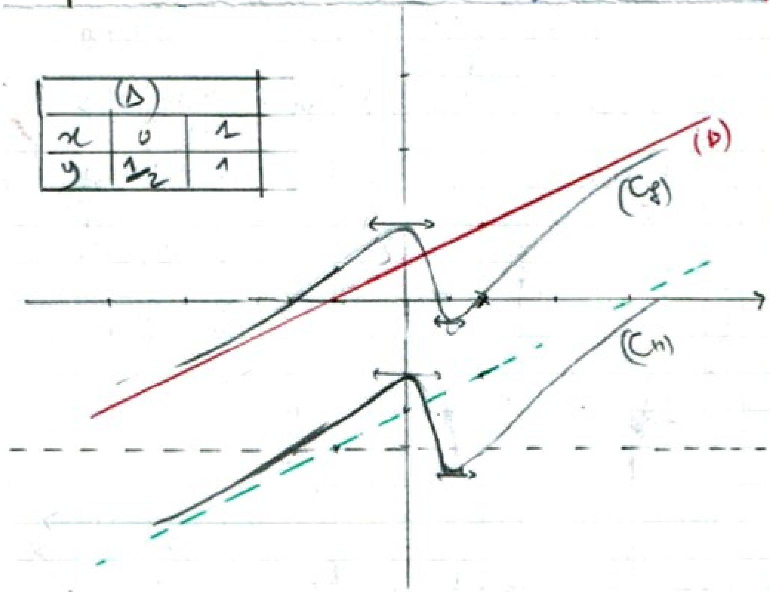
$\Delta > 0$ اذا المعادلة لها حلان

$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{4}$ ، $\boxed{x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$

$x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4}$ ، $\boxed{x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$

$$S = \left\{ 1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

ج) الانشاء $(C_f) \cap (yy') = \{(0, 1)\}$



6) $h(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$

أ/ التحقق أن $h(x) = f(x) - 2$

$$f(x) - 2 = \frac{2x^3 - 4x + 2}{2(2x^2 - 2x + 1)} - \frac{2(4x^2 - 4x + 2)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$= \frac{2x^3 - 4x + 2 - 8x^2 + 8x - 4}{4x^2 - 4x + 2}$$

$$= \frac{2x^3 - 8x^2 + 4x - 2}{4x^2 - 4x + 2}$$

$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

ب/ (C_h) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{j}$

$h(x) = f(x) + k$

تمرين 22

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$$

1) حساب النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$$

ب/ جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

2) $$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$$

أ) $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

ب/ نحسب معادلة المقارب المائل

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\boxed{a = 1}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [g(x) - ax] = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x+1}$$

$$b = 0$$

$$(D): \ y = x$$

3) $$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

أ- حساب $\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$

$$k(x) = \begin{cases} x + \frac{4}{x+1} ; & x \geq 0 \\ -x + \frac{4}{x+1} ; & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{k(h) - k(0)}{h} = \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + h + \cancel{4} - 4h - \cancel{4}}{h+1} \times \frac{1}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(h-3)}{h+1} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$

$$= \frac{h-3}{h+1}$$

$$\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -3$$

$$\lim_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -3$$

نستنتج أن الدالة قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

حيث $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = -3$

التفسير الهندسي

(C_k) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ مماس معامل توجيهه -3

ج) كتابة معادلة (D_1) و (D_2)

$$(D): \ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= -3(x - 0) + 4$$

$$(D_1) = (D_2) = -3x + 4$$

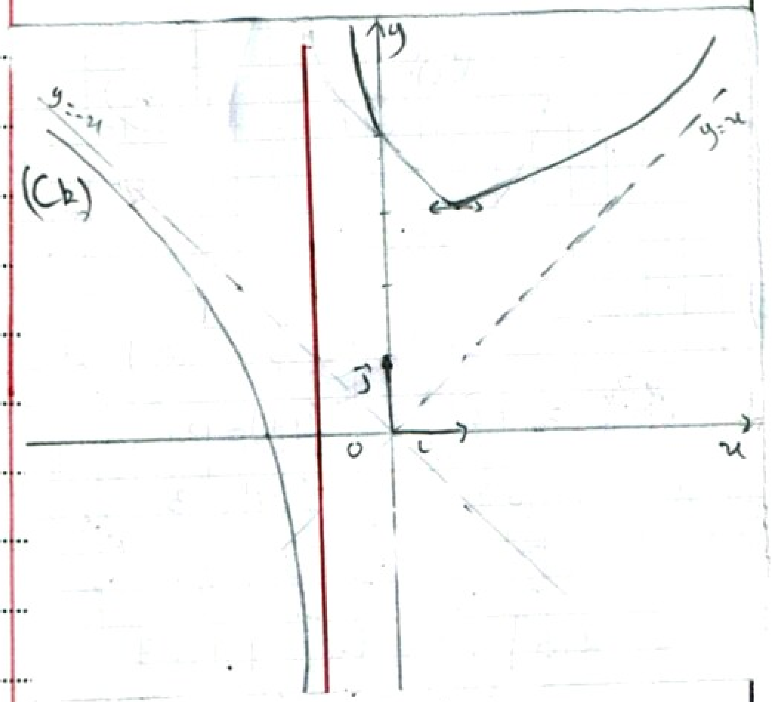
الإنشاء

$$k(x) = \begin{cases} x + \dfrac{4}{x+1} \ , & x \geq 0 \\ -x + \dfrac{4}{x+1} \ ; & x \leq 0 \end{cases}$$

أي

$$k(x) = \begin{cases} g(x) \ ; & x \in [0, +\infty[\\ f(x) \ ; & x \in]-\infty, 0] \cap (]-\infty, -1[\cup]-1, 0]) \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} g(x) \ ; & x \in [0, +\infty[\\ f(x) \ ; & x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$



أدعو أن يكون هذا
العمل خالصا لوجه الله
وإن كان هناك تقصير
فهو من عندي ^^