الأستاذة : يماني ليلى

بطاقة رقم 01

*- المستــــــــــــوى: الثالثة تسيير واقتصاد.
*- ميدان التعلـــــــــم : الدوال العددية
*-المكتسبـــــات القبلية: *** الدوال الأصلية والتكاملات
*- الموسم الدراسي : 2013/2012.
*- الكفاءات المستهدفة: *** تعريف و خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري.
*- الوسائل المستعملة:الكتاب المدرسي+المنهاج
*- المدة اللازمة للدرس: 01 ساعة

التقويـــم والمدة	الــــــدرس	تطبيقات وتوجيهات

*** نشاط 01 : (نشاط أول صفحة 128)

■ حل النشاط :

1- نعلم أن الدالة f المعرفة على المجال: $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x^n}/n\geq 2$ دوالا مستمر على هذا المجال فهي تقبل دوالا أصلية: F على هذا المجال مع:
$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c/c\in IR$ وعليه:

بأخذ $n=3$ فإن: $f(x)=\frac{1}{x^3}$ وبالتالي $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+c$.

بأخذ $n=2$ فإن: $f(x)=\frac{1}{x^2}$ وبالتالي $F(x)=-\frac{1}{x}+c$.

لكن لاحظ أنه باستعمال نفس الدستور لما $n=1$ فإن: $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن:
$F(x)=-\frac{1}{(1-1)x^{1-1}}+c$ والتي تكون غير معرفة على المجال: $]0;+\infty[$.

لكن الدالة f المعرفة والمستمرة على $]0;+\infty[$ تقبل دوال أصلية ، وبصفة خاصة دالة أصلية وحيدة تنعدم لما $x=1$ تسمى بدالة اللوغريتم النيبيري ونكتب:
من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x \frac{1}{t}dt=\ln(x)$.

تعريف :

نسمي الدالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز إليها بالرمز " ln " الدالة الأصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة $t\mapsto\frac{1}{t}$ و التي تنعدم من أجل عند 1.

ملاحظات+ نتائج:

1- نرمز إلى اللوغاريتم النيبيري لعدد x من $]0;+\infty[$ بـ $\ln(x)$ و أحيانا $\ln x$.

2- لدينا: من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x \frac{1}{t}dt=\ln(x)$.

3- $\ln(1)=0$.

4- بإستعمال اللمسة $\boxed{\ln}$ في الآلة الحاسبة العلمية نجد:

x	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\ln(2)$	$\ln(3)$
$\ln(x)$	$\simeq -0.693$	$\simeq 0.693$	$\simeq 1.098$

5- الدالة اللوغاريتم النيبيري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ،
$(\ln)'(x)=\frac{1}{x}$

- أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\frac{1}{x}>0$ و منه الدالة " ln " متزايدة تماما على المجال
- $]0;+\infty[$.

تقويم تشخيصي (10د)

* تقويم تكويني (35د)

يتم الإشارة إلى كيفية استعمال الآلة الحاسبة لحساب قيم دوال لوغاريتم . (كما يتم الإشارة الى العلاقة بين هذه القيم والمساحة)

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	||		$+$		
$\ln x$	||		0		

إشارة $\ln(x)$: من جدول التغيرات لدينا:

أ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: * $\ln x = 0$ يعني $x = 1$.

* $\ln x > 0$ يعني $x > 1$.

* $\ln x < 0$ يعني $0 < x < 1$.

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1) $\ln a = \ln b$ يعني $a = b$.

2) $\ln a < \ln b$ يعني $a < b$.

مثال:

لدينا : $89.7 < 120.3$ معناه $\ln(89.7) < \ln(120.3)$.

مثال: حل في المجال: $]1;+\infty[$ المعادلة: $\ln(x-1) = 0$ والمتراجحة: $\ln(x-1) < 0$.

واجب منزلي:

حل في المجال: $]1;+\infty[$ المعادلة: $\ln(x^2-1) = \ln(x-5)$ والمتراجحة: $\ln(x^2-1) > \ln(x+5)$.

تمرن رقم 07 ص142.

* تقويم تحصيلي (15 د)

يتم التنويه إلى إشارة المقدار: $a\ln(x)+b$

الأستاذة : يماني ليلى

بطاقة رقم 02

*- المستـــــــــــوى: الثالثة تسيير واقتصاد. — *- ميدان التعلــــــــم : الدوال العددية

*-المكتسبـــات القبلية: *** تعريف وبعض خواص الدالة $\ln x$. — *- الموسم الدراسي : 2013/2012.

*- الكفاءات المستهدفة: *** تعريف و خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري. — *- الوسائل المستعملة:الكتاب المدرسي+المنهاج

*- المدة اللازمة للدرس: 01 ساعة

التقويـــم والمدة	الــــدرس	تطبيقات وتوجيهات

*** نشاط 03 : (نشاط 03 صفحة 129)

■ حل النشاط :

تقويم تشخيصي

1- لدينا: $a\times b=6610.74$ إذن : $\ln(a\times b)=\ln(6610.74)=$.

2- $\ln(a)=\ln(138.3)=$ و $\ln(b)=\ln(47.8)=$.

3- $\ln(a)+\ln(b)=$.

4- نستنتج: $\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\times b)$.

5- باستعمال نتيجة السابقة:بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a من المجال: $]0;+\infty[$ لدينا:

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$.

- $\ln(a^n)=n\ln(a)\,/\,\forall n\in\mathbb{Z}$.

- ومن أجل كل عددين a و b من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

الخواص الجبرية:

* تقويم تكويني

من أجل كل عددين حقيقين a و b من المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل عدد صحيح n لدينا:

1- $\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\times b)$.

2- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.

3- $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$.

4- $\ln(a^n)=n\ln(a)\,/\,\forall n\in\mathbb{Z}$.

5- $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$.

البرهان .... يقد البرهان على الخاصية الأساسية رقم(01).

أمثلة:

1- $\ln 14-\ln 7=\ln(7\times 2)-\ln(7)=\ln(7)+\ln(2)-\ln(7)=\ln(2)$.(بتطبيق الخاصية رقم (01)

2- $\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{2}{3}=\ln(3)-\ln(2)+\ln(2)-\ln(3)=0$ (بتطبيق الخاصية رقم 02)

3- $\ln\left(\frac{9}{4}\right)-\ln(81)+\ln(16)=\ln(9)-\ln(4)-2\ln(9)+2\ln(4)=-\ln(9)+\ln(4)=\ln(36)$ (باستعمال الخواص 1-2 و 4)

مثال 02:

* تقويم تكويني

- حل في المجال: $]3;+\infty[$ المعادلة: $2\ln(x-3)=\ln 4$

لاحظ انه من أجل كل x من المجال: $]3;+\infty[$: $x-3>0$ إذن: $2\ln(x-3)=\ln 4$ معناه:

* تقويم تحصيلي

$\ln(x-3)=\frac{1}{2}\ln 4$ ومنه: $\ln(x-3)=\ln 2$ بالتالي: $(x-3)=2$ ومنه: $x=5$ إذن: $S=\{5\}$.

- حل في $]1;+\infty[$ المتراجحة: $\ln(x-1)-\ln 3>\ln 2-\ln(x+4)$.

لاحظ انه من أجل كل x من المجال: $]1;+\infty[$: $x-1>0$ و $x+4>0$ وبالتالي:

تطبيقات وتوجيهات:

-ينبه التلميذ إلى صحة الخواص من اجل الاعداد الموجبة تماما فقط.

- ينبه التلميذ إلى المجموعة المرجعية لحل معادلة أو متراجحة.

-ينبه التلميذ غلى الأخطاء الشائعة المرتكبة في الخواص السابقة.

$\ln(x-1)-\ln 3>\ln 2-\ln(x+4)$ معناه: $\ln(x-1)+\ln(x+4)>\ln 2+\ln 3$ ومنه:

$\ln(x-1)(x+4)>\ln 6$ معناه: $(x-1)(x+4)>6$ أي: $(x^2-3x-10)>0$ ومنه: $\Delta=49$ إذن:

$x_1=-2$ و $x_2=5$ ومنه $S=]5;+\infty[$

تمرين رقم01:

- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$.
- حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة: $2\ln x\geq\ln(x+4)+\ln(2x)$.

بطاقة رقم 03

الأستاذة : يماني ليلى

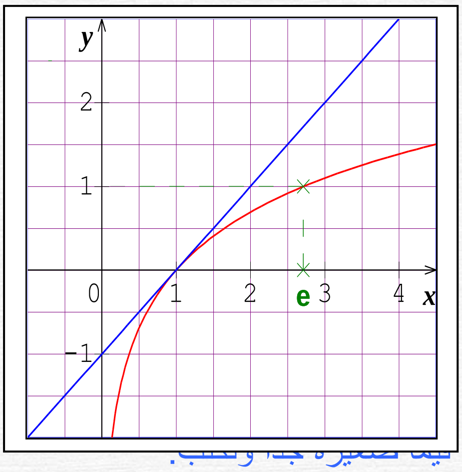
*- المستـــــــــوى: الثالثة تسيير واقتصاد.	*- ميدان التعلـــــــم : الدوال العددية
*-المكتسبـــات القبلية: *** تعريف وبعض خواص الدالة $\ln$.	*- الموسم الدراسي : 2013/2012.
*- الكفاءات المستهدفة: دراسة الدالة اللوغريتم النيبيري. .	*- الوسائل المستعملة:الكتاب المدرسي+المنهاج
*- المدة اللازمة للدرس: 01 ساعة	

التقويـم و المدة	الـــــدرس	تعليقات وتوجيهات

*** نشاط 03 :

تقويم تشخيصي

باستعمال راسم المنحنيات مثلنا في الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة $\ln : x \mapsto \ln(x)$



باستعمال التمثيل البياني:

- ماذا يمكن القول عن $\ln(x)$ لما يقترب x من 0 ؟
- خمن نهاية الدالة $\ln$ عند $+\infty$.
- عين معادل للمستقيم (Δ) ماذا يمثل؟
- شكل جدول تغيرات الدالة: $\ln : x \mapsto \ln(x)$.

حل النشاط :

1- كلما اقترب x من 0 بقيم أكبر، $\ln x$ يأخذ قيما صغيرة جدا وتكتب. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

2- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

3- معادلة للمستقيم (Δ): $(\Delta): y = x - 1$ والذي يمثل المماس عند النقطة التي فاصلتها 1.

* تقويم تكويني

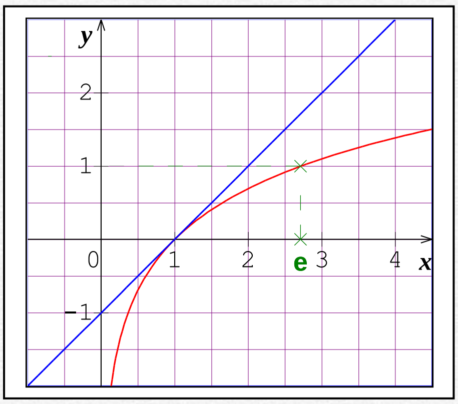
4- جدول التغيرات:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\frac{1}{x} > 0$ و منه الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$

المنحنى البياني:

ليكن (C) التمثيل البياني لدالة اللوغريتم النيبيري في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$



- المنحنى (C) الممثل للدالة اللوغاريتم النيبيري يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.
- لدينا $\ln'(1) = 1$ و $\ln 1 = 0$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta): y = x - 1$.

* تقويم تكويني

العدد e:

* تقويم

تحصيلي	**تعريف:** العدد e هو العدد الذي لوغاريتمه النيبيري يساوي 1. $(\ln e = 1)$. تعطينا الحاسبة $e \approx 2,718281828$. **خاصية:** من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $x = \ln(e^x)$. تمرين رقم 01: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2(\ln x)^2 - \ln x - 3$ $(\mathcal{C})$ هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$) 1) أ) حل المعادلة $f(x) = 0$ ب) ماذا تمثل هذه الحلول هندسيا؟. ج) حلل $f(x)$ الى جداء عوامل. 2) احسب نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $(\mathcal{C})$ ؟ 3) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها. 4) أنشئ للمنحني $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. توجيه: تمرين رقم 49 ص 145 من الكتاب المدرسي.	

الأستاذة : يماني ليلى

بطاقة رقم 04

*- المستـــــــــوى: الثالثة تسيير واقتصاد.	*- ميدان التعلــــــــم : الدوال العددية
*-المكتسبـــات القبلية: *** تعريف خواص الدالة ln .	*- الموسم الدراسي : 2013/2012.
*- الكفاءات المستهدفة: دراسة دالة $\ln\circ u$.	*- الوسائل المستعملة:الكتاب المدرسي+المنهاج
*- المدة اللازمة للدرس:3ساعات	

التقويـــم و المدة	الـــــــدرس	تطبيقات وتوجيهات
* تقويم تكويني	u دالة عددية معرفة وموجبة تماما وقابلة للإشتقاق على مجال I من IR الهدف:دراسة الدالة: $\ln\circ u$ مبر هنة: لدينا مايلي: -1 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ -2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ -3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ -4 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\ln(x)=0$. $(n\in IN^*)$ -5 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ -6 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$. تستعمل هذه النهايات الشهيرة لإزالة حالات عدم التعيين. أمثلة: -1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-1-2\ln(x)\right)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-1-2\ln(x)\right)$. -2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$. -3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\ln x-\frac{x^2}{2}\right)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x-\frac{x^2}{2}\right)$ نهايات الدالة $\ln\circ u$: يكفي تطبيق نهاية دالة مركبة كما يلي: $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\ln[u(x)]=+\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\ln[u(x)]=-\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n}=0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)]^n\ln[u(x)]=0$ $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1}=1$ $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)}=1$ هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أمثلة: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+2x\right)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln\left(x^2+2x\right)$	تبرهن لاحقا.

لمشتقة والدوال الأصلية:

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

- الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I ،

$(\ln\circ u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

- الدالة $x\mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

البرهان:

- يكفي تطبيق المبرهنة المتعلقة بمشتقة دالة مركبة.
- يكفي حساب مشتقة الدالة $x\mapsto \ln[u(x)]$.

أمثلة:

-1 $f(x)=\ln(x^2+1)$ ، $D_f=IR$. من أجل كل x من IR لدينا: $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

-2 $f(x)=(x+1)\ln(2x-1)-x$ ، $D_f=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ ، من أجل كل x من IR لدينا:

$f'(x)=1\times\ln(2x-1)+\left(\dfrac{2}{2x-1}\right)(x+1)-1$. إذن:

$f'(x)=\ln(2x-1)+\left(\dfrac{3}{2x-1}\right)$.

* **تقويم تحصيلي**

تمرين(01)

لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+1+2[\ln x-\ln(x-1)]$

نسمي $(\mathcal{C})$ إلى التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.الوحدة $1cm$

1.بين أنه من أجل كل $x\in]1;+\infty[$: $f(x)=x+1+2\ln\dfrac{x}{x-1}$

2.عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3.ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4.احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$. استنتج أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم Δ.

5. ارسم بعناية المنحني $(\mathcal{C})$.

تمرين (02): bac2010

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(\ln(x))^2+2\ln(x)-3$

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري)

1) أ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) حلّل $f(x)$ إلى جداء عاملين.

ج) حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $2\ln(x)+2\geq 0$

2) أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f.

3) بيّن أن المنحنى (c_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

تمرين 03 ba c 2010

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$f(x) = \ln(x+a) + b$ حيث: a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ln ثم ارسم (C) و (C_f).

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$

1) احسب $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) احسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ حلا وحيدا α.

تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2} ; 5\right]$ في المعلم السابق.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1 ; \alpha[$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1 ; \alpha[$.

تمرين04 Bac2012

مآخذ: