طرائـــــــق في الحساب

01.كيف نحسب باقي القسمة الإقليدية للعدد الصحيح a على العدد الصحيح غير المعدوم b ؟

طريقة:

نكتب العدد الصحيح a على الشكل $a=bq+r$ حيث $(q;r)\in\mathbb{Z}^2$ و $0\leq r<|b|$.

العدد الموجب r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

مثال 01 :

عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b في كل من الحالات التالية:

1) $a=57$ و $b=23$

2) $a=-147$ و $b=17$

3) $a=-439$ و $b=-107$

الحل :

1) لدينا $57=2\times23+11$ و $0\leq11<23$ وبالتالي 11 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 57 على العدد 23.

2) لدينا $-147=17\times(-9)+6$ و $0\leq6<17$ وبالتالي 6 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد -147 على العدد 17.

3) لدينا $-439=-107\times(5)+96$ و $0\leq96<|-107|$ أي $0\leq96<107$ وبالتالي 96 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد -439 على العدد -107.

مثال 02 :

a و n عددان طبيعيان بحيث $a=28n+123$.

- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 28 .
- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4

الحل :

- $a=28n+123$ على الشكل $a=qn+r$ ولكن $28<123$ وبالتالي لا يمكن أن يكون 123 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 28 .

نكتب a على الشكل الشكل $a=28q+r$ حيث و $0\leq r<28$.

لدينا $123=28\times4+11$. وبالتالي $a=28n+123=28n+28\times4+11=28(n+4)+11$ ومنه 11 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 28 .

- نكتب a على الشكل الشكل $a=4q+r$ حيث و $0\leq r<4$.

لدينا $123=4\times30+3$. وبالتالي $a=28n+123=28n+4\times30+3=4(7n+30)+3$ ومنه 3 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 .

مثال 03 :

n عددطبيعي . عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$.

الحل :

$7n+43=7(n+5)+8$ ونميز الحالات التالية:

- إذا كان $0\leq 8<n+5$ أي $n>3$ فإن باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 8 .

ندرس الحالات الباقية للعدد الطبيعي n وهي $n=3$ ، $n=2$ ، $n=1$ ، $n=0$.

- إذا كان $n=3$ فإن $7n+43=64$ و $n+5=8$ وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 0 .
- إذا كان $n=2$ فإن $7n+43=57$ و $n+5=7$ وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 1 .
- إذا كان $n=1$ فإن $7n+43=50$ و $n+5=6$ وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 2 .
- إذا كان $n=0$ فإن $7n+43=43$ و $n+5=5$ وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد $7n+43$ على $n+5$ هو 3 .

02.كيف نبين أن العدد الصحيح b يقسم العدد الصحيح a ؟

طريقة:

نبين أن $a=k\,b$ حيث k عدد صحيح.

ملاحظة :

العبارات التالية متكافئة : b يقسم a ، b قاسم لـ a ، a مضاعف لـ b .

مثال :

1) بين أن 7 يقسم 938 .

2) بين أن $n+2$ يقسم $3n^3+7n^2-3n-10$ حيث $n\in\mathbb{N}$.

3) عين قيم الأعداد الصحيحة n بحيث يكون العدد $\dfrac{3n+13}{n+1}$ عددا صحيحا.

الحل :

1) لدينا $938=7\times 134$ ومنه 7 يقسم 938 أي 938 مضاعف للعدد 7.

2) نبين أن $3n^3+7n^2-3n-10=k\,(n+2)$ حيث k عدد صحيح.

$3n^3+7n^2-3n-10$ من الدرجة الثالثة و $n+2$ من الدرجة الأولى فحتما يكون k من الدرجة الثانية. أي نعين الأعداد الصحيحة $a\,;b\,;c$ بحيث $3n^3+7n^2-3n-10=(n+2)(an^2+bn+c)$.

$3n^3+7n^2-3n-10=(n+2)(an^2+bn+c)$ تكافئ

$3n^3+7n^2-3n-10=an^3+(b+2a)n^2+(c+2b)n+2c$ بالمطابقة نجد $a=3$ و $b=1$ و $c=-5$

ومنه $3n^3+7n^2-3n-10=(n+2)(3n^2+n-5)$ وبالتالي $n+2$ يقسم $3n^3+7n^2-3n-10$.

ملاحظة : يمكن استعمال القسمة الإقليدية للعدد $3n^3+7n^2-3n-10$ على العدد $n+2$ فنحصل على حاصل القسمة هو $3n^2+n-5$ وباقي هذه القسمة معدوم.

3) لدينا $\frac{3n+13}{n+1}=\frac{3n+3+10}{n+1}=3+\frac{10}{n+1}$. يكون العدد $\frac{3n+13}{n+1}$ عددا صحيحا إذا وفقط إذا كان $n+1$ قاسما للعدد 10 .

$(n+1)\in\{-10;-5;-2;-1;1;2;5;10\}$ ومنه $n\in\{-11;-6;-3;-2;0;1;4;9\}$.

03.كيف نبين أنه إذا كان d يقسم a و b فإن d يقسم c ؟

طريقة:

نكتب العدد الصحيح c على شكل عبارة خطية أي $c=\alpha a+\beta b$ حيث α و β عددان صحيحان.

مثال01 :

n و d عددان طبيعيان. نضع $a=7n-4$ و $b=5n+2$. بين أنه إذا كان d يقسم a و b فإن d يقسم 34 .

الحل:

نجد العددين الصحيحين α و β بحيث $\alpha a+\beta b=34$

$\alpha a+\beta b=34$ تكافئ $\alpha(7n-4)+\beta(5n+2)=34$ تكافئ $(7\alpha+5\beta)n+(-4\alpha+2\beta)=34$

بالمطابقة نجد $\alpha=-5$ و $\beta=7$.

أو بطريقة أخرى :

إذا كان d يقسم $7n-4$ و يقسم $5n+2$ فإن d يقسم $5\times(7n-4)$ و يقسم $7\times(5n+2)$ فهو يقسم الفرق بينهما أي $(35n+14)-(35n-20)=34$.

مثال02 :

n عدد صحيح. بين أنه إذا كان $n+3$ يقسم $3n+19$ فإن $n+3$ يقسم 10 .

الحل :

بما أن $n+3$ يقسم $3n+19$ و $n+3$ فإن $n+3$ يقسم كل عبارة خطية لـ $3n+19$ و $n+3$.

$n+3$ يقسم $(3n+19)-3\times(n+3)$ أي يقسم 10 .

أو بطريقة أخرى : $\frac{3n+19}{n+3}=3+\frac{10}{n+3}$.

بما أن $n+3$ يقسم $3n+19$ فإن $n+3$ يقسم 10.

مثال03 :

n عدد صحيح. عين قيم العدد الصحيح n بحيث $n+1$ يقسم $3n+15$.

الحل :

لدينا $\frac{3n+15}{n+1}=\frac{3n+3+12}{n+1}=3+\frac{12}{n+1}$. $n+1$ يقسم العدد $\frac{3n+15}{n+1}$ معناه $n+1$ يقسم العدد 12 .

$(n+1)\in\{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$

ومنه $n\in\{-13;-7;-5;-4;-3;-2;0;1;2;3;5;11\}$.

04.كيف نجدعدد قواسم عدد طبيعي N ؟

طريقة:

نحلل N إلى جداء عوامله الأولية مثلا على الشكل $N=a^{\alpha}\times b^{\beta}\times c^{\gamma}$ فيكون عدد قواسم N هو $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$.

مثال:

أوجد عدد القواسم الطبيعية لكل من 72 و 180 .

الحل :

$72=2^3\times3^2$ ومنه عدد قواسم 72 هو $(3+1)(2+1)=12$.

$180=2^2\times3^2\times5$ ومنه عدد قواسم 108 هو $(2+1)(2+1)(1+1)=18$.

05.كيف نجد مجموعة القواسم الطبيعية للعدد الطبيعي N ؟

طريقة01:

- نحلل N إلى جداء عوامله الأولية .
- نستعمل شجرة مختلف الحالات الممكنة.

مثال01:

أوجد جميع القواسم الطبيعية للعدد 147 .

الحل :

$147=3\times7^2$

3^0
- $7^0 \longrightarrow 1\times1=1$
- $7^1 \longrightarrow 1\times7=7$
- $7^2 \longrightarrow 1\times7^2=49$

3^1
- $7^0 \longrightarrow 3\times1=3$
- $7^1 \longrightarrow 3\times7=21$
- 7^2 $3\times49=147$

يكون عدد قواسم 147 هو $(1+1)(2+1)=6$

إذن مجموعة قواسم العدد 147 هي $D_{147}=\{1;3;7;21;49;147\}$.

طريقة 02 :

نحلل إلى جداء عوامله الأولية : $147=3\times7^2$

نكتب : $\begin{vmatrix} 3^0 & , & 3^1 \\ 7^0 & , & 7^1 & , & 7^2 \end{vmatrix}$ أي $\begin{vmatrix} 1 & , & 3 \\ 1 & , & 7 & , & 49 \end{vmatrix}$ نضرب كل عدد من السطر الثاني في كل عددمن السطر الأول

فنجد مجموعة قواسم 147 وهي : $D_{147} = \{1 ; 3 ; 7 ; 21 ; 49 ; 147\}$.

مثال02 : أوجد عدد ومجموعة قواسم العدد 200 .

الحل :

نحلل 200 إلى جداء عوامله الأولية فنجد $200 = 2^3 \times 5^2$

$(3+1)(2+1) = 12$ ومنه عدد قواسم 200 هو 12.

الآن نجد مجموعة هذه القواسم نكتب : $\begin{vmatrix} 2^0 & , & 2^1 & , & 2^2 & , & 2^3 \\ 5^0 & , & 5^1 & , & 5^2 \end{vmatrix}$ أي $\begin{vmatrix} 1 & , & 2 & , & 4 & , & 8 \\ 1 & , & 5 & , & 25 \end{vmatrix}$ نضرب كل عدد من السطر الثاني في السطر الأول فنجد مجموعة قواسم 200 وهي :

$D_{200} = \{1 , 2 , 4 , 8 , 5 , 10 , 20 , 40 , 25 , 50 , 100 , 200\}$.

06.كيف نتحقق من أن العدد n إن كان أوليا أم لا؟

طريقة:

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 أوّليا أم لا . نحسب $\sqrt{n}$.

- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .

أ) إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف و نقرّ أنّ n غير أولي .

ب) إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أنّ n أولي .

مثال :

هل الأعداد التالية أولية 169 ، 143 ، 269 ؟

- بالنسبة للعدد 169 : لدينا $\sqrt{169} = 13$ وهو عدد طبيعي أي 169 مربع تام وبالتالي 169 غير أولي.
- بالنسبة للعدد 143 : لدينا $\sqrt{143} = 11,958$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 143 على الأعداد الأولية الأصغر من 11,958 وهي: 2 , 3 , 5 , 7, 11 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	143
2	71	1	لا يقبل القسمة على 2
3	47	1	لا يقبل القسمة على 3
5	28	3	لا يقبل القسمة على 5
7	20	3	لا يقبل القسمة على 7
11	13	0 نتوقف	يقبل القسمة على 11

أحد البواقي معدوم نتوقف من عملية القسمة ونقرّ بأن العدد 143 غير أولي.

- بالنسبة للعدد 269 : لدينا $\sqrt{269}=16,401$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 269 على الأعداد الأولية الأصغر من 16,401 وهي : 2 , 3 , 5 , 7 , 11, 13 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	269
2	134	1	لا يقبل القسمة على 2
3	89	2	لا يقبل القسمة على 3
5	53	4	لا يقبل القسمة على 5
7	38	3	لا يقبل القسمة على 7
11	24	5	لا يقبل القسمة على 11
13	20	9 نتوقف	لا يقبل القسمة على 13

كل البواقي غير معدومة نتوقف من عملية القسمة ونقرّ بأن العدد 269 أولي.

07.كيف نحسب $PGCD(a\,;b)$ ؟

طريقة01:

نحلل العددين a و b إلى جداء عواملهما الأولية.

$PGCD(a\,;b)$ هو جداء العوامل المشتركة وبأصغر أس.

طريقة02:

$PGCD(a\,;b)$ هو هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

مثال :

أوجد $PGCD(315\,;117)$.

الحل :

الطريقة01:

$315=3^2\times5\times7$ و $117=3^2\times13$ وبالتالي $PGCD(315\,;117)=3^2=9$

الطريقة02:

الحاصل		2	1	2	4
المقسوم و القاسم	315	117	81	36	9
الباقي		81	36	9	0

إذن $PGCD\ 315;117 = 9$.

08.كيف نحسب $PGCD(an+b\ ;\ cn+d)$ ؟

طريقة:

نطبق : إذا كان d يقسم عددين A و B فإن d يقسم كل عبارة خطية لهذين العددين ثم نستنتج قيمة أو قيم d .

مثال01 :

من أجل كل عدد طبيعي n . عين $PGCD(n+5\ ;\ 3n+14)$.

الحل:

نضع $d = PGCD(n+5\ ;\ 3n+14)$.

بما أن d يقسم $3n+14$ و $n+5$ فإن d يقسم أي عبارة خطية لهما، نختارمعاملين بحيث لاتظهر n : d يقسم $3(n+5)-(3n+14) = -3n+15-3n-14 = 1$

$d = PGCD(n+5\ ;\ 3n+14) = 1$

مثال02 :

من أجل كل عدد طبيعي n عين $PGCD(2n+5\ ;\ 3n+1)$.

الحل:

نضع $d = PGCD(2n+5\ ;\ 3n+1)$.

بما أن d يقسم $2n+5$ و $3n+1$ فإن d يقسم أي عبارة خطية لهما، نختارمعاملين بحيث لاتظهر n : d يقسم $-2(3n+1)+3(2n+5) = -6n-2+6n+15 = 13$

$PGCD(2n+5\ ;\ 3n+1) = 1$ أو $PGCD(2n+5\ ;\ 3n+1) = 13$.

09.كيف نبين أن العددين a و b أوليان فيما بينهما ؟

طريقة01:

نبين أن $PGCD(a\ ;b) = 1$.

طريقة02:

نستعمل مبرهنة بيزو: نعين عددين صحيحين u و v بحيث $u\,a + v\,b = 1$.

مثال :

1) بين أن العددين 143 و 136 أوليان فيما بينهما.

2) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن العددين $9n+13$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما.

الحل :

1) لدينا $143 = 11\times 13$ و $136 = 8\times 17$ وبالتالي $PGCD(136\,;143)=1$ ومنه 143 و 136 أوليان فيما بينهما.

2) لدينا $9\times(2n+3)-2(9n+13)=1$ فحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $9n+13$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما.

10.كيف نجد مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين a و b ؟

طريقة:

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

مثال :

أوجد مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 448 و 308

الحل :

نبحث أولا عن $PGCD(308\,;448)$

الحاصل		1	2	5
المقسوم و القاسم	448	308	140	28
الباقي		140	28	0

إذن $PGCD(308\,;448)=28$ ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 448 و 308 هي مجموعة قواسم 28 أي $D_{308}\cap D_{448}=\{1\,;2\,;4\,;7\,;14\,;28\}$.

11.كيف نحسب $PPCM\ (a\,;b)$ ؟

طريقة01:

نحلل العددين a و b إلى جداء عواملهما الأولية.

$PPCM\ (a\,;b)$ هو جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة في تحليلي a و b مع أخذ كل عامل مرة واحدة وبأكبر أس.

طريقة02:

$$PPCM\ (a\,;b)=\frac{a\times b}{PGCD\,(a\,;b)}\ .$$

مثال :

أوجد $PPCM\ (24;42)$.

الحل :

الطريقة01:

$24=2^3\times 3$ و $42=2\times 3\times 7$ وبالتالي $PPCM\ (24;42)=2^3\times 3\times 7=168$

الطريقة02:

$24 = 2^3 \times 3$ و $42 = 2 \times 3 \times 7$ وبالتالي $PGCD(24;42) = 2 \times 3 = 6$ $PPCM(24\,;4) = \frac{24 \times 42}{6} = 168$

12.كيف نبين ان المعادلة $ax + by = c$ تقبل في $\mathbb{Z}^2$ حلولا أم لا؟

طريقة:

- نعين $d = PGCD(a;b)$.
- إذا كان d يقسم c فإن المعادلة تقبل حلولا وإلا لا تقبل حلولا.

مثال :

تحقق إن كانت المعادلات التالية تقبل حلولا أم لا في $\mathbb{Z}^2$:

1) $6x + 8y = 11$.

2) $24x - 18x = 30$.

3) $8x - 5y = 1$.

الحل:

1) $PGCD(6\,;8) = 2$ و 2 لا يقسم 11 وبالتالي المعادلة $6x + 8y = 11$ لاتقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

2) $PGCD(24\,;-18) = PGCD(24\,;18) = 6$ و بما أن 6 يقسم 30 وبالتالي المعادلة $24x - 18x = 30$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

3) $PGCD(8\,;-5) = PGCD(8;5) = 1$ وبالتالي المعادلة $8x - 5x = 1$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

13.كيف نجد حلا خاصا للمعادلة $ax + by = c$ ؟

طريقة01:

- نختزل ونبسط المعادلة إن أمكن ذلك.
- نعين حلا بسيطا بالمحاولة .

مثال :

عين حلا في $\mathbb{Z}^2$ للمعادلتين:

1) $3x - 2y = 1$.   2) $16x - 24y = 8$

الحل :

1) ببساطة وبوضوح نلاحظ أن $(1;1)$ هو حلا للمعادلة $3x - 2y = 1$.

2) نختزل المعادلة $16x - 24y = 8$ فنجد $2x - 3y = 1$ ومنه $(2;1)$ هو حلا للمعادلة $16x - 24y = 8$

طريقة02:

- نختزل ونبسط المعادلة إن أمكن ذلك.
- نجدحلا $(x_0\,; y_0)$ للمعادلة $ax + by = 1$ لذلك نعين مضاعفين للعددين a و b يكون الفرق بينهما 1
.

- أحد حلول المعادلة $ax+by=c$ هو $(cx_0\,;cy_0)$.

مثال:

1) عين حلا $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة $8x-5y=1$ واستنتج حلا للمعادلة $8x-5y=3$.

2) عين حلا للمعادلة $7x-2y=13$

الحل :

1)نجد مضاعفا للعدد 8 ومضاعفا للعدد 5 الفرق بينهما واحد . نختار مثلا 16 و 15 .

$8\times(2)-5\times(3)=1$ أي $(2\,;3)$ حلا للمعادلة $8x-5y=1$ وبالتالي $(6\,;9)$ حلا للمعادلة $8x-5y=3$.

2) نجد أولا حلا للمعادلة $7x-2y=1$. نجد مضاعفا للعدد 7 ومضاعفا للعدد 2 الفرق بينهما واحد .

نختار مثلا 21 و 20 ، فيكون $7\times(3)-2\times(10)=1$ أي $(3\,;10)$ حلا للمعادلة $7x-2y=1$

وبالتالي $(6\times13\,;9\times13)$ أي $(78\,;117)$ هو حلا للمعادلة $7x-2y=13$.

طريقة03:

نستعمل مراحل خوارزمية إقليدس من الأسفل إلى الأعلى في إيجاد $PGCD\,(a\,;b)$.

مثال :

أوجد عددين صحيحين a و b بحيث $25872a+484b=44$

الحل :

نبحث عن $PGCD\,(25872\,,\,484)$:

لدينا: $25872=484\times53+\mathbf{220}$

$484=220\times2+\mathbf{44}$

$220=44\times5+\mathbf{0}$ ومنه $PGCD\,(25872\,;\,484)=44$

لدينا $44=484-2\times220$

$44=484-2\times(25872-484\times53)$

$44=484\times(1+2\times53)+25872\times(-2)$

$44=25872\times(\mathbf{-2})+484\times(\mathbf{107})$ ومنه $(a\,;b)=(-2\,;107)$.

14.كيف نجد حلول المعادلة $ax+by=c$ ؟

طريقة:

- نجد حلا خاصا للمعادلة $ax+by=c$.
- نطبق مبرهنة غوص : إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

مثال01 :

لتكن المعادلة $7x-5y=1.......(E)$ ذات المجهولين x و y.

1) تحقق من أن الثنائية $(3,4)$ هي حلا خاصا للمعادلة (E) .

2) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E).

الحل :

1) نضع $(x_0, y_0) = (3,4)$. نلاحظ $7(3)-5(4)=21-20=1$ ومنه الثنائية $(3,4)$ هي حلا خاصا للمعادلة (E) .

2) لدينا $7x-5y=1$ و $7x_0-5y_0=1$ ومنه $7x-5y=7x_0-5y_0$ تكافئ $7(x-x_0)=5(y-y_0)$ أي $7(x-3)=5(y-4)$

لدينا 5 يقسم $5(y-4)$ ومنه 5 يقسم $7(x-3)$ و بما أن 5 أولي مع 7 فإن 5 يقسم $x-3$ أي $x-3=5k$ ومنه $x=3+5k$ حيث k عدد صحيح .

نعوض في المعادلة $7x-5y=1$ بقيمة $x=3+5k$ فنجد $7(3+5k)-5y=1$ ومنه $y=4+7k$

حلول المعادلة $7x-5y=1$ هي الثنائيات من الشكل $(3+5k, 4+7k)$ حيث k عدد صحيح .

مثال 02 :

1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180 .

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $225x-180y=90$ .... (1) .

3) من بين حلول المعادلة (1) عين التي تحقق $|x-y+1|<2$.

الحل :

1) لدينا $225=3^2\times 5^2$ و $180=2^2\times 3^2\times 5$ ومنه $PGCD(225;180)=45$.

2) $225x-180y=90$ تكافئ $5x-4y=2$. نلاحظ بسهولة أن الثنائية $(2;2)$ حلا خاصا لها وبالتالي $5x-4y=2$ تكافئ $5(x-2)=4(y-2)$ وباستعمال مبرهنة غوص :

لدينا 4 يقسم $4(y-2)$ ومنه 4 يقسم $5(x-2)$ و بما أن 5 أولي مع 4 فإن 4 يقسم $x-2$ أي $x-2=4k$ ومنه $x=2+4k$ حيث k عدد صحيح .

نعوض في المعادلة $5x-4y=2$ بقيمة $x=2+4k$ فنجد $5(2+4k)-4y=2$ ومنه $y=2+5k$

حلول المعادلة $225x-180y=90$ هي الثنائيات من الشكل $(2+4k , 2+5k)$ حيث k عدد صحيح .

3) $|x-y+1|<2$ تكافئ $-2<x-y+1<2$ تكافئ $-2<(2+4k)-(2+5k)+1<2$

أي $-2<-k+1<2$ ومنه $-3<-k<1$ أي $-1<k<3$ وبالتالي $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$.

- من أجل $k=0$ نجد $x=2$ و $y=2$.
- من أجل $k=1$ نجد $x=6$ و $y=7$
- من أجل $k=2$ نجد $x=10$ و $y=12$

وأخيرا الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ التي تحقق $\begin{cases}|x-y+1|<2\\225x-180y=90\end{cases}$ هي $\{(2;2),(6;7);(10;12)\}$

15.كيف نجد b بحيث $a\equiv b[n]$ ؟

طريقة:

$a\equiv b[n]$ تكافئ $a=b+kn$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي $b=a-kn$

مثال:

عين 3 أعداد صحيحة b بحيث $12 \equiv b[7]$

الحل:

1) $12 \equiv b[7]$ تكافئ $b = 12 - 7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. بإعطاء قيم مختلفة لـ k نحصل على قيم b من

أجل $k = -3$ نحصل على $b = 12 - 7 \times (-3) = 33$.

من أجل من أجل $k = 0$ نحصل على $b = 12 - 7 \times (0) = 12$.

من أجل ل $k = 5$ نحصل على $b = 12 - 7 \times (5) = -23$.

16.كيف نبين أن $a \equiv b[n]$ ؟

طريقة:

نبين ان $a - b$ يقبل القسمة على n أي n قاسم لـ $a - b$.

مثال 01:

1) بين أن $13 \equiv -12[5]$.

2) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n + 3 \equiv 5[11]$.

3) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n \equiv 2[5]$.

الحل :

1) نبين أن $13 \equiv -12[7]$. بما أن $13 - (-12) = 25$ وهو مضاعف لـ 5 إذن $13 \equiv -12[7]$.

2) $n + 3 \equiv 5[11]$ تكافئ $n + 3 - 5 \equiv 5 - 5[11]$ أي $n - 2 \equiv 0[11]$ ومنه $n \equiv 2[11]$.

إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n + 3 \equiv 5[11]$ هي من الشكل $n = 2 + 11k$ حيث k عدد صحيح.

3) لدينا $3n \equiv 2[5]$ و $2 \equiv 2[5]$ فحسب خواص الموافقات فإن $2 \times 3n \equiv 2 \times 2[5]$ أي $6n \equiv 4[5]$ ومنه $n \equiv 4[5]$ إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n \equiv 2[5]$ هي من الشكل $n = 4 + 5k$ حيث k عدد صحيح.

ملاحظة : يمكن استعمال الجدول :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$3n \equiv$	0	3	1	4	2	$[5]$

17.كيف نحسب c بحيث $a^n \equiv c[b]$ ؟

طريقة:

- نستعمل خواص الموافقات وخاصة : إذا كان $a \equiv b[n]$ و $a' \equiv b'[n]$ فإن $a^k \equiv b^k[n]$ و $aa' \equiv bb'[n]$. لإيجاد عدد صحيح k بحيث $a^k \equiv 1[b]$ و $a^k \equiv -1[b]$.
- نعبر عن n بدلالة k أي $n = pk + r$.
- نعوض n بـ $n = pk + r$ لنكمل الحساب.

مثال :

1) عين a بحيث $15^{123} \equiv a[7]$.

2) عين b بحيث $3^{2015} \equiv b[10]$.

3) عين c بحيث $5^{1433} \equiv c[11]$.

الحل :

1) لدينا $15 \equiv 1[7]$ ومنه $15^{123} \equiv 1^{123}[7]$ أي $15^{123} \equiv 1[7]$ ومنه $a=1$.

2) لدينا $3^2 \equiv 9[10]$ أي $3^2 \equiv 10-1[10]$ أي $3^2 \equiv -1[10]$. ولدينا $2015=2\times1007+1$ ومنه $3^{2015}=3^{2\times1007+1}=\left(3^2\right)^{1007}\times3^1$ وبالتالي $3^{2015} \equiv \left(3^2\right)^{1007}\times3[10]$ أي $3^{2015} \equiv (-1)^{1007}\times3[10]$ وبالتالي $3^{2015} \equiv -3[10]$ ومنه $b=-3$.

3)

$5 \equiv 5[11]$, $5^2 \equiv 3[11]$, $5^3 \equiv 4[11]$, $5^4 \equiv 9[11]$, $5^5 \equiv 1[11]$.

نقسم الأس 1433 على 5 فنجد $1433=5\times286+3$ ومنه $5^{1433}=5^{5\times286+3}=\left(5^5\right)^{286}\times5^3$ وبالتالي $5^{1433} \equiv \left(5^5\right)^{286}\times5^3[11]$ أي $5^{1433} \equiv (1)^{286}\times4[11]$ وأخيرا $5^{1433} \equiv 4[11]$ ومنه $c=4$.

18.كيف نستعمل الموافقات لتعيين باقي القسمة الإقليدية لـ a على b ؟

طريقة:

- نجد r بحيث $a \equiv r[b]$ مع $0 \le r < b$. باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b هو r.

مثال :

1) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 22^{123} على 7 .

2) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 10^{101} على 11 .

الحل :

1) لدينا $22 \equiv 1[7]$ ومنه $22^{123} \equiv 1^{123}[7]$ أي $22^{123} \equiv 1[7]$ ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد 22^{123} على 7 هو 1 .

2) لدينا $10 \equiv 10[11]$ أي $10 \equiv 11-1[11]$ أي $10 \equiv -1[11]$. ومنه وبالتالي $10^{101} \equiv (-1)^{101}[11]$ أي $10^{101} \equiv -1[11]$ ولكن $-1 \equiv 10[11]$ وبالتالي $10^{101} \equiv 10[11]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد 10^{101} على 11 هو 10 .

19.كيف نعين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لـ a^n على b ؟

طريقة:

من أجل $n=0\,;1;\,2\,;......$ نحسب $a^n \equiv r[b]$ مع $0 \le r < b$ حتى نصل إلى $a^p \equiv 1[b]$ فتشكل الموافقة متتالية دورية ودورها p ثم نستعمل الخواص لحساب r .

مثال :

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7 .

2) استنتج باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

الحل :

أ) $5^6 \equiv 1[7]$, $5^5 \equiv 3[7]$, $5^4 \equiv 2[7]$, $5^3 \equiv 6[7]$, $5^2 \equiv 4[7]$, $5 \equiv 5[7]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 6 . نقسم الأس n على الدور 6 فنجد $n = 6k + r$ حيث $0 \le r < 6$ و k عددا طبيعيا

من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي :

إذا كان $r =$	فإن $n = 6k + r$	وبالتالي باقي قسمة العدد 5^n على 7 هو
0	$n = 6k$	1
1	$n = 6k + 1$	5
2	$n = 6k + 2$	4
3	$n = 6k + 3$	6
4	$n = 6k + 4$	2
5	$n = 6k + 5$	3

ب) باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

نقسم الأس 2013 على الدور 6 فنجد $2013 = 6 \times 335 + \underline{3}$ من الشكل $6k + 3$ وبالتالي من الجدول السابق مباشرة نجد $5^{2013} \equiv 6[7]$.

20.كيف نبين أن a يقبل القسمة على b باستعمال الموافقات ؟

طريقة:

- نبين أن $a \equiv 0[b]$.

مثال 01:

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3^{2n} - 2^n$ يقبل القسمة على 7 .

الحل :

نبين أن $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$.

لدينا $3^{2n} = 9^n$ ومنه $3^{2n} \equiv 2^n[7]$ وبالتالي $3^{2n} - 2^n \equiv 2^n - 2^n[7]$ أي $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$.

مثال 02:

بين أنه من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5

الحل :

$n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5 معناه $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$. نستعمل الجدول التالي :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$n^4 - 1 \equiv$	-1	0	0	0	0	$[5]$
$n(n^4 - 1) \equiv$	0	0	0	0	0	$[5]$

إذن من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 5 .

21.كيف نحل معادلة معطاة بالموافقات ؟

طريقة01:

المعادلات من الشكل $ax \equiv b[n]$ مع a و n ليسا زوجيان معا.

- نحاول إن أمكن التخلص من معامل المجهول x .
- نجد k بحيث $ka \equiv 1[n]$ أو $ka \equiv -1[n]$.
- نضرب طرفي المعادلة في k .
- نعوض ka بـ 1 أو بـ-1 لنجد x .

مثال:

حل في $\mathbb{Z}$ المعادلات التالية ذات المجهول x :

1) $8x \equiv 3[7]$ ، 2) $4x \equiv 3[5]$ ، 3) $9x \equiv -4[11]$.

الحل :

1) $8x \equiv 3[7]$ 8 و 7 ليسا زوجيان معا وبالتالي نحاول التخلص من معامل x أي من 8 .
لدينا $8 \equiv 1[7]$ ومنه $8x \equiv 3[7]$ تكافئ $x \equiv 3[7]$. إذن حلول المعادلة $8x \equiv 3[7]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv 3[7]$.

2) $4x \equiv 3[5]$ 4 و 5 ليسا زوجيان معا وبالتالي نحاول التخلص من معامل x أي من 4 .
لدينا $4 \equiv -1[5]$ ومنه $4x \equiv 3[5]$ تكافئ $-x \equiv 3[5]$ أي $x \equiv -3[5]$. إذن حلول المعادلة $4x \equiv 3[5]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv -3[5]$.

3) $9x \equiv -4[11]$ 9 و 11 ليسا زوجيان معا وبالتالي نحاول التخلص من معامل x أي من 9 .
نلاحظ أن $5 \times 9 \equiv 1[11]$ ومنه $5 \times 9x \equiv 5 \times -4[11]$ أي $45x \equiv -20[11]$ تكافئ $x \equiv -9[11]$.
إذن حلول المعادلة $45x \equiv -20[11]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv -9[11]$.

طريقة02: المعادلات من الشكل $ax \equiv b[n]$ مع a و n زوجيان معا.

في هذه الحالة لا يمكن إيجاد k بحيث $ka \equiv 1[n]$ أو $ka \equiv -1[n]$.

نستعمل جدول الموافقات بترديد n .

مثال 01:

حل في $\mathbb{Z}$ المعادلتين التاليتين ذات المجهول x :

1) $4x \equiv 2[6]$ ، 2) $6x \equiv 1[4]$.

الحل :

1) $4x \equiv 2[6]$

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$4x \equiv$	0	4	2	0	4	2	$[6]$

إذن حلول المعادلة $4x \equiv 2[6]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv 2[6]$ أو $x \equiv 5[6]$.

2) $6x \equiv 1[4]$

$x \equiv$	0	1	2	3	$[4]$
$6x \equiv$	0	2	0	2	$[4]$

إذن المعادلة $6x \equiv 1[4]$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$.

مثال 02:

حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة التالية ذات المجهول x : $x^2 - 3x \equiv 4[5]$

الحل :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$x^2 \equiv$	0	1	4	4	1	$[5]$
$3x \equiv$	0	3	1	4	2	$[5]$
$x^2+3x \equiv$	0	4	0	3	3	$[5]$

إذن حلول المعادلة $x^2 - 3x \equiv 4[5]$ هي الأعداد الصحيحة x بحيث $x \equiv 4[5]$.

22.كيف نحل جملة معادلتين من الشكل $\begin{cases} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[m] \end{cases}$ ؟

طريقة01:

نكتب الجملة على شكل معادلة من الشكل $ax + by = c$ ثم نحل هذه المعادلة في $\mathbb{Z}$.

مثال :

حل في $\mathbb{Z}$ الجملة التالية $\begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$.

الحل :

$x \equiv 1[4]$ معناه يوجد عدد صحيح a بحيث $x = 1+4a$ و $x \equiv 2[3]$ معناه يوجد عدد صحيح b بحيث $x = 2+3b$.

$\begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$ تكافئ $1+4a = 2+3b$ أي $4a - 3b = 1$.

نجد حلا خاصا للمعادلة $4a - 3b = 1$ وليكن $(1\,;1)$ ثم نحل المعادلة فنجد $a = 1+3k$ و $b = 1+4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

نعوض a و b في $x = 1+4a$ و $x = 2+3b$ فنجد $x = 5+12k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ أي $x \equiv 5[12]$.

طريقة02:

نكتب المعادلتين بنفس الترديد .

مثال :

حل في $\mathbb{Z}$ الجملة التالية $\begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$.

الحل :

$\begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$ نكتبها على الشكل $\begin{cases} 3x \equiv 3[12] \\ 4x \equiv 8[12] \end{cases}$ بالطرح نجد $(4x-3x) \equiv (8-3)[12]$ أي $x \equiv 5[12]$.

23. كيف نكتب عددا طبيعيا a في النظام ذي الأساس x؟

طريقة:

xعدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1.

1) إذا كان $a<x$ ، a يمثل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $a \geq x$ ، ننشر a بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$a = q x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + ... + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$ حيث

$0<q<x$ و $0 \leq r_\alpha < x$ مع $\alpha \in \{0;1;2;.....;n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{q\, r_{n-1} r_{n-2} ... r_1 r_0}$ في النظام ذي الأساس x.

إذا كان $x=10$ نكتب : $a = q\, r_{n-1} r_{n-2} ... r_1 r_0$

مثال 01

aعدد طبيعي يكتب $\overline{235}$ في النظام ذي الأساس 8 . أكتب a في النظام العشري .

الحل :

$a = 2\times 8^2 + 3\times 8 + 5 = 157$ و منه a يكتب 157 في النظام العشري .

مثال 02

aعدد طبيعي يكتب 1324 في النظام ذي الأساس 10 . أكتب a في النظام ذي الأساس 7 .

الحل :

$$\begin{aligned} 1324 &= 7\times 189 + \underline{1} \\ 189 &= 7\times 27 + \underline{0} \\ 27 &= 7\times 3 + \underline{6} \\ 3 &= 7\times 0 + \underline{3} \end{aligned}$$

و منه a يكتب $\overline{3601}$ في النظام ذي الأساس 7.

مثال 03

a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}$ في النظام ذي الأساس 8. أكتب a في النظام ذي الأساس 2 .

الحل:

نكتب في a في النظام العشري ثم ننتقل الى النظام ذي الأساس 8.

- $a = 6\times 8^2 + 4\times 8 + 3 = 419$ و منه a يكتب 419 في النظام العشري .

$419 = 1\times 2^8 + 1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2 + 1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

الدرس مع أمثلة محلولة

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1) تعريف

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. نقول أن العدد a يقسم العدد b إذا وجد عدد صحيح k بحيث : $b=ka$. نقول a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a.

العبارات التالية متكافئة :

- العدد a يقسم العدد b
- العدد a قاسم للعدد b
- العدد b يقبل القسمة على العدد a
- العدد b مضاعف للعدد a

مثال :

العبارات متكافئة	$8\times9=72$	$56=-7\times-8$	$-42=6\times-7$
	$9\mid72$	$-7\mid56$	$6\mid-42$
	$8\mid72$	$-8\mid56$	$-7\mid-42$
	72 يقبل القسمة على 9	56 يقبل القسمة على -7	-42 يقبل القسمة على 6
	72 يقبل القسمة على 8	56 يقبل القسمة على -8	-42 يقبل القسمة على -7
	72 مضاعف للعدد 9	56 مضاعف للعدد -7	-42 مضاعف للعدد 6
	72 مضاعف للعدد 8	56 مضاعف للعدد -8	-42 مضاعف للعدد -7

ملاحظة:

في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $-a$ نفس القواسم .

مثال :

قواسم 12 الطبيعية (في $\mathbb{N}$) هي $\{1,2,3,4,6,12\}$

قواسم 12 الصحيحة (في $\mathbb{Z}$) هي $\{-12,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,12\}$ وهي نفسها قواسم -12 .

2) خواص

خاصية1: a , b , c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

مثال :

$3\mid6$ و $6\mid12$ فإن $3\mid12$

خاصية2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح k ، a يقسم kb

مثال :

$3|6$ فإن : $3|6\times5$ ، $3|6\times7$ ، $3|6\times2013$ ، $3|6\times k$

خاصية3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم k ، ka يقسم kb

مثال: $3|6$ فإن : $3\times5|6\times5$ ، $3\times7|6\times7$ ، $3\times2013|6\times2013$ ، $3\times k|6\times k$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة $(q\ ,r)$ من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0\le r<b$.

تسمى عملية البحث عن الثنائية $(q\ ,r)$ بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي

القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

مثال 01: عين حاصل وباقي قسمة العدد الصحيح a على العدد الطبيعي غير المعدوم b في كل من الحالات :

1) $a=72$ ، $b=7$ 2) $a=-58$ ، $b=7$ 3) $a=-105$ ، $b=11$

الحل :

1) $72=7\times10+2$ الباقي هو 2 وحاصل القسمة هو 10 .

2) $-58=7\times(-9)+5$ الباقي هو 5 وحاصل القسمة هو -9 .

3) $-105=9\times(-12)+3$ الباقي هو 3 وحاصل القسمة هو -12.

مثال 02 :

عين كل الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها حاصل القسمة الإقليدية لـ n على 5 يساوي باقي هذه القسمة.

الحل :

$n=5q+q$ و $0\le q<5$ أي $n=6q$.

بما أن $0\le q<5$ فإن $q\in\{0\,;1\,;2\,;\,3\,;4\,\}$

ومنه $n\in\{0\,;6\,;12;18\,;24\}$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ D_a إلى مجموعة قواسم العدد الطبيعي a غير المعدوم .

مثال: مجموعة قواسم 8 هي $D_{12}=\ 1;2;3;4\,;6\,;12$ ، مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .

$D_a\cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b.

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a\cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و نرمز له بـ $PGCD\ a\,;b$.

مثال : $D_{12} = \{1;2;3;4;6;12\}$ و $D_{18} = \{1;2;3;6;9;18\}$ فإن $D_{12} \cap D_{18} = \{1;2;3;6\}$ و

$PGCD(12;18) = 6$

ملاحظات: $PGCD(a,a) = a$ و $PGCD(1;a) = 1$ و $PGCD(0;a) = a$ (a غير معدوم)

$PGCD(0;2012) = 2012$; $PGCD(1;2013) = 1$; $PGCD(24;24) = 24$

حساب $PGCD(a;b)$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

مثال : أوجد $PGCD(315;117)$

الحاصل		2	1	2	4
المقسوم و القاسم	315	117	81	36	9
الباقي		81	36	9	0

إذن $PGCD(315;117) = 9$

مجموعة القواسم المشتركة

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

مثال : أوجد مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 448 و 308

الحل : نبحث أولا عن $PGCD(308;448)$

الحاصل		1	2	5
المقسوم و القاسم	448	308	140	28
الباقي		140	28	0

إذن $PGCD(308;448) = 28$ ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 448 و 308 هي مجموعة قواسم 28 أي $D_{308} \cap D_{448} = \{1;2;4;7;14;28\}$.

العددان الأوليان فيما بينهما

a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 .

مثل 12 و 7 ، 8 و 15

خواص : a و b و k أعداد طبيعية غير معدومة

	خواص	مثال
1	$PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$	$PGCD(20;32)=4\times PGCD(5;8)=4\times 1=4$
2	$PGCD(a;1)=1$	$PGCD(12;1)=12$
3	$PGCD(a;a)=a$	$PGCD(36;36)=36$
4	$PGCD(a;0)=a$	$PGCD(14;0)=14$
5	$PGCD(a;b)=PGCD(b;a)$	$PGCD(12;18)=PGCD(18;12)$
6	إذا كان $a\|b$ فإن $PGCD(a;b)=a$	$PGCD(6;18)=6$
7	إذا كان $k\|a$ و $k\|b$ فإن $PGCD\left(\frac{a}{k};\frac{b}{k}\right)=\frac{1}{k}\times PGCD(a;b)$	$PGCD\left(\frac{12}{6};\frac{18}{6}\right)=\frac{1}{6}\times PGCD(12;18)$

خاصية مهمة جدا :

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. إذا كان d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما بحيث . $a=da'$ و $b=db'$

مثال :

عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a+b=42 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a=6a'$ و $b=6b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$a+b=42$ تعني $6a'+6b'=42$ و منه $a'+b'=7$

$(a';b')\in\{(1;6),(2;5),(3;4),(4;3),(5;2),(6;1)\}$

و منه مجموعة الحلول هي : $S=\{(6;36),(12;30),(18;24),(24;18),(30;12),(36;6)\}$.

الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم. نقول أن العددين الصحيحين a و b متوافقان بترديد n معناه أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n. و نرمز $a\equiv b\ n$ و نقرأ a يوافق b بترديد n.

العبارات التالية متكافئة :

1. $a\equiv b\ n$
2. a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n.
3. $a-b$ مضاعف للعدد الطبيعي n

مثل : $17\equiv 12\ 5$ ، $33\equiv 25\ 8$ ، $-49\equiv -5\ 11$

خواص الموافقات

n عدد طبيعي غير معدوم . a , b , c , d , k أعداد صحيحة:

	خواص
1	كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n ، بترديد n حيث $n\geq 2$
2	من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a\equiv a\ n$.
3	إذا كان $a\equiv b\ n$ فإن $b\equiv a\ n$.
4	إذا كان($a\equiv b\ n$ و $b\equiv c\ n$) فإن $a\equiv c\ n$.
5	إذا كان ($a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$) فإن $a+c\equiv b+d\ n$.
6	إذا كان ($a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$) فإن $ac\equiv bd\ n$
7	إذا كان $a\equiv b\ n$ فإن $ka\equiv kb\ n$.
8	إذا كان $a\equiv b\ n$ فإن $a^p\equiv b^p\ n$. p عدد طبيعي غير معدوم

مثال 01:

1) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n+3\equiv 5[11]$.

2) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n\equiv 2[5]$.

الحل :

1) $n+3\equiv 5[11]$ تكافئ $n+3-5\equiv 5-5[11]$ أي $n\equiv 2[11]$.

إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n+3\equiv 5[11]$ هي من الشكل $n=2+11k$ حيث k عدد صحيح.

2) لدينا $3n\equiv 2[5]$ و $2\equiv 2[5]$ فحسب الخاصية 6 من الجدول السابق فإن $2\times 3n\equiv 2\times 2[5]$ أي $6n\equiv 4[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$ إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n\equiv 2[5]$ هي من الشكل $n=4+5k$ حيث k عدد صحيح.

ملاحظة يمكن استعمال الجدول :

$n\equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$3n\equiv$	0	3	1	4	2	$[5]$

مثال 02 :

بين أنه من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 5

الحل :

$n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 5 **معناه** $n(n^4-1)\equiv 0[5]$. **نستعمل الجدول التالي :**

$n\equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$n^4-1\equiv$	-1	0	0	0	0	$[5]$
$n(n^4-1)\equiv$	0	0	0	0	0	$[5]$

إذن من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 5

مثال :

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7 .

2) استنتج باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

الحل :

أ) $5\equiv 5[7]$, $5^2\equiv 4[7]$, $5^3\equiv 6[7]$, $5^4\equiv 2[7]$, $5^5\equiv 3[7]$, $5^6\equiv 1[7]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 6 . نقسم الأس n على الدور 6 فنجد $n=6k+r$ حيث $0\le r<6$

من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي

إذا كان $r=$	فإن $n=6k+r$	وبالتالي باقي قسمة العدد 5^n على 7 هو.
0	$n=6k$	1
1	$n=6k+1$	5
2	$n=6k+2$	4
3	$n=6k+3$	6
4	$n=6k+4$	2
5	$n=6k+5$	3

ب) باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

نقسم الأس 2013 على الدور 6 فنجد $2013=6\times 335+\underline{3}$ من الشكل $6k+3$ وبالتالي من الجدول السابق مباشرة نجد $5^{2013}\equiv 6[7]$.

التعداد في الأساس x

مبرهنة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1 . كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$ حيث

$0<q<x$ و $0\le r_\alpha<x$ مع $\alpha\in\{0;1;2;.....;n-1\}$

1) إذا كان $a<x$: a يمثل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $a \geq x$: يمثل العدد a كما يلي $a=\overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0}$. وهي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x

إذا كان $x=10$ ، نكتب: $a=q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0$

مثال 01:

a عدد طبيعي يكتب $\overline{547}$ في النظام ذي الأساس 9 . أكتب a في الأساس 10 (النظام العشري).

الحل:

$a=5\times9^2+4\times9+7=448$ و منه a يكتب 448 في النظام العشري .

مثال 02:

a عدد طبيعي يكتب 1955 في النظام ذي الأساس 10 . أكتب a في الأساس 7.

الحل:

$1955=279\times7+\underline{2}$

$279=39\times7+\underline{6}$

$39=5\times7+\underline{4}$

$5=0\times7+\underline{5}$

ومنه $1955=5\times7^3+4\times7^2+6\times7+2$ **ومنه** a **يكتب** $\overline{5462}$ **في الأساس** 7 .

الأعداد الأولية

تعريف: نقول عن العدد الطبيعي n أنه عدد أولي إذا وفقط إذا كان يقبل قاسمين فقط في $\mathbb{N}$ هما: 1 و n نفسه .

- ✓ 0 غير أولي لأنه يقبل ما لانهاية من القواسم .
- ✓ 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد فقط هو 1 .
- ✓ 2 هو العدد الأوّلي الزوجي الوحيد .(كل الأعداد الأولية فردية ما عدا 2)
- ✓ 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 . 37 , 41 , 43 , 47 هي الأعداد الأولية الأصغر من 50 .

	خواص
1	مجموعة الأعداد الأوّلية غير منتهية
2	كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .
3	كل عدد طبيعي n غير أوّلي أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوّليا a حيث $a\leq\sqrt{n}$.

معرفة هل العدد أولي أم لا

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 أوّليا أم لا . نحسب $\sqrt{n}$.

- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .

أ) إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف و نقرّ أنّ n غير أولي .

ب) إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أنّ n أولي .

مثال :

هل الأعداد التالية أولية ؟ 169 ، 143 ، 269

بالنسبة للعدد 169 : لدينا $\sqrt{169}=13$ وهو عدد طبيعي أي 169 مربع تام وبالتالي 169 غير أولي.

بالنسبة للعدد 143 : لدينا $\sqrt{143}=11,958$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 143 على الأعداد الأولية الأصغر من $11,958$ وهي: $2 , 3 , 5 , 7, 11$ فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	143
2	71	1	لا يقبل القسمة على 2
3	47	1	لا يقبل القسمة على 3
5	28	3	لا يقبل القسمة على 5
7	20	3	لا يقبل القسمة على 7
11	13	0 نتوقف	يقبل القسمة على 11

أحد البواقي معدوم نتوقف من عملية القسمة ونقرّ بأن العدد 143 غير أولي.

بالنسبة للعدد 269: لدينا $\sqrt{269}=16,401$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 269 على الأعداد الأولية الأصغر من $16,401$ وهي : $2 , 3 , 5 , 7, 11, 13$ فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	269
2	134	1	لا يقبل القسمة على 2
3	89	2	لا يقبل القسمة على 3
5	53	4	لا يقبل القسمة على 5
7	38	3	لا يقبل القسمة على 7
11	24	5	لا يقبل القسمة على 11
13	20	9 نتوقف	لا يقبل القسمة على 13

كل البواقي غير معدومة نتوقف من عملية القسمة ونقرّ بأن العدد 269 أولي.

إيجاد عدد ومجموعة قواسم عدد طبيعي

لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل أولية . نضيف 1 إلى كل أس في التحليل ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها . أما مجموعة القواسم نتبع الطريقة المبينة في المثال التالي :

مثال :

أوجد عدد ومجموعة قواسم العدد 200.

الحل : نحلل 200 إلى جداء عوامله الأولية فنجد $200=2^3\times5^2$

نضيف 1 غلى كل أس ونحسب جداء الأعداد المحصل عليها: $(3+1)(2+1)=12$ **ومنه عدد قواسم 200 هو 12.**

الآن نجد مجموعة هذه القواسم : نكتب $\begin{vmatrix} 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 \\ 5^0 , 5^1 , 5^2 \end{vmatrix}$ أي $\begin{vmatrix} 1 , 2 , 4 , 8 \\ 1 , 5 , 25 \end{vmatrix}$ نضرب كل عدد من السطر الثاني في السطر الأول فنجد مجموعة قواسم 200 وهي :

$$D_{200}=\{1 , 2 , 4 , 8 , 5 , 10 , 20 , 40 , 25 , 50 , 100 , 200\}$$

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين غير معدومين

نرمز بـ M_a لمجموعة مضاعفات العدد الطبيعي غير المعدوم a .

نرمز بـ M_b لمجموعة مضاعفات العدد الطبيعي غير المعدوم b .

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b

يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b، و نرمز له $PPCM\ a;b$.

ملاحظات وخواص

a و b و k أعداد طبيعية غير معدومة

	ملاحظات و خواص
1	$PPCM\ ka;kb = k\times PPCM\ a;b$
2	$PPCM\ a;1 = a$
3	$PPCM\ a;a = a$
4	$PPCM\ a;b = PPCM\ b;a$
5	إذا كان $a\|b$ فإن $PPCM\ a;b = b$
6	إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإن $PPCM\ a;b = a\times b$
7	مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما .

حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 : نحلل كلا من a و b ونأخذ جداء العوامل الأولية المشتركة مرة واحدة وبأصغر أس في تحليليهما .

حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 : نحلل كلا من a و b ونأخذ جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة مرة واحدة وبأكبر أس في تحليليهما .

مثال :

باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية أوجد $PPCM\ 120;756$ و $PGCD\ 120;756$

الحل :

لدينا $120=2^3\times3\times5$ و $750=2^2\times3^3\times7$

$PPCM\ 120;756\ =2^3\times3^3\times5\times7=7560$ و $PGCD\ 120;756\ =2^2\times3=12$

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

- $PGCD\ a;b\ \times PPCM\ \ a;b\ =a\times b$
- إذا كان d هو $PGCD(a,b)$ و m هو $PPCM(a,b)$ فإنّه يوجد عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما a' و b' بحيث : $m=a'b'd$

مثال :

باستعمال العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين 308 و 364.

عين المضاعف المشترك الأصغر لهما.

الحل :

لدينا $308=2^2\times7\times11$ و $364=2^2\times7\times13$ فيكون $PGCD(308,364)=2^2\times7=28$ وبالتالي :

$$PPCM\,(308\,,364)=\frac{308\times364}{PGCD(308\,,364)}=\frac{308\times364}{28}=4004$$

مبرهنات وخواص :

مبرهنة بيزو :

يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث :

$$au+bv=1$$

مثال :

ليكن n عددا طبيعيا . باستعمال مبرهنة بيزو .

أثبت أن العددين $A=2n+1$ و $B=9n+4$ عددان أوليان فيما بينهما .

الحل :

نحسب $9A-2B$: $9A-2B=9(2n+1)-2(9n+4)=18n+9-18n-8=1$

ومنه وحسب مبرهنة بيزو A و B عددان أوليان فيما بينهما .

خاصية1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث :

$$au+bv=d$$

مثال :

عين عددين صحيحين u و v حيث أن $27u+11v=9$.

الحل :

$27=11\times2+5$ ومنه $5=27\times(1)-11\times(2)$

$11=5\times2+1$ ومنه $1=11\times(1)-5\times(2)$

$11\times(1)-5\times(2)=1$ ومنه $11\times(1)-\left[27\times(1)-11\times(2)\right]\times(2)=1$ أي $27\times(-2)+11\times(5)=1$ ومنه

$27\times(-18)+11\times(45)=9$ فنحصل على $u=-18$ و $v=45$

خاصية2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد الأصغر منها .

مثل : العدد 5 أولي فهو أولي مع كلا من 2 , 4 , 3

خاصية3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$

مثال :

ليكن n عددا صحيحا .

1) أثبت أن $n+2$ و $2n+5$ أوليان فيما بينهما .

2) أثبت أن $n+2$ و $3n+7$ أوليان فيما بينهما .

3) استنتج أن $n+2$ و $6n^2+29n+35$ أوليان فيما بينهما .

الحل:

1) نلاحظ أن :

$-2(n+2)+1(2n+5)=1$ إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $n+2$ و $2n+5$ أوليان فيما بينهما .

2) نلاحظ أن :

$-3(n+2)+1(3n+7)=1$ إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $n+2$ و $3n+7$ أوليان فيما بينهما .

3) نلاحظ أن :

$3n+7 \quad 2n+5 = 6n^2+29n+35$.

بما أن $n+2$ أولي مع كل من $2n+5$ و $3n+7$ فإن $n+2$ أولي مع جدائهما $6n^2+29n+35$

و هذا حسب الخاصية 3 .

مبرهنةغوص :

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

مثال 01:

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $x;y$: $3x-5y=0$.

الحل :

$3x-5y=0$ تكافئ $3x=5y$.

3 تقسم الجداء $3x$ ومنه 3 تقسم الجداء $5y$. بما أن 3 أولي مع 5 فإن 3 تقسم y وبالتالي $y=3k$ حيث k عدد صحيح .

نعوض في المعادلة $3x=5y$ بقيمة $y=3k$ فنجد $3x=5(3k)$ ومنه $x=5k$

حلول المعادلة $3x-5y=0$ هي الثنائيات من الشكل $(5k,3k)$ حيث k عدد صحيح .

مثال 02 :

لتكن المعادلة $7x-5y=1........(E)$ ذات المجهول $x;y$.

1) تحقق من أن الثنائية $(3,4)$ هي حلا خاصا للمعادلة (E) .

2) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E).

الحل :

1) نضع $(x_0 , y_0)=(3,4)$. نلاحظ $7(3)-5(4)=21-20=1$ ومنه الثنائية $(3,4)$ هي حلا خاصا للمعادلة (E) .

2) لدينا $7x-5y=1$ و $7x_0-5y_0=1$ ومنه $7x-5y=7x_0-5y_0$ تكافئ $7(x-x_0)=5(y-y_0)$ أي $7(x-3)=5(y-4)$

لدينا 5 يقسم $5(y-4)$ ومنه 5 يقسم $7(x-3)$ و. بما أن 5 أولي مع 7 فإن 5 يقسم $x-3$ أي $x-3=5k$ ومنه $x=3+5k$ حيث k عدد صحيح .

نعوض في المعادلة $7x-5y=1$ بقيمة $x=3+5k$ فنجد $7(3+5k)-5y=1$ ومنه $y=4+7k$

حلول المعادلة $7x-5y=1$ هي الثنائيات من الشكل $(3+5k , 4+7k)$ حيث k عدد صحيح .

خاصية:

a و b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

إذا كان a يقبل القسمة على كل من b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a يقبل القسمة على الجداء bc

مثال :

برهن أنه من أجل كل عدد صحيح n ، فإن n^5-n يقبل القسمة على 15 .

الحل :

للبرهان على أن العدد n^5-n يقبل القسمة على 15 يكفي البرهان على أن n^5-n يقبل القسمة على 3 و على 5 ، لأن 3 و 5 **أوليان فيما بينهما.**

1) نبين أن n^5-n يقبل القسمة على 3 :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n\equiv 0[3]$ أو $n\equiv 1[3]$ أو $n\equiv 2[3]$

- إذا كان $n\equiv 0[3]$ فإن $n^5-n\equiv 0[3]$.
- إذا كان $n\equiv 1[3]$ فإن $n^5-n\equiv 1-1[3]$ أي $n^5-n\equiv 0[3]$
- إذا كان $n\equiv 2[3]$ فإن $n^5-n\equiv 32-2[3]$ أي $n^5-n\equiv 0[3]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n^5-n\equiv 0[3]$.

2) نبين أن n^5-n يقبل القسمة على 5 :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n\equiv 0[5]$ أو $n\equiv 1[5]$ أو $n\equiv 2[5]$ أو $n\equiv 3[5]$ أو $n\equiv 4[5]$.

- إذا كان $n\equiv 0[5]$ فإن $n^5-n\equiv 0[5]$.
- إذا كان $n\equiv 1[5]$ فإن $n^5-n\equiv 1-1[5]$ أي $n^5-n\equiv 0[5]$
- إذا كان $n\equiv 2[5]$ فإن $n^5-n\equiv 32-2[5]$ أي $n^5-n\equiv 0[5]$
- إذا كان $n\equiv 3[5]$ فإن $n^5-n\equiv 243-3[5]$ أي $n^5-n\equiv 0[5]$
- إذا كان $n\equiv 4[5]$ فإن $n^5-n\equiv 1024-4[5]$ أي $n^5-n\equiv 0[5]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n^5-n\equiv 0[5]$.

تمارين تدريبية محلولة

التمرين رقم 01 :

أثبت أن مجموع عددين فرديين متتابعين يقبل القسمة على 4 .

التمرين رقم 02 :

إذا كان العدد الطبيعي d يقسم في آن واحد كلا من العددين الطبيعيين $(2n+3)$ و $(5n+9)$.عين القيم المكنة لـ d .

التمرين رقم 03 :

كيف يجب إختيار العدد الطبيعي n حتى يكون n قاسما لعدد $(n+8)$ ؟

التمرين رقم 04 :

عين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون $(n-4)$ قاسما للعدد $(n+2)$.

التمرين رقم 05 :

n عدد طبيعي غير معدوم . عين قيم n المكنة حتي يكون العدد $\frac{n+6}{n}$ طبيعيا .

التمرين رقم 06:

عين العددين الصحيحين a و b بحيث $a-b=538$. حاصل و باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b هما على الترتيب 13 و 22 .

التمرين رقم 07:

عين جميع قيم العدد الطبيعي a بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 45 يساوي مربع حاصل هذه القسمة .

التمرين رقم 08: a عدد طبيعي غير معدوم .

برهن أن باقي القسمة الإقليدية للعدد $\left[a^2+(a-1)^2\right]^2$ على $4a^2$ هو $(2a-1)^2$.

التمرين رقم 09:

1) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 36 ثم للعدد 48 .
2) أوجد جميع القواسم المشتركة بينهما.
3) استنتج $PGCD(48\,;36)$

التمرين رقم 10:

أحسب $PGCD(280\,;105)$ باستعمال الطرح في خوارزمية إقليدس.

التمرين رقم 11:

باستعمال خوارزمية إقليدس ، أحسب $PGCD(1275\,,900)$

التمرين رقم 12:

عين كل القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 .

1) حسب شفعية n ، $PGCD(n+1\,,n+3)$

2) حلل كلا من n^2+3n+2 و n^2+5n+6 .

3) استنتج $PGCD(n^2+3n+2,n^2+5n+6)$ بدلالة n .

التمرين رقم 13:

n عدد طبيعي أكبر تماما من الواحد.

بين أنه إذا كان $\begin{cases} d\,|\,n+3 \\ d\,|\,n+1 \end{cases}$ فإن $d\in\{1\,,2\}$.

التمرين رقم 14:

عين الثنائيات الطبيعية $(a\,,b)$ بحيث $\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a,b)=8 \end{cases}$.

التمرين رقم 15:

أحسب $PGCD(24\,;18)$ و استنتج $PPCM(24\,;18)$.

التمرين رقم 16:

n عدد طبيعي أكبر تماما من الواحد

1) أحسب $PGCD(n^3+n\,;n^2)$.

2) استنتج $PPCM(n^3+n\,;n^2)$.

التمرين رقم 17:

عين الثنائيات الطبيعية $(a\,,b)$ بحيث $\begin{cases} PGCD(a,b)=9 \\ PPCM(a,b)=2430 \end{cases}$. مع $a<b$

التمرين رقم 18:

عين الثنائيات الطبيعية $(a\,,b)$ بحيث $\begin{cases} a\times b=300 \\ PPCM(a,b)=60 \end{cases}$

التمرين رقم 19:

1) عين جميع القواسم الطبيعية للعدد 108 .

2) نضع $d=PGCD(a\,,b)$ و $m=PPCM(a\,,b)$.عين الثنائيات الطبيعية $(a\,,b)$ بحيث $\begin{cases} 10<d<15 \\ m-3d=108 \end{cases}$

التمرين رقم 20:

1) عين جميع القواسم الطبيعية للعدد 72 .

2) نضع $d = PGCD(a , b)$ و $m = PPCM(a , b)$.عين الثنائيات الطبيعية (a , b) بحيث

$$\begin{cases} 30 < d < 40 \\ m - 4d = 72 \end{cases}$$

التمرين رقم 21:

نضع $d = PGCD(a , b)$ و $m = PPCM(a , b)$.عين الثنائيات الطبيعية (a , b) بحيث

$$\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a \geq b \end{cases}$$

التمرين رقم 22

نضع $m = PPCM(a , b)$.عين الثنائيات الطبيعية (a , b) بحيث $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$

التمرين رقم 23

أوجد عددين صحيحين a و b بحيث $25872a + 482b = 44$

التمرين رقم24 :

ليكن $N = 32^5 \times 9^4$ ما هو عدد قواسم N ؟

التمرين رقم 25:

1) عين جميع القواسم الطبيعية للعدد 246 .

2) باقي القسمة الإقليدية لـ 321 على العدد الطبيعي b هو 75 .عين القيم الممكنة لـ b وحاصل القسمة.

التمرين رقم26 :

هل العدد 257 أولي ؟ هل العدد 319 أولي ؟

التمرين رقم 27:

a و b عددان أوليان فيما بينهما. بين أن العددين $5a + b$ و $9a + 2b$ أوليان فيما بينهما .

حلول التمارين التدريبية

حل التمرين رقم 01 : كل عددين فرديين متتابعين نستطيع كتابتهما على الشكل $2n+1$ و $2n+3$.

إذن $(2n+1)+(2n+3)=4n+4=4(n+1)$ وهو مضاعف للعدد 4 أي يقبل القسمة على 4 .

حل التمرين رقم 02:

إذا كان العدد الطبيعي d يقسم في آن واحد كلا من العددين الطبيعيين $(2n+3)$ و $(5n+9)$ فإن d يقسم $2(5n+9)$ و يقسم $5(2n+3)$ وكذلك يقسم الفرق بين هذين العددين أي

$$2(5n+9)-5(2n+3)=10n+18-10n-15=3$$

أي d يقسم 3 ومنه القيم الممكنة لـ d هي 1 و 3 .

حل التمرين رقم 03 :

إذا كان n يقسم $n+8$ فهو حتما يقسم 8 وبالتالي مجموعة القيم الممكنة لـ n هي 1 , 2 , 4 , 8 (قواسم 8).

حل التمرين رقم 04 :

نكتب $(n+2)$ على الشكل $n+2=(n-4)+6$.يكون $(n-4)$ قاسما للعدد $(n+2)$ إذا وفقط إذا كان $(n-4)$ قاسما للعدد 6 أي $(n-4)\in\{-6\ ,\ -3\ ,\ -2\ ,-1\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 6\}$ ومنه

$$n\in\{-2\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,3\ ,\ 5\ ,6\ ,\ 7\ ,\ 10\}$$

حل التمرين رقم 05 :

نكتب العدد $\frac{n+6}{n}$ كما يلي : $\frac{n+6}{n}=\frac{n}{n}+\frac{6}{n}=1+\frac{6}{n}$.

إذن يكون $\frac{n+6}{n}$ طبيعيا إذا كان n قاسما للعدد 6 أي $n\in\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 6\}$.

حل التمرين رقم 06:

لدينا : $\begin{cases} a-b=538 \\ a=13b+22 \\ b>22 \end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases} a=b+538 \\ b+538=13b+22 \\ b>22 \end{cases}$ **أي** $\begin{cases} a=581 \\ b=43 \end{cases}$

حل التمرين رقم 07:

لدينا : $\begin{cases} a=45q+q^2 \\ 0\le q^2<45 \end{cases}$. $0\le q^2<45$

q	0	1	2	3	4	5	6
q^2	0	1	4	9	16	25	36
$45q$	0	45	90	135	180	225	270
$a=45q+q^2$	0	46	94	144	196	250	306

أي $q^2 \in \{1, 4, 9\ 16, 25, 36\}$ ومنه $q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

حل التمرين رقم 08:

$\left[a^2+(a-1)^2\right]^2-(2a-1)^2=4a^2(a-1)^2$ ومنه $\left[a^2+(a-1)^2\right]^2=4a^2(a-1)^2+(2a-1)^2$

بما أن $a \geq 1$ ، $2a-1 \geq 0$ ولكن $2a-1<2a$ وبالتالي $0 \leq 2a-1<2a$ ومنه $0 \leq (2a-1)^2<4a^2$

وهذا يعني في القسمة الإقليدية $\left[a^2+(a-1)^2\right]^2$ على $4a^2$ يكون حاصل القسمة $(a-1)^2$ والباقي هو $(2a-1)^2$.

حل التمرين رقم 09:

1) $D_{36}=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ ،

$D_{48}=\{1; 2; 3; 4; 6; 8, 12; 16; 24; 48\}$.

2) $D_{36} \cap D_{48}=\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

3) $PGCD(48; 36)=12$

حل التمرين رقم 10:

في كل مرحلة نعوض العدد الأكبر بفرق الأكبر والأصغر.

$280-105=175$ .... $PGCD(280; 105)=PGCD(175; 105)$

$175-105=70$ .... $PGCD(175; 105)=PGCD(105; 70)$

$105-70=35$ .... $PGCD(105; 70)=PGCD(70; 35)$

$70-35=35$ .... $PGCD(70; 35)=PGCD(35; 35)=35$

وأخيرا $PGCD(280; 105)=35$

حل التمرين رقم 11:

الحاصل		1	2	2	2
المقسوم و القاسم	1275	900	375	150	75
الباقي		375	150	75	0

إذن $PGCD(1275; 900)=75$

حل التمرين رقم 12 : نجد أولا $PGCD(792; 456)$

الحاصل		1	1	2	1	4
المقسوم و القاسم	792	456	336	120	96	24
الباقي		336	120	96	24	0

إذن $PGCD(792; 456)=24$ ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 هي مجموعة قواسم 24 أي $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$.

حل التمرين رقم 13:

1) $\begin{cases} d \mid n+3 \\ d \mid n+1 \end{cases}$ يكافئ $d \mid (n+3)-(n+1)$ يكافئ $d \mid 2$ أي $d \in \{1 , 2\}$.

2) حسب ما سبق $PGCD(n+1 , n+3)$ يساوي إما 1 وإما 2 .

- إذا كان n فرديا فإن $n+1$ و $n+3$ زوجيان وبالتالي $PGCD(n+1 , n+3)=2$.
- إذا كان n زوجيا فإن $n+1$ و $n+3$ فرديان وبالتالي $PGCD(n+1 , n+3)=1$.

3) $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$ و $n^2+5n+6=(n+2)(n+3)$.

4) $$PGCD\left(n^2+3n+2, n^2+5n+6\right)=PGCD\left[(n+1)(n+2);(n+2)(n+3)\right]$$ ومنه
$$=(n+2)PGCD(n+1;n+3)$$

$PGCD\left(n^2+3n+2, n^2+5n+6\right)=n+2$ إذا كان n زوجيا .

$PGCD\left(n^2+3n+2, n^2+5n+6\right)=2n+4$ إذا كان n فرديا .

حل التمرين رقم 14:

نضع $a=8a'$ و $b=8b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a' , b')=1$

فيكون لدينا $\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a,b)=8 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} a'+b'=9 \\ PGCD(a',b')=1 \end{cases}$ ونحصل على

$(a' , b') \in \{(1,8);(2,7);(4,5);(5,4);(7,2);(8,1)\}$ وأخيرا :

$(a, b) \in \{(8,64);(16,56);(32,40);(40,32);(56,16);(64,8)\}$

حل التمرين رقم 15:

1) $PGCD(24 ; 18)=6$

2) $PPCM(24 ; 18)=\dfrac{24\times 18}{6}=72$

حل التمرين رقم 16:

1) $n^3+n=n^2n+n$ و $n^2=nn+0$ ومنه $PGCD\left(n^3+n ; n^2\right)=n$.

2) $PPCM\left(n^3+n ; n^2\right)=\dfrac{\left(n^3+n\right)\left(n^2\right)}{PGCD\left(n^3+n ; n^2\right)}=\dfrac{\left(n^3+n\right)\left(n^2\right)}{n}=n^4+n^2$

حل التمرين رقم 17:

نضع $a=9a'$ و $b=9b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a' , b')=1$

نعلم أن $PPCM(a , b)\times PGCD(a , b)=a\times b$ إذن $\begin{cases} a\times b=2430 \\ PGCD(a , b)=9 \end{cases}$

فيكون لدينا $\begin{cases} 9a'\times 9b'=2430 \\ PGCD(a',b')=1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a'\times b'=30 \\ PGCD(a',b')=1 \end{cases}$ مع $a'<b'$

ونحصل على $(a',b')\in\{(1,30);(2,15);(3,10);(5,6)\}$ وأخيرا :
$(a,b)\in\{(9,270);(18,135)(27,90);(45,54)\}$.

حل التمرين رقم 18:

نعلم أن $PPCM(a,b)\times PGCD(a,b)=a\times b$ إذن تكافؤ

$$PGCD(a,b)=\frac{a\times b}{PPCM(a,b)}=\frac{300}{60}=5$$

نضع $a=5a'$ و $b=5b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a',b')=1$.

$$\begin{cases}a\times b=300\\PPCM(a,b)=60\end{cases} \text{ تكافؤ } \begin{cases}a\times b=300\\PGCD(a,b)=5\end{cases} \text{ تكافؤ } \begin{cases}a'\times b'=12\\PGCD(a',b')=1\end{cases}$$

ونحصل على $(a',b')\in\{(1,12);(3,4);(4,3);(12,1)\}$ وأخيرا :
$(a,b)\in\{(5,60);(15,20)(20,15);(60,5)\}$.

حل التمرين رقم 19:

1) $108=2^2\times3^3$. إن عدد قواسم 108 هو $(2+1)(3+1)=12$. نكتب $\left|\begin{array}{l}2^0\ ;\ 2^1\ ,\ 2^2\\3^0\ ;\ 3^1\ ,\ 3^2\ ;\ 3^3\end{array}\right.$ أي

$$\left|\begin{array}{l}1;\ 2\ ,\ 4\\1;\ 3\ ,\ 9;\ 27\end{array}\right.$$

ومنه $D_{108}=\{1,2,4;3;6;12;9;18;36;27,54;108\}$.

2)نضع $a=a'd$ و $b=b'd$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a',b')=1$. نعلم أن
$m.d=a.b$ ومنه $m.d=a'.b'd^2$ وبالتالي $m=a'.b'd$ إذن $m-3d=d(a'b'-3)$

$$\begin{cases}10<d<15\\m-3d=108\end{cases} \text{ تكافؤ } \begin{cases}10<d<15\\d(a'b'-3)=108\end{cases}$$
نستنتج أن d قاسم للعدد 108 و $10<d<15$ أي $d=12$

وبالتالي $a'b'-3=\frac{108}{12}=9$ أي $a'b'=12$

ونحصل على $(a',b')\in\{(1,12);(3,4);(4,3);(12,1)\}$ وأخيرا :
$(a,b)\in\{(12,144);(36,48)(48,36);(144,12)\}$.

حل التمرين رقم 20:

1) $72=2^3\times3^2$. إن عدد قواسم 108 هو $(2+1)(3+1)=12$. نكتب $\left|\begin{array}{l}2^0\ ;\ 2^1\ ,\ 2^2\ ;2^3\\3^0\ ;\ 3^1\ ,\ 3^2\end{array}\right.$ أي

$$\left|\begin{array}{l}1;\ 2\ ,\ 4\ ,8\\1;\ 3\ ,\ 9\end{array}\right.$$

ومنه $D_{72}=\{1,2,4;8;3;6;12;24;9;18,36;72\}$.

2)نضع $a=a'd$ و $b=b'd$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a',b')=1$. نعلم أن
$m.d=a.b$ ومنه $m.d=a'.b'd^2$ وبالتالي $m=a'.b'd$ إذن $m-4d=d(a'b'-4)$

$\begin{cases} 30 < d < 40 \\ m - 4d = 72 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 30 < d < 40 \\ (a'b' - 4)d = 72 \end{cases}$ نستنتج أن d قاسم للعدد 72 و $30 < d < 40$ أي $d = 36$

وبالتالي $a'b' - 4 = \dfrac{72}{36} = 2$ أي $a'b' = 6$

ونحصل على $(a', b') \in \{(1,6) ; (2,3) ; (3,2) ; (6,1)\}$ وأخيرا :

$(a, b) \in \{(36,216) ; (72,108)(108,72) ; (216,36)\}$.

حل التمرين رقم 21:

نضع $a = a'd$ و $b = b'd$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a', b') = 1$

$\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a \geq b \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} m = d^2 \\ d(d+1) = 156 \\ a \geq b \end{cases}$ ومنه $d(d+1) = 12 \times 13$ ومنه $d = 12$

$m = d^2$ تكافئ $a'b'd = d^2$ أي $a'b' = d$ إذن $a'b' = 12$

ونحصل على $(a', b') \in \{(12,1) ; (4,3)\}$ وأخيرا : $(a, b) \in \{(144,12) ; (48,36)\}$.

حل التمرين رقم 22:

نضع $a = a'd$ و $b = b'd$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a', b') = 1$

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} (a'^2 - b'^2)d^2 = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ حيث $d = PGCD(a, b)$

ومنه $9(a'^2 - b'^2) = 405$ وبالتالي $a'^2 - b'^2 = 45$ أي $(a' - b')(a' + b') = 45$ ونحصل على الجمل التالية:

$(1) \begin{cases} a' + b' = 45 \\ a' - b' = 1 \end{cases}$　　$(2) \begin{cases} a' + b' = 15 \\ a' - b' = 3 \end{cases}$　　$(3) \begin{cases} a' + b' = 9 \\ a' - b' = 5 \end{cases}$.

حل الجملة (1) $(a', b') = (23 ; 22)$ ومنه $(a, b) = (69 ; 66)$

حل الجملة (2) $(a', b') = (9 ; 6)$ غير أوليين ومنه الجملة (2) حلولها مرفوضة

حل الجملة (3) $(a', b') = (7 ; 2)$ ومنه $(a, b) = (21 ; 6)$.

وأخيرا الثنائيات الطبيعية (a, b) بحيث $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ هي $(a, b) = (69 ; 66)$ ،

$(a, b) = (21 ; 6)$

حل التمرين رقم 23:

نبحث عن $PGCD(25872 , 482)$:

لدينا: $25872 = 484 \times 53 + 220$

$484 = 220 \times 2 + 44$

$220 = 44 \times 5 + 0$

إذن $PGCD(25872 , 482) = 44$.

$44 = 484 - 2 \times 220$

$44=484-2.(25872-484\times 53)$

$44=484\times(1+2\times 53)+25872\times(-2)$

$44=25872\times(-2)+484\times(107)$ ومنه $(a\,,b)=(-2\,,107)$

حل التمرين رقم24 :

نحلل هذا العدد إلى جداء عوامله الأولية : $N=32^5\times 9^4=(2^5)^5\times(3^2)^4=2^{25}\times 3^8$

ومنه عدد قواسم N هو $(25+1)(8+1)=26\times 9=234$.

حل التمرين رقم 25:

1) تعيين قواسم 246

$246=2\times 3\times 41$ **ومنه** $D_{246}=\{1\,,2\,,3\,,6\,,41\,,82\,\,,123\,,246\}$

2) باقي القسمة الإقليدية لـ 321 على العدد الطبيعي b هو 75 **وحاصل القسمة هو** q **نعبر عنها كما يلي**

$\begin{cases}321=bq+75\\ 0\le 75<b\end{cases}$ أي $\begin{cases}bq=246\\ b>75\end{cases}$ أي $\begin{cases}b\in D_{246}\\ bq=246\\ b>75\end{cases}$ نحصل على مجموعة الثنائيات $(b\,,q)$ التي تحقق التمرين وهي $S=\{(82,3)\,,(123,2)\,,(246,1)\}$

حل التمرين رقم 26:

بالنسبة للعدد 257:

لدينا $\sqrt{257}\simeq 16,03$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 257 على الأعداد الأولية الأصغر من 16,03 وهي : 2 , 3 , 5 , 7, 11, 13 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	257
2	128	1	لا يقبل القسمة على 2
3	85	2	لا يقبل القسمة على 3
5	51	2	لا يقبل القسمة على 5
7	36	5	لا يقبل القسمة على 7
11	23	4	لا يقبل القسمة على 11
13	19	10 نتوقف	لا يقبل القسمة على 11

كل البواقي غير معدومة نتوقف من عملية القسمة ونقرّ بأن العدد 257 أولي.

بالنسبة للعدد 319:

لدينا $\sqrt{319}\simeq 17,86$ وهو عدد غير طبيعي نقسم 319 على الأعداد الأولية الأصغر من 17,86 وهي : 2 , 3 , 5 , 7, 11, 13 ، 17 فنجد

المقسوم عليه	حاصل القسمة	باقي القسمة	319
2	159	1	لا يقبل القسمة على 2
3	106	1	لا يقبل القسمة على 3
5	63	4	لا يقبل القسمة على 5
7	45	4	لا يقبل القسمة على 7
11	29	0	يقبل القسمة على 11

أحد البواقي معدوم نتوقف من عملية القسمة ونقرّ بأن العدد 319 غير أولي.

حل التمرين رقم 27:

ليكن d هو قاسم موجب مشترك للعددين $5a+b$ و $9a+2b$.

d يقسم $5a+b$ و $9a+2b$ فهو يقسم $9(5a+b)$ و يقسم $5(9a+2b)$ فهو يقسم الفرق بينهما $5(9a+2b)-9(5a+b)=b$.

بما أن a و b عددان أوليان فيما بينهما فإن القاسم المشترك الموجب الوحيد هو 1 إذن $d=1$ وبما أن d لا يأخذ إلا القيمة 1 فإن $5a+b$ و $9a+2b$ أوليان فيما بينهما .

استعد للبكالوريا تمارين محلولة

التمرين رقم 01 :

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 5 .

2) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7 .

3) استنتج قيم n التي يكون من أجلها باقي قسمة 2^n على 5 وعلى 7 هو 4 .

التمرين رقم 02 :

1) حلل العدد 1998 إلى جداء عوامله الأولية ثم عين مجموعة قواسمه.

2) a و b عددان طبيعيان ، d هو القاسم المشترك الأكبر لهما ، m المضاعف المشترك الأصغر لهما بحيث :

$$\begin{cases} m+d=1998 \\ 27<d<54 \end{cases} \quad (1).....$$

أ) بين أن d يقسم 1998 ثم عين d .

ب) عين الثنائيات الطبيعية غير المعدومة (a,b) التي تحقق الجملة (1)

التمرين رقم 03 :

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 .

2) استنتج باقي قسمة العدد $(2019)^{1954}+3^{1962}+(1830)^{2014}$ على 7 .

3) بين أن العدد $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha$ يقبل القسمة على 4 من أجل كل عدد طبيعي α .

4) عين مجموعة الأعداد الطبيعية α بحيث $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 0[28]$

التمرين رقم 04 :

1) أوجد مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث $5x\equiv 12[13]$.

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x-13y=12$.

3) n عدد طبيعي يكتب $\overline{3\alpha0\alpha2}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $\overline{5\beta6\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 .

أوجد قيمة كل من α و β ثم استنتج قيمة n .

التمرين رقم 05 :

N عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 7 على الشكل : $N=\overline{63\alpha4}$.

عين العدد الطبيعي α حتى يكون N قابلا القسمة على 6 .

التمرين رقم 06 :

α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

1) عين α و β بحيث $35\beta=\alpha(\alpha^2-19)$ مع $\alpha>\beta$.

2) (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q حيث u_0 و q أوليان فيما بينهما مع $u_0<q$.

أوجد u_0 و q علما أن $35u_0^2+19u_1=u_0q^3$.

3) نضع $S_n=u_0+u_1+.......+u_n$ و $P_n=u_0\times u_1\times.......\times u_n$. أحسب S_n و P_n بدلالة n .

4) أوجد قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S_n قابلا القسمة على 30 .

التمرين رقم 07 :

n عدد طبيعي غير معدوم ، a و b عددان طبيعيان بحيث : $a=3^n\left(11^{n+2}-11^n\right)$ و $b=11^n\left(3^{n+1}-3^n\right)$. عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

التمرين رقم 08

n عدد طبيعي أكبر من أويساوي 6 .

نضع $a=3n+2$ ، $b=n-5$.

1) أحسب $a-3b$.

2) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(a\,;b)$.

3) عين قيمة n الطبيعية التي من أجلها يكون $\begin{cases}PGCD(a;b)=17\\ PPCM(a;b)\leq 150\\ a>b\end{cases}$

التمرين رقم 09

a و b عددان طبيعيان حيث $0<a\leq b$. نضع $m^2-5d^2=2000$ حيث $PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$

1) عين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2000 .

2) بين أنه إذا كانت الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة $m^2-5d^2=2000$. فإن d^2 يقسم العدد 2000

3) استنتج القيم الممكنة للعددين a و b .

التمرين رقم 10

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $9a-14b=13$ علما أن $(3;1)$ حل خاص لها.

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $45x-28y=130$ .... (1) .

بين أنه إذا كانت الثنائية حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5

و استنتج حلول المعادلة (1).

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام التعداد ذو الأساس 9 ويكتب $\overline{5\beta\beta6}$ في نظام التعداد ذو الأساس 7 . عين α و β ثم أكتب N في الأساس 10.

التمرين رقم 11

1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180 .

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $225x-180y=90$ .... (1) .

3) من بين حلول المعادلة (1) عين التي تحقق $|x-y+1|<2$.

4) a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ و $\overline{252}$ في النظام ذو الأساس α ويكتبان 44 و 206 في النظام ذو الأساس β .

5) عين α و β ثم استنتج a و b .

التمرين رقم 12

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10.

2) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $63\times9^{2001}-7^{1422}$ على 10 .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv(n-1)\times3^{2n+1}[10]$.

4) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv0[10]$.

التمرين رقم 13 :

1) أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009 على 11 .

ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{10} على 11 .

ج) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2009+2^{2009}$ على 11 .

2) p عدد طبيعي . نعتبر من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد A_n حيث $A_n=2^n+p$ و نرمز d_n إلى $PGCD$ لـ A_n و A_{n+1} .

أ) بيّن أن d_n يقسم 2^n .

ب) عيّن شفعية A_n بدلالة شفعية p .

ج) عيّن شفعية d_n بدلالة شفعية p .

استنتج $PGCD$ للعددين $2009+2^{2009}$ و $2009+2^{2010}$.

التمرين رقم 14 :

1) أكتب مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقسم العدد 6 .

2) عيّن الأعداد الصحيحة n حيث $n-4$ يقسم 6 .

3)عيّن الأعداد الصحيحة n حيث $n-4$ يقسم $n+2$.

4)عيّن الأعداد الصحيحة n حيث $n+1$ يقسم $3n-4$.

التمرين رقم 15:

1) تحقق أن 7 يقسم الأعداد : 2^6-1 ؛ 3^6-1 ؛ 4^6-1 و 5^6-1 .

2) ليكن n عدد طبيعي . نعتبر العدد A_n حيث $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n$. بيّن أن $A_{n+6}\equiv A_n[7]$.

3) ليكن n عدد طبيعي ، q و r حاصل وباقي قسمة n على 6 .

أ) بيّن أن A_n و A_r لهما نفس باقي قسمتهما على 7 .

ب) عيّن قيم r التي من أجلها يكون $A_r \equiv 0[7]$. استنتج قيم n التي من أجلها يكون A_n يقبل القسمة على 7 .

4) ليكن $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.

أ) بيّن أن $B_n - A_n$ مضاعف للعدد 7 .

ب) **هل العدد** B_{2006} يقبل القسمة على 7 ؟.

التمرين رقم 16:

1)أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n+3$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم.

2) بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a , b , c فإن المساواة التالية دوما صحيحة $PGCD(a, b) = PGCD(bc - a, b)$.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 فإن المساواة التالية دوما صحيحة $PGCD(3n^3 - 11n, n+3) = PGCD(48, n+3)$.

4) أ) عين جميع القواسم الطبيعية للعدد 48.

ب) استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث : $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ يكون عددا طبيعيا.

التمرين رقم17 :

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_1) ذات المجهول (x, y) : $11x + 8y = 79$

أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حل للمعادلة (E_1) فإن $y \equiv 3[11]$.

ب) حل المعادلة (E_1).

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) ذات المجهول (y, z) : $3y + 11z = 372$

أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (y, z) حل للمعادلة (E_2) فإن $z \equiv 0[3]$.

ب) حل المعادلة (E_2).

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_3) ذات المجهول (x, z) : $3x - 8z = -249$

4) السعر الكلي لـ 41 قطعة حديدة ، موزعة في ثلاث علب هو $480DA$.

سعر كل قطعة من العلبة الأولى هو $48DA$

سعر كل قطعة من العلبة الثانية هو $36DA$

سعر كل قطعة من العلبة الثالثة هو $4DA$

عين عدد القطع في كل علبة .

التمرين رقم 18 :

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x - 3y = 2$

2) A عدد طبيعي يكتب $\overline{55}$ في النظام ذي الأساس x ويُكتب $\overline{37}$ في النظام ذي الأساس y حيث $x \le 12$ و $y \le 20$ عين القيم الممكنة للعددين x و y ثم أكتب A في النظام ذي الأساس 10 .

التمرين رقم 19:

n عدد طبيعي

1) بين أن $PGCD\left(n^2+5n+7\ ,\ n+1\right)=PGCD\left(n+1\ ,\ 3\right)$

2) استنتج قيم n الطبيعية التي من أجلها يكون n^2+5n+7 و $n+1$ أوليين فيما بينهما.

التمرين رقم 20:

1) بين انه من أجل كل $\left(a\ ,b\ ,q\right)\in\mathbb{Z}^3$: $PGCD\left(a,b\right)=PGCD\left(b,a-bq\right)$

2) بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{Z}$ ، $PGCD\left(5n^3-n,n+2\right)=PGCD\left(n+2,38\right)$

3) عين مجموعة قيم n الصحيحة بحيث $\left(n+2\right)$ يقسم $\left(5n^3-n\right)$.

التمرين رقم 21 :

N عدد طبيعي .

1) أعط في جدول البواقي الممكنة لـ N بترديد 9 ثم لـ N^2 بترديد 9

2) نفرض أنه يوجد عددان طبيعيان a و b بحيث : $a^2-250507=b^2$. عين البواقي الممكنة لـ $a^2-250507$ بترديد 9 واستنتج البواقي الممكنة لـ a^2 بترديد 9 .

3) بين أن البواقي الممكنة لـ a بترديد 9 هي فقط 1 و 8 .

التمرين رقم 22:

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 13.

2) استنتج أن العدد $1981^{1981}-5$ يقبل القسمة على 13

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 فإن العدد $31^{4n+1}+18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13

التمرين رقم 23:

c طبيعي عدد أولي. عين c حتى يكون $11c+1$ مربعا تاما.

حلول استعـــــــد للبكالوريا

حل التمرين رقم 01 :

1) $2^0 \equiv 1[5]$,$2^1 \equiv 2[5]$,$2^2 \equiv 4[5]$, $2^3 \equiv 3[5]$, $2^4 \equiv 1[5]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 4 . نقسم الأس n على الدور 4 فنجد $n = 4k + r$ حيث $0 \le r < 4$

من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي :

إذا كان $r =$	فإن $n =$	وبالتالي باقي قسمة العدد 2^n على 5 هو
0	$n = 4k$	1
1	$n = 4k + 1$	2
2	$n = 4k + 2$	4
3	$n = 4k + 3$	3

2) $2^0 \equiv 1[7]$, $2^1 \equiv 2[7]$,$2^2 \equiv 4[7]$, $2^3 \equiv 1[7]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 3 . نقسم الأس n على الدور 3 فنجد $n = 3k' + r$ حيث $0 \le r < 3$

من أجل كل عدد طبيعي k' نلخص في الجدول التالي :

إذا كان $r =$	فإن $n =$	وبالتالي باقي قسمة العدد 2^n على 7 هو
0	$n = 3k'$	1
1	$n = 3k' + 1$	2
2	$n = 3k' + 2$	4

3) باقي قسمة 2^n على 5 وعلى 7 هو 4 يعني $4k + 2 = 3k' + 2$ أي $4k = 3k'$

لدينا 3 يقسم الجداء $4k$ و 3 أولي مع 4 إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم k أي $k = 3\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$

وبالتالي $n = 12\alpha + 2$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.

حل التمرين رقم 02 :

1) تحليل العدد 1998 : $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$

مجموعة قواسم العدد 1998:

1 2

1 3 9 27 نضرب كل عدد من السطر الثاني في السطر الأول ونضرب هذا الناتج في السطر الثالث نحصل على

1 37

كل قواسم العدد 1998 :

$$D_{1998} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 37, 74, 111, 222, 333, 666, 999, 1998\}$$

2) أ) نبين أن d يقسم 1998 ثم نعين d :

لدينا $\begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ و $m \times d = a \times b$ ومنه $m = a'b'd$ وبالتالي

$\begin{cases} m + d = 1998 \\ 27 < d < 54 \end{cases}$ (1)..... تكافئ $\begin{cases} (a'b'+1)d = 1998 \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ وبالتالي d يقسم 1998 .

وبما أن $27 < d < 54$ فإن $d = 37$

ب) تعيين الثنائيات (a,b) :

لدينا $\begin{cases} (a'b'+1)d = 1998 \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} a'b' = 53 \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ وبالتالي $(a',b') = (1,53)$ أو $(a',b') = (53,1)$

ومنه $(a,b) = (37,1961)$ أو $(a,b) = (1961,37)$.

حل التمرين رقم 03:

1) $3^0 \equiv 1[7]$, $3^1 \equiv 3[7]$, $3^2 \equiv 2[7]$, $3^3 \equiv 6[7]$, $3^4 \equiv 4[7]$, $3^5 \equiv 5[7]$, $3^6 \equiv 1[7]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 6 . نقسم الأس n على الدور 6 فنجد $n = 6k + r$ حيث $0 \le r < 6$

من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي :

إذا كان $r =$	فإن $n =$	وبالتالي باقي قسمة العدد 3^n على 7 هو
0	$n = 6k$	1
1	$n = 6k + 1$	3
2	$n = 6k + 2$	2
3	$n = 6k + 3$	6
4	$n = 6k + 4$	4
5	$n = 6k + 5$	5

2) باقي قسمة $(1830)^{2014} + 3^{1962} + (2019)^{1954}$ على 7 :

لدينا $1830 \equiv 3[7]$ و $2014 = 6 \times 335 + 4$ وبالتالي $(1830)^{2014} \equiv 3^{6\times335+4}[7]$ أي $(1830)^{2014} \equiv 4[7]$

لدينا $1962 = 6 \times 327$ ومنه $3^{1962} \equiv 3^{6\times327}[7]$ أي $3^{1962} \equiv 1[7]$

لدينا $2019 \equiv 3[7]$ و $1954 = 6 \times 325 + 4$ وبالتالي $(2019)^{1954} \equiv 3^{6\times325+4}[7]$ أي $(2019)^{1954} \equiv 4[7]$

وأخيرا $(1830)^{2014} + 3^{1962} + (2019)^{1954} \equiv 4 + 1 + 4[7]$ أي $(1830)^{2014} + 3^{1962} + (2019)^{1954} \equiv 2[7]$

3) نبين أن العدد $A = \alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha$ يقبل القسمة على 4

لدينا $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv \alpha \times 9^{\alpha} + 3\alpha[4]$ و $9^{\alpha} \equiv 1[4]$ أي $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 4\alpha[4]$ أي $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 0[4]$

4) تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية α بحيث $\alpha \times 3^{2\alpha} + 3\alpha \equiv 0[28]$

$\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 0[28]$ تكافئ $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 0[4]$ و $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 0[7]$ لأن $\begin{cases} 28=4\times 7 \\ PGCD(4,7)=1 \end{cases}$

- $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 0[4]$ من أجل كل عدد طبيعي α . بيناها سابقا.
- $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 0[7]$. كل عدد طبيعي α يكتب على الشكل $\alpha=3\lambda$ أو $\alpha=3\lambda+1$ أو $\alpha=3\lambda+2$ حيث $\lambda\in\mathbb{N}$.

✓ من أجل $\alpha=3\lambda$ لدينا $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 3\lambda\times 3^{6\lambda}+9\lambda[7]$ أي $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 5\lambda[7]$ ومنه $5\lambda\equiv 0[7]$ إذا كان $\lambda=7\beta$ حيث $\beta\in\mathbb{N}$ إذن $\alpha=21\beta$.

✓ من أجل $\alpha=3\lambda+1$ لدينا $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv(3\lambda+1)\times 3^{6\lambda+2}+9\lambda+3[7]$ أي $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv(3\lambda+1)\times 2+9\lambda+3[7]$ أي $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv\lambda+5[7]$ ومنه $\lambda+5\equiv 0[7]$ إذا كان $\lambda=2+7\beta$ حيث $\beta\in\mathbb{N}$ إذن $\alpha=7+21\beta$.

✓ من أجل $\alpha=3\lambda+2$ لدينا $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv(3\lambda+2)\times 3^{6\lambda+4}+9\lambda+6[7]$ أي $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv(3\lambda+1)\times 4+9\lambda+3[7]$ أي $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 21\lambda+7[7]$.

إذن قيم α التي من أجلها $\alpha\times 3^{2\alpha}+3\alpha\equiv 0[7]$ هي $\alpha=21\beta$ ، $\alpha=7+21\beta$ ، $\alpha=3\beta+2$ حيث $\beta\in\mathbb{N}$. أي $\alpha\equiv 2[3]$; $\alpha\equiv 7[21]$; $\alpha\equiv 0[21]$

حل التمرين رقم 04 :

1) $5x\equiv 12[13]$ تكافئ $15x\equiv 36[13]$ أي $2x\equiv 10[13]$ وأخيرا $x\equiv 5[13]$ وبالتالي $x=5+13k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2) نحل المعادلة $5x-13y=12$

$5x-13y=12$ تكافئ $5x\equiv 12[13]$ ومنه حلول المعادلة $5x-13y=12$ هي $\{(5+13k\ ;\ 1+5k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3) لدينا $\begin{cases} n=3\times 5^4+\alpha\times 5^3+5\alpha+2 \\ 0\le\alpha<5 \end{cases}$ و $\begin{cases} n=5\times 7^3+\beta\times 7^2+6\times 7+\beta \\ 0\le\beta<7 \end{cases}$

$\overline{3\alpha 0\alpha 2}^5=\overline{5\beta 6\beta}^7$ معناه $\begin{cases} 3\times 5^4+\alpha\times 5^3+5\alpha+2=5\times 7^3+\beta\times 7^2+6\times 7+\beta \\ 0\le\alpha<5 \text{ و } 0\le\beta<7 \end{cases}$ تكافئ

$\begin{cases} 50\beta-130\alpha=120 \\ 0\le\alpha<5 \text{ و } 0\le\beta<7 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 5\beta-13\alpha=12 \\ 0\le\alpha<5 \text{ و } 0\le\beta<7 \end{cases}$ نستنتج من السؤال السابق $\alpha=1$ و $\beta=5$ وتكون عندئذ $n=2007$

حل التمرين رقم 05 :

$N=\overline{63\alpha 4}^7$ الشرط $0\le\alpha<7$.

$N=\overline{63\alpha 4}^7=6\times 7^3+3\times 7^2+\alpha\times 7^1+4$.

$N\equiv 0[6]$ تكافئ $3+\alpha+4\equiv 0[6]$ ومنه $\alpha+1\equiv 0[6]$ أي $\alpha\equiv 5[6]$ ومنه $\alpha=5$ لأن $0\le\alpha<7$

حل التمرين رقم 06 :

1) تعيين α و β بحيث $35\beta=\alpha\left(\alpha^2-19\right)$ مع $\alpha>\beta$.

α يقسم الجداء 35β و α أولي مع β ، فحسب مبرهنة غوص α يقسم 35 ، ومنه $\alpha\in\{1\,;\,5\,;\,7\,;\,35\}$.

- في حالة $\alpha=1$ نحصل على $35\beta=-18$ أي $\beta=-\frac{8}{35}\notin\mathbb{N}$ وهذه الحالة مرفوضة.
- في حالة $\alpha=5$ نحصل على $35\beta=5\times6$ أي $\beta=\frac{6}{7}\notin\mathbb{N}$ وهذه الحالة مرفوضة.
- في حالة $\alpha=7$ نحصل على $35\beta=7\times30$ أي $\beta=6$ وهذه الحالة مقبولة

في حالة $\alpha=35$ نحصل على $35\beta=35\times1206$ أي $\beta=1206$ وهذه الحالة مرفوضة لأن $\alpha>\beta$. وأخيرا $\alpha=7$ و $\beta=6$.

2) لدينا $u_1=u_0q$ وبالتالي تصبح المعادلة $35u_0^2+19u_1=u_0q^3$ كالتالي $35u_0^2+19u_0q=u_0q^3$ ومنه $35u_0=q\left(q^2-19\right)$ حيث $u_0\neq0$.

حسب السؤال رقم 1) نعتبر $q=\alpha$ و $u_0=\beta$ وبالتالي $q=7$ و $u_0=6$.

3) $S_n=u_0+u_1+.......+u_n=6\times\frac{7^{n+1}-1}{7-1}=7^{n+1}-1$

$P_n=u_0\times u_1\times.......\times u_n=u_0\times\left(u_0\times q\right)\times.......\times\left(u_0\times q^n\right)=u_0^{n+1}\times q^{1+2+3+.....+n}$

المجموع $1+2+3+....+n$ هو مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1 وبالتالي

$P_n=u_0^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}$ أي $P_n=6^{n+1}\times7^{\frac{n(n+1)}{2}}$

4) تعيين قيم n بحيث $S_n\equiv0[30]$ أي بحيث $7^{n+1}-1\equiv0[30]$.

$7^{n+1}-1\equiv0[30]$ تعني $7^{n+1}-1\equiv0[6]$ و $7^{n+1}-1\equiv0[5]$ لأن 5 و 6 أوليان فيما بينهما.

✓ بما أن $7\equiv1[6]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n $7^{n+1}-1\equiv0[6]$.

✓ ندرس بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 5

$7^0\equiv1[5]$, $7^1\equiv2[5]$, $7^2\equiv4[5]$, $7^3\equiv3[5]$, $7^4\equiv1[5]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 4 . نقسم الأس n على الدور 4 فنجد $n=4k+r$ حيث $0\leq r<4$

من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي :

إذا كان $r=$	فإن $n=$	وبالتالي باقي قسمة العدد 7^n على 5 هو.
0	$n=4k$	1
1	$n=4k+1$	2
2	$n=4k+2$	4
3	$n=4k+3$	3

$7^{n+1}-1\equiv 0[5]$ معناه $7^{n+1}\equiv 1[5]$ وبالتالي $n+1=4k$ ومنه $n+1\equiv 0[4]$ أي $n\equiv 3[4]$

وأخيرا $S_n\equiv 0[30]$ من أجل $n=3+4p$ حيث p عدد طبيعي.

حل التمرين رقم 07 :

لدينا $a=3^n\left(11^{n+2}-11^n\right)=3^n\times 11^n\left(11^2-1\right)=\left(3\times 11\right)^n\times 120=33^n\times 120$

$b=11^n\left(3^{n+1}-3^n\right)=3^n\times 11^n\left(3-1\right)=\left(3\times 11\right)^n\times 2=33^n\times 2$

$PPCM\left(a;b\right)=PPCM\left(33^n\times 120\,;33^n\times 2\right)=33^n\times PPCM\left(120;\,2\right)=33^n\times 120$

إذن $PPCM\left(a;b\right)=33^n\times 120$.

حل التمرين رقم 08

1) $a-3b=3n+2-3\left(n-5\right)=17$.

2) ليكن $PGCD\left(a;b\right)=d$.

$\begin{cases} d\,|a \\ d\,|b\end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d\,|a \\ d\,|3b\end{cases}$ وبالتالي $d\,|\left(a-3b\right)$ أي $d\,|17$ وأخيرا $d\in\{1\,;\,17\}$

3) $PGCD\left(a;b\right)=17$ يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث $\begin{cases} a=17a' \\ b=17b'\end{cases}$

و $PPMC\left(a;b\right)=17a'b'$

بما أن $PPCM\left(a;b\right)\le 150$ فإن $17a'b'\le 150$ أي $a'b'\le 8,82$ أي $a'b'\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$

مع $a'>b'$ وبالتالي $\left(a',b'\right)\in\left\{\left(2,1\right);\left(3;1\right);\left(4,1\right);\left(5;1\right);\left(6;1\right);\left(7;1\right);\left(8;1\right);\left(3,2\right)\right\}$

ومنه $\left(a,b\right)\in\left\{\left(34,17\right);\left(51;14\right);\left(68,17\right);\left(85;17\right);\left(102;17\right);\left(119;17\right);\left(136;17\right);\left(51,34\right)\right\}$

لكن مما سبق بينّا أن $a-3b=17$ أي $a=3b+17$ وبالتالي الثنائية الوحيدة التي تحقق ذلك

هي $\left(a\,;b\right)=\left(68\,;17\right)$.

بما أن $b=n-5$ فإن $n=b+5=17+5=22$.

إذن قيمة n الطبيعية التي من أجلها يكون $\begin{cases} PGCD\left(a;b\right)=17 \\ PPCM\left(a;b\right)\le 150 \\ a<b\end{cases}$ هي $n=22$.

حل التمرين رقم 09

1) $2000=2^4\times 5^3$ ومنه القواسم المربعة التامة للعدد 2000 هي : $\alpha^2\in\left\{1;2^4;2^2;5^2;2^2\times 5^2;2^4\times 5^2\right\}$

أي $\alpha^2\in\left\{1;4^2;2^2;5^2;10^2;20^2\right\}$ إذن $\alpha\in\{1;2;4;5;10;20\}$

2) $PGCD\left(a;b\right)=d$ يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث $\begin{cases} a=a'\times d \\ b=b'\times d\end{cases}$

و $m=a'b'd$ وبالتالي

$m^2-5d^2=2000$ تكافئ $(a'b'd)^2-5d^2=2000$ أي $\left((a'b')^2-5\right)d^2=2000$ ومنه d^2 يقسم العدد 2000.

3) من أجل $d^2=1$ فإن $\left((a'b')^2-5\right)=2000$ أي $(a'b')^2=2005$ ومنه $a'b'=\sqrt{2005}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2=4^2$ فإن $\left((a'b')^2-5\right)=125$ أي $(a'b')^2=130$ ومنه $a'b'=\sqrt{130}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2=2^2$ فإن $\left((a'b')^2-5\right)=500$ أي $(a'b')^2=505$ ومنه $a'b'=\sqrt{505}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2=5^2$ فإن $\left((a'b')^2-5\right)=80$ أي $(a'b')^2=85$ ومنه $a'b'=\sqrt{85}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2=20^2$ فإن $\left((a'b')^2-5\right)=5$ أي $(a'b')^2=10$ ومنه $a'b'=\sqrt{10}$ حالة مرفوضة.

من أجل $d^2=10^2$ فإن $\left((a'b')^2-5\right)=20$ أي $(a'b')^2=25$ ومنه $a'b'=5$ **حالة مقبولة**.

إذن $(a';b')=(1;5)$ لأن $0<a\le b$ وبالتالي $(a;b)=(10;50)$

حل التمرين رقم 10

1) لدينا $\begin{cases} 9a-14b=13 \\ 9(3)-14(1)=13 \end{cases}$ ومنه $9(a-3)=14(b-1)$

14 يقسم الجداء $9(a-3)$ و 14 أولي مع 9 فحسب مبرهنة غوص 14 يقسم $a-3$ ومنه $a=3+14k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ثم نجد $b=1+9k$.

إذن حلول المعادلة $9a-14b=13$ هي $(a;b)=(3+14k\ ;1+9k),\ k\in\mathbb{Z}$

2) لدينا $45x-28y=130$ تكافئ $\begin{cases} 45x=28y+130 \\ 28y=45x-130 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 45x=2(14y+65) \\ 28y=5(9x-26) \end{cases}$

2 يقسم $45x$ و 2 أولي مع 45 فحسب مبرهنة غوص 2 يقسم x أي x مضاعف للعدد 2 .

5 يقسم $28y$ و 5 أولي مع 28 فحسب مبرهنة غوص 5 يقسم y أي y مضاعف للعدد 5 .

إذن $x=2\lambda$ و $y=5\lambda'$ حيث λ و λ' عددان صحيحان.

$45x-28y=130$ تكافئ $45(2\lambda)-28(5\lambda')=130$ أي $9\lambda-14\lambda'=13$ فحسب السؤال الأول نجد $\begin{cases} \lambda=3+14k \\ \lambda'=1+9k \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} x=6+28k \\ y=5+45k \end{cases}$.

وأخيرا حلول المعادلة $45x-28y=130$ هي $(x\ ;y)=(6+28k\ ;5+45k),\ k\in\mathbb{Z}$

3) $N=\overline{2\alpha\alpha3}^{9}=\overline{5\beta\beta6}^{7}$ حيث $0\le\beta\le6$ و $0\le\alpha\le8$.

إذن : $2\times9^3+\alpha\times9^2+9\alpha+3=5\times7^3+\beta\times7^2+7\beta+6$ بعد التبسيط نجد $45\alpha-28\beta=130$

فحسب ما سبق نجد $\begin{cases} \alpha=6+28k \\ \beta=5+45k \end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ بما أن $0\le\beta\le6$ و $0\le\alpha\le8$. فنجد $\begin{cases} \alpha=6 \\ \beta=5 \end{cases}$

ومنه $N = 2\times 9^3 + 6\times 9^2 + 9\times 6 + 3 = 2001$

حل التمرين رقم 11

1) لدينا $225 = 3^2\times 5^2$ و $180 = 2^2\times 3^2\times 5$ ومنه $PGCD(225;180) = 45$.

2) $225x - 180y = 90$ تكافئ $5x - 4y = 2$. نلاحظ بسهولة أن الثنائية $(2\,;2)$ حلا خاصا لها

وبالتالي $5x - 4y = 2$ تكافئ $5(x-2) = 4(y-2)$ وباستعمال مبرهنة غوص نجد

$x = 2+4k$ و $y = 2+5k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

3) $|x-y+1|<2$ تكافئ $-2<x-y+1<2$ تكافئ $-2<(2+4k)-(2+5k)+1<2$ أي

$-2<-k+1<2$ ومنه $-3<-k<1$ أي $-1<k<3$ وبالتالي $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$.

- من أجل $k=0$ نجد $x=2$ و $y=2$.
- من أجل $k=1$ نجد $x=6$ و $y=7$
- من أجل $k=2$ نجد $x=10$ و $y=12$

وأخيرا الثنائيات الطبيعية $(x\,;y)$ التي تحقق $|x-y+1|<2$ هي $\{(2;2),(6;7);(10;12)\}$.

4) لدينا $a = \overline{52}^{\alpha} = \overline{44}^{\beta}$ و $b = \overline{252}^{\alpha} = \overline{206}^{\beta}$ حيث $\alpha>5$ و $\beta>6$ وبالتالي :

$$\begin{cases} 5\alpha+2 = 4\beta+4 \\ 2\alpha^2+5\alpha+2 = 2\beta^2+6 \\ \alpha>5 \quad ; \quad \beta>6 \end{cases}$$

المعادلة $5\alpha+2 = 4\beta+4$ تكافئ $5\alpha-4\beta = 2$ وحسب ما سبق يكون $\alpha = 2+4k$ و $\beta = 2+5k$

حيث $k\in\mathbb{Z}$. نعوض في المعادلة $2\alpha^2+5\alpha+2 = 2\beta^2+6$ فنجد

$2(2+4k)^2+5(2+4k)+2 = 2(2+5k)^2+6$ فنجد بعد التبسيط $-18k^2+12k+6=0$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $k=1$ لأن $k=-\dfrac{1}{3}$ مرفوض.

وأخيرا من أجل $k=1$ يكون $\alpha = 4+2 = 6$ و $\beta = 5+2 = 7$

وبالتالي $a = 5\alpha+2 = 5\times 6+2 = 32$

و $b = 2\alpha^2+5\alpha+2 = 5\times 36+5\times 6+2 = 104$

حل التمرين رقم 12

1) $3^0\equiv 1[10]$, $3^1\equiv 3[10]$, $3^2\equiv 9[10]$, $3^3\equiv 7[10]$, $3^4\equiv 1[10]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 4 . نقسم الأس n على الدور 4 فنجد $n = 4k+r$ حيث $0\le r<4$

من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي :

إذا كان $r =$	فإن $n =$	وبالتالي باقي قسمة العدد 3^n على 7 هو
0	$n = 4k$	1
1	$n = 4k + 1$	3
2	$n = 4k + 2$	9
3	$n = 4k + 3$	7

2) باقي القسمة الإقليدية للعدد $63 \times 9^{2001} - 7 \times 7^{1422}$ على 10 .

لدينا $63 \equiv 3[10]$ و $9 \equiv -1[10]$ فإنّ $9^{2001} \equiv -1[10]$ ومنه $63 \times 9^{2001} \equiv -3[10]$.

لدينا $7 \equiv -3[10]$ و $7^{1422} \equiv (-3)^{1422}[10]$ فإنّ $7^{1422} \equiv 3^{1422}[10]$. وبما أن $1422 = 4 \times 355 + 2$ فإن $3^{1422} \equiv 9[10]$ أي $7^{1422} \equiv 9[10]$ وبالتالي $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv -12[10]$.

وأخيرا $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8[10]$.

3) نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3n \times 3^{2n} + (-3)^{2n+1}[10]$ تكافئ $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv n \times 3^{2n+1} + (-3)^{2n+1}[10]$ أي $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv n \times 3^{2n+1} - 3^{2n+1}[10]$ أي $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}[10]$

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$.

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ تكافئ $(n-1)3^{2n+1} \equiv 0[10]$ أي $n-1 \equiv 0[10]$.

وأخيرا $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ من أجل $n \equiv 1[10]$ أي $n = 10\lambda + 1$ حيث λ عدد طبيعي.

حل التمرين رقم 13 :

1)

أ) $2009 = 11 \times 182 + 7$ ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009 على 11 هو 7 ونكتب $2009 \equiv 7[11]$

ب) $2^{10} \equiv 2^{5\times 2}[11]$ تكافئ $2^{10} \equiv (2^5)^2[11]$ أي $2^{10} \equiv (32)^2[11]$ ونكتب كذلك $2^{10} \equiv (-1)^2[11]$ أي $2^{10} \equiv 1[11]$.

ج) $2^{2009} \equiv (2^{10})^{200} \times (2^9)[11]$ ومنه $2^{2009} \equiv (1)(-5)[4]$ وبالتالي $2^{2009} + 2009 \equiv -5 + 7[11]$

إذن $2^{2009} + 2009 \equiv 2[11]$

2) أ) d_n يقسم A_n و A_{n+1} فهو يقسم الفرق

$$A_{n+1} - A_n = 2^{n+1} + p - 2^n - p = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$$

إذن d_n يقسم 2^n.

ب) لدينا $n > 0$ ، 2^n زوجي ومنه $A_n = 2^n + p$ له نفس الشفعية مثل p .

ج) A_n و A_{n+1} لهما نفس الشفعية (مثل p):

- إذا كان p فرديا فإن A_n و A_{n+1} كذلك ومنه كذلك $PGCD$ فردي.
- إذا كان p زوجيا فإن A_n و A_{n+1} كذلك ومنه كذلك $PGCD$ زوجي .

حسب ماسبق $PGCD$ للعددين $2^{2009}+2009$ و $2^{2010}+2009$ هو فردي لأن 2009 فردي. هذا من جهة ومن جهة أخرى $PGCD$ يقسم 2^{2009} . مجموعة القواسم الموجبة للعدد 2^{2009} هي $D_{2^{2009}}=\{1\,,2\,,2^2\,,2^3\,,........,2^{2009}\}$.

$PGCD$ للعددين $2^{2009}+2009$ و $2^{2010}+2009$ هو القاسم الوحيد الفردي لـ 2^{2009} هو إذن **1**.

حل التمرين رقم 14 :

1) $S_1=\{-6\,;-3\,;-2\,;-1\,;1\,;2\,;3\,;6\,\}$

2) إذا كان $(n-4)\in S_1$ فإن $n\in\{\,-2\,;1\,;2\,;3\,;5\,;6\,;7\,;10\,\}$

3) $n+2=(n-4)+6$ و منه $n-4$ يقسم $n+2$ إذا وفقط إذا كان $n-4$ يقسم 6 .
أي $n\in\{\,-2\,;1\,;2\,;3\,;5\,;6\,;7\,;10\,\}$.

4) $3n-4=3(n+1)-7$ و منه $n+1$ يقسم $3n-4$ إذا وفقط إذا كان $n+1$ يقسم 7 أي $(n+1)\in\{\,-7\,;-1\,;7\,\}$ و منه $n\in\{\,-8\,;-2\,;0\,;6\,\}$.

حل التمرين رقم 15 :

1)

- $2^6-1=63=7\times9$ ومنه 2^6-1 يقبل القسمة على 7 .
- $3^6-1=728=7\times104$ ومنه 3^6-1 يقبل القسمة على 7 .
- $4^6-1=4095=7\times585$ ومنه 4^6-1 يقبل القسمة على 7 .
- $5^6-1=15624=7\times2232$ ومنه 5^6-1 يقبل القسمة على 7 .

2) $$A_{n+6}-A_n=\left(2^{n+6}+3^{n+6}+4^{n+6}+5^{n+6}\right)-\left(2^n+3^n+4^n+5^n\right)$$

$$A_{n+6}-A_n=2^{n+6}+3^{n+6}+4^{n+6}+5^{n+6}-2^n-3^n-4^n-5^n$$

$$A_{n+6}-A_n=2^{n+6}-2^n+3^{n+6}-3^n+4^{n+6}+5^{n+6}-3^n-4^n-5^n$$

$$A_{n+6}-A_n=2^n\left(2^6-1\right)+3^n\left(3^6-1\right)+4^n\left(4^6-1\right)+5^n\left(5^6-1\right)$$

بما أن $5^6-1\equiv0[7]\;\;;\;\;4^6-1\equiv0[7]\;\;;\;\;3^6-1\equiv0[7]\;\;;\;\;2^6-1\equiv0[7]$ فإن $A_{n+6}-A_n\equiv0[7]$ أي

$$A_{n+6}\equiv A_n[7]$$

3) أ) لدينا $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n=2^{6q+r}+3^{6q+r}+4^{6q+r}+5^{6q+r}$ أو بعبارة أخرى $A_n=2^{6q}\times2^r+3^{6q}\times3^r+4^{6q}\times4^r+5^{6q}\times5^r$ ولدينا مما سبق

$2^6 \equiv 1[7]$; $3^6 \equiv 1[7]$; $4^6 \equiv 1[7]$; $5^6 \equiv 1[7]$ ومنه

$2^{6q} \equiv 1[7]$; $3^{6q} \equiv 1[7]$; $4^{6q} \equiv 1[7]$; $5^{6q} \equiv 1[7]$ إذن

$A_n \equiv 2^r + 3^r + 4^r + 5^r[7]$ أي $A_n \equiv A_r[7]$ ومنه A_n و A_r لهما نفس باقي القسمة على 7 .

ب) تعيّين قيم r التي من أجلها يكون $A_r \equiv 0[7]$.

- إذا كان $r=0$ فإن $A_0 = 2^0+3^0+4^0+5^0 = 4$ ومنه $A_0 \equiv 4[7]$.
- إذا كان $r=1$ فإن $A_1 = 2^1+3^1+4^1+5^1 = 14 = 2\times 7$ ومنه $A_1 \equiv 0[7]$.
- إذا كان $r=2$ فإن $A_2 = 2^2+3^2+4^2+5^2 = 54 = 7\times 7+5$ ومنه $A_2 \equiv 5[7]$.
- إذا كان $r=3$ فإن $A_3 = 2^3+3^3+4^3+5^3 = 224 = 7\times 32$ ومنه $A_3 \equiv 0[7]$.
- إذا كان $r=4$ فإن $A_4 = 2^4+3^4+4^4+5^5 = 978 = 7\times 139+5$ ومنه $A_4 \equiv 5[7]$.
- إذا كان $r=5$ فإن $A_5 = 2^5+3^5+4^5+5^5 = 4424 = 7\times 632$ ومنه $A_5 \equiv 0[7]$.

إذن $A_r \equiv 0[7]$ تكافئ $r=1$ أو $r=3$ أو $r=5$

لدينا $A_n \equiv A_r[7]$ ومنه A_n يقبل القسمة على 7 يكافئ $A_n \equiv 0[7]$ إذن $n \in \{6q+1\ ;\ 6q+3\ ;6q+5\}$

$B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$

أ) لدينا $100 \equiv 2[7]$; $101 \equiv 3[7]$; $102 \equiv 4[7]$; $103 \equiv 5[7]$ ومنه

$100^n \equiv 2^n[7]$; $101^n \equiv 3^n[7]$; $102^n \equiv 4^n[7]$; $103^n \equiv 5^n[7]$ ونستنتج أن

$B_n \equiv 2^n + 3^n + 4^n + 5^n[7]$ أي $B_n \equiv A_n[7]$ ومنه $B_n - A_n$ مضاعف للعدد 7 .

ب) لدينا $B_n - A_n$ مضاعف للعدد 7 معناه $B_n - A_n = 7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. B_n يقبل القسمة على 7 معناه $B_n = 7k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$ تكافئ $A_n = 7(k'-k)$ أي A_n يقبل القسمة على 7 ومنه B_n يقبل القسمة على 7 وهذا يكافئ باقي قسمة العدد الطبيعي n على 6 هو عدد فردي ، ولكن $2006 = 6\times 334+2$ ومنه الباقي عدد زوجي وبالتالي B_{2006} لا يقبل القسمة على 7.

حل التمرين رقم 16:

1)أ) نأخذ القسمة الإقليدية للعدد $3n^3 - 11n + 48$ على $n+3$ فنجد

$3n^3 - 11n + 48 = (n+3)(3n^2 - 9n + 16)$ ومنه العدد $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n+3$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد صحيح.

تبيان أن $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم ، ندرس إشارة كثير الحدود $3x^2 - 9x + 16$. المميز $\Delta = 81 - 4(16)(3) = -111$ ، $\Delta < 0$ ومنه كثير الحدود $3x^2 - 9x + 16$ ليس له جذور في $\mathbb{R}$ وله نفس إشارة معامل x^2أي

موجب تماما ونستنتج أن العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم.

2) نبين $PGCD(a\ ,b) = PGCD(bc - a\ ,b)$ ، a , b, c أعداد طبيعية غير معدومة.

- إذا كان d هو قاسم مشترك للعددين a و b فإن d يقسم bc ويقسم $bc-a$ وبالتالي d هو قاسم مشترك للعددين $bc-a$ و b.
- ليكن d هو قاسم مشترك للعددين $bc-a$ و b.

d يقسم b فإن d يقسم bc وبما أن d يقسم $bc-a$ نستنتج أن d يقسم $bc-(bc-a)=a$ ومنه d هو قاسم مشترك للعددين a و b .

بيّنا إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b تساوي مجموعة القواسم المشتركة للعددين $bc-a$ و b ومنه $PGCD(a,b)=PGCD(bc-a,b)$.

3) نبين $PGCD(3n^3-11,n+3)=PGCD(48,n+3)$.

نضع $a=3n^3-11n$ و $b=n+3$ و $c=3n^2-9n+16$

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ فإن a,b,c أعداد طبيعية غير معدومة. نستعمل السؤال السابق

لدينا $bc-a=(n+3)(3n^2-9n+16)-(3n^3-11n)=48$

إذن $PGCD(3n^3-11n,n+3)=PGCD(48,n+3)$ حيث $n\geq 2$.

4) أ) القواسم الطبيعية للعدد 48 هي $D_{48}=\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$

ب) ليكن $n\geq 2$. حتى يكون $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا يجب أن يكون $3n^3-11n$ يقبل القسمة على $n+3$ أي $3n^3-11n$ مضاعف $n+3$ أو $PGCD(3n^3-11n\ ,n+3)=n+3$.

وجدنا سابقا $PGCD(3n^3-11n,n+3)=PGCD(48,n+3)$ ومنه $PGCD(48,n+3)=48$ أي $n+3$ من قواسم 48 و $n+3\geq 5$

وبالتالي $(n+3)\in\{\ ,6,8,12,16,24,48\}$ وبالتالي $n\in\{3,5,9,13,21,45\}$.

ندرس الحالتين الخاصتين $n=1$, $n=0$

من أجل $n=0$ فإن $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}\in\mathbb{N}$.

من أجل $n=1$ فإن $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}\notin\mathbb{N}$.

وأخيرا مجموعة قيم n الطبيعية حتى يكون $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا هي $n\in\{0,3,5,9,13,21,45\}$.

حل التمرين رقم 17:

1) أ) لدينا $11x+8y=79$ ومنه $8y-79=-11x$ إذن 11 يقسم $8y-79$ أي $8y-79\equiv 0[11]$ $8y-79\equiv 0[11]$ تكافئ $8y\equiv 79[11]$ أي $8y\equiv 2[11]$ تكافئ $56y\equiv 14[11]$ أي $y\equiv 3[11]$.

ب) $y\equiv 3[11]$ تكافئ $y=3+11k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبعد التعويض بـ $y=3+11k$ في المعادلة $11x+8y=79$ نجد $x=5-8k$. وأخيرامجموعة حلول المعادلة $11x+8y=79$ هي $S=\{(5-8k\ ,3+11k),k\in\mathbb{Z}\}$.

2) أ) $3y+11z=372$ تكافئ $11z=372-3y=3(124-y)$ تكافئ 3 تقسم $11z$. بما أن 3 اولي مع 11 فإن 3 يقسم z أي $z\equiv 0[3]$.

ب) $z\equiv 0[3]$ تكافئ $z=3k'$ حيث $k'\in\mathbb{Z}$ نعوض في المعادلة $3y+11z=372$ فنجد $y=124-11k'$

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $3y+11z=372$ هي $S'=\{(124-11k',3k'),k'\in\mathbb{Z}\}$

3) $3x-8z=-249$ تكافئ $3x+249=8z$ تكافئ $3(x+83)=8z$ تكافئ 3 يقسم $8z$ وبما أن 3 و 8 أوليان فيما بينهما فإن 3 يقسم z أي $z=3k''$ حيث $k''\in\mathbb{Z}$ نعوض في المعادلة $3x+249=8z$ فنجد $x=-83+8k''$

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $3x+249=8z$ هي $S''=\{(-83+8k'',3k''),k''\in\mathbb{Z}\}$

ليكن x عدد قطع العلبة الأولى و y عدد قطع العلبة الثانية و z عدد قطع العلبة الثالثة .

إذن $x+y+z=41.......(1)$ و $48x+36y+4z=480$ أي $12x+9y+z=120.......(2)$

لدينا إذن $\begin{cases} x+y+z=41.......(1) \\ 12x+9y+z=120.......(2) \end{cases}$ نستخرج من **(1)** : $z=41-x-y$ ونعوضها في (2) فنجد

$12x+9y+41-x-y=120$ أي $11x+8y=79$ وهي المعادلة (E_1) ى فيكون $x=5-8k$ و $y=3+11k$

بما أن x يمثل عدد من القطع فهو موجب إذن هذا يؤدي إلى $k=0$ فنحصل على $x=5$ و $y=3$ و $z=41-5-3=33$

حل التمرين رقم 18:

1) $5x-3y=2$ تكافئ $5x-2=3y$ تكافئ $5x-2\equiv 0[3]$ تكافئ $5x\equiv 2[3]$ تكافئ $2\times 5x\equiv 2\times 2[3]$ أي $10x\equiv 4[3]$

ومنه $x\equiv 1[3]$ تكافئ $x=1+3k$ حيث k عدد صحيح. نعوض مباشرة في المعادلة $5x-3y=2$ فنجد $y=1+5k$

وأخيرا $S=\{(1+3k\ ;1+5k\ )/k\in\mathbb{Z}\}$.

2) $A=5+5x=7+3y$ أي $5x-3y=2$ وحسب السؤال السابق وجدنا $x=1+3k$ و $y=1+5k$

لدينا $\begin{cases} 5<x\leq 12 \\ 7<y\leq 20 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 5<1+3k\leq 12 \\ 7<1+5k\leq 20 \end{cases}$ **تكافئ** $\begin{cases} 4<3k\leq 11 \\ 6<5k\leq 19 \end{cases}$ **تكافئ** $\begin{cases} \frac{4}{3}<k\leq\frac{11}{3} \\ \frac{6}{5}<k\leq\frac{19}{5} \end{cases}$ ومنه $k=2$ أو $k=3$.

من أجل $k=2$ **نجد** $x=1+3(2)=7$ و $y=1+5(2)=11$ ومنه $A=5+5(7)=40$.

من أجل $k=3$ **نجد** $x=1+3(3)=10$ و $y=1+5(3)=16$ ومنه $A=5+5(10)=55$

حل التمرين رقم 19 :

1) يكفي أن نبين أنه يوجد عددان صحيحان a و b بحيث $n^2+5n+7=(n+1)(an+b)+3$

$n^2+5n+7=(n+1)(an+b)+3=an^2+(a+b)n+(b+3)$ بالمطابقة نجد $\begin{cases} a=1 \\ a+b=5 \\ b+3=7 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$

إذن $n^2+5n+7=(n+1)(n+4)+3$ من أجل كل عدد طبيعي n . ومنه

$PGCD\left(n^2+5n+7\ ,\ n+1\right)=PGCD\left(n+1\ ,\ 3\right)$

2) يكون n^2+5n+7 و $n+1$ أوليين فيما بينهما تكافئ $PGCD\left(n^2+5n+7\ ,\ n+1\right)=1$ وحسب ما سبق $PGCD\left(n+1\ ,\ 3\right)=1$ أي $n+1$ و 3 أوليان فيما بينهما وبالتالي $n+1$ لا يقبل القسمة على 3، إذن $n+1\equiv1[3]$ أو $n+1\equiv2[3]$ وهذا يكافئ $n\equiv0[3]$ أو $n\equiv1[3]$ أي $n=3k$ او $n=3k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

حل التمرين رقم 20:

1) نضع $d=PGCD(a\ ,b)$. إذا كان d يقسم a ويقسم b فإنه يقسم b و $(a-bq\ )$ وبالعكس إذا كان d يقسم b و $(a-bq\ )$ فإن d يقسم $(a-bq)+bq=a$.

2) $PGCD\left(5n^3-n,n+2\right)=PGCD\left(n+2,38\right)$ هي العلاقة السابقة مع $a=5n^3-n$ و $b=n+2$ و $q=5n^2-10n+19$.

3) $(n+2)$ يقسم $\left(5n^3-n\right)$ تكافئ $(n+2)$ تقسم 38 تكافئ $(n+2)\in\{-1\ ,-2\ ,-19\ ,-38\ ,1\ ,2\ ,19\ ,38\}$ أي $n\in\{-40\ ,-21\ ,-4\ ,-3\ ,-1\ ,0\ ,17\ ,36\}$.

حل التمرين رقم 21:

1) جدول البواقي الممكنة لـ N بترديد 9 و لـ N^2 بترديد 9

$N\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$[9]$
$N^2\equiv$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	$[9]$

2) $a^2-250507=b^2$ هو مربع تام ، فحسب الجدول السابق البواقي الممكنة لـ $a^2-250507$ بترديد 9 هي $0\ ,1\ ,4\ ,7$ إذن

$a^2-250507\equiv 0[9]$ أو $a^2-250507\equiv 1[9]$ أو $a^2-250507\equiv 4[9]$ أو
$a^2-250507\equiv 7[9]$

ولكن $250507\equiv 1[9]$ وبالتالي $a^2\equiv 1[9]$ أو $a^2\equiv 2[9]$ أو $a^2\equiv 5[9]$ أو $a^2\equiv 8[9]$

3) حسب الجدول السابق المربع لا يمكن أن يوافق بترديد 9 الأعداد 2 , 5 , 8 تبقى فقط الحالة الصحيحة
$a^2\equiv 1[9]$ والتي توافق $a\equiv 1[9]$ و $a\equiv 8[9]$.

حل التمرين رقم 22:

1) بواقي قسمة العدد 5^n على 13 :
$5^0\equiv 1[13]$, $5^1\equiv 5[13]$, $5^2\equiv 12[13]$, $5^3\equiv 8[13]$, $5^4\equiv 1[13]$
الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 4 . نكتب $n=4k+r$ حيث $r\in\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;3\}$

إذا كان $r=$	فإن $n=4k+r$	باقي قسمة 5^n على 13 هو
0	$n=4k$	1
1	$n=4k+1$	5
2	$n=4k+2$	12
3	$n=4k+3$	8

2) لدينا $1981\equiv 5[13]$ ومنه $1981^{1981}\equiv 5^{1981}[13]$. نقسم الأس 1981 على الدور 4 فنجد $1981=4\times 495+1$ من الشكل $4k+1$ وبالتالي $5^{1981}\equiv 5[13]$ أي $1981^{1981}\equiv 5[13]$ وأخيرا $1981^{1981}-5\equiv 0[13]$ أي العدد $1981^{1981}-5$ يقبل القسمة على 13
3) نلاحظ أن $31\equiv 5[13]$ ومنه $31^{4n+1}\equiv 5^{4n+1}[13]$ ومن الجدول نجد $31^{4n+1}\equiv 5[13]$

و $18\equiv 5[13]$ ومنه $18^{4n-1}\equiv 5^{4n-1}[13]$ نستعمل الدورية فنجد $5^{4n-1}\equiv 5^{4n-1+4}[13]$ أي $5^{4n-1}\equiv 5^{4n+3}[13]$ ومنه $5^{4n-1}\equiv 8[13]$ وبالتالي $31^{4n+1}+18^{4n-1}\equiv 5+8[13]$ أي $31^{4n+1}+18^{4n-1}\equiv 0[13]$
وأخيرا العدد $31^{4n+1}+18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13 .

حل التمرين رقم23 :

نفرض ان $11c+1=a^2$ وهذا يكافئ $11c=(a-1)(a+1)$.

بما أن 11 أولي نستنتج أن 11 يقسم $a-1$ أو 11 يقسم $a+1$.

الحالة الأولى : 11 يقسم $a-1$ ومنه $a=1+11k$ حيث $k\in\mathbb{N}$. وبالتالي
$11c=(a-1)(a+1)=11k(2+11k)$ ومنه $c=k(2+11k)$. نستنتج أن k تقسم c وبما أن c أولي يكون لدينا $k=1$ أو $k=c$.

- إذا كان $k=1$ فإن $c=1(2+11)=13$ أي $c=13$ وهي قيمة مقبولة لأن $11c+1=11\times13+1=144=12^2$ و هو مربع تام .
- إذا كان $k=c$ فإن $c=c(2+11c)$ أي $c=-\frac{1}{11}$ وهي قيمة مرفوضة لأن c عدد طبيعي أولي .

الحالة الثانية : 11 يقسم $a+1$ ومنه $a=-1+11k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$. وبالتالي
$11c=(a-1)(a+1)=(-2+11k')(11k')$ ومنه $c=k'(-2+11k')$. نستنتج أن k' تقسم c وبما أن c أولي يكون لدينا $k'=1$ أو $k'=c$.

- إذا كان $k'=1$ فإن $c=9$ وهي قيمة مرفوضة لأن c أولي (9 غير أولي) رغم أن $11\times9+1=100=10^2$.
- إذا كان $k'=c$ فإن أي $c=\frac{3}{11}$ وهي قيمة مرفوضة لأن c عدد طبيعي أولي .

وأخيرا توجد قيمة وحيدة هي $c=13$ التي تحقق : c عدد أولي بحيث يكون $11c+1$ مربعا تاما.