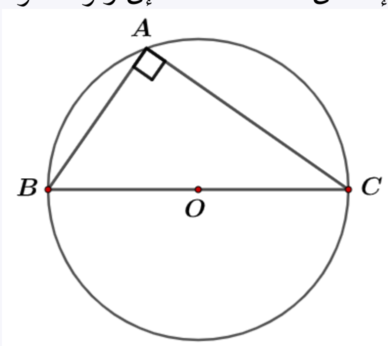
الدائرة المحيطة بمثلث قائم + المتوسط المتعلق بوتره

الدائرة المحيطة بمثلث قائم

خاصية 01

إذا كان مثلث قائما، فإن وتره قطر للدائرة المحيطة به.



خاصية 02

إذا كان احد أضلاع مثلث قطرا للدائرة المحيطة به، فإن هذا المثلث قائم.

نتيجة

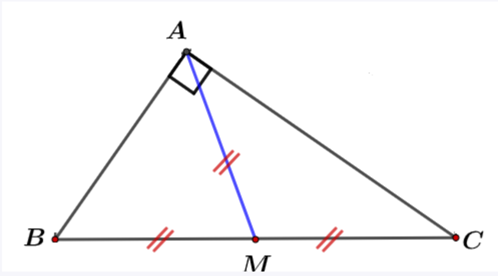
مركز الدائرة المحيطة بمثلث قائم هو منتصف وتره

المتوسط المتعلق بالوتر في مثلث قائم

خاصية 01

إذا كان مثلث قائم، فإن طول المتوسط المتعلق بوتره يساوي نصف طول هذا الوتر.

بتعبير آخر: إذا كان ABC مثلث قائم في A و M منتصف $[BC]$ فإن $AM = \frac{1}{2}BC$



خاصية 02

إذا كان في مثلث طول المتوسط المتعلق بأحد الأضلاع مساويا لنصف طول هذا الضلع، فإن هذا المثلث قائم.

المماس في دائرة

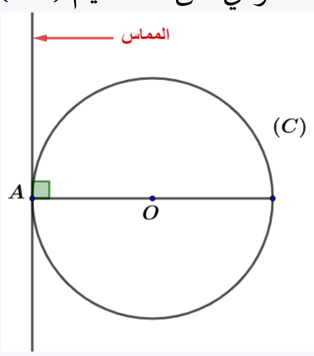
المماس في دائرة هو مستقيم يبعد عن مركزها بمسافة مساوية لنصف قطرها. أو هو مستقيم يشترك مع الدائرة في نقطة وحيدة فقط.

خاصية المماس في دائرة

خاصية

المماس في دائرة هو مستقيم يعامد حامل القطر في نقطة من هذه الدائرة.

بتعبير آخر: (C) دائرة مركزها O، A نقطة من الدائرة (C)، المماس للدائرة (C) في النقطة A هو المستقيم العمودي على المستقيم (OA) في النقطة A.



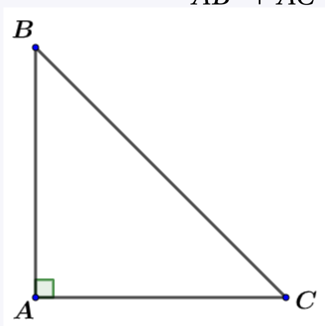
ملاحظة

كل مستقيم يعامد حامل قطر دائرة في نقطة منها فهو مماس لهذه الدائرة.
بتعبير آخر: كل مستقيم بعده عن مركز دائرة يساوي نصف قطرها هو مماس لهذه الدائرة.

خاصية فيتاغورس

خاصية

إذا كان مثلث قائم، فإن مربع طول وتره يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين القائمين،
بتعبير آخر: إذا كان ABC مثلث قائم في A فإن: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

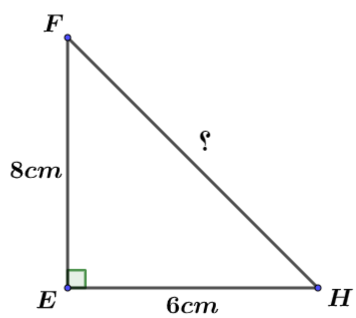


ملاحظات

- ☆ خاصية فيتاغورس لا تطبق إلا في المثلثات القائمة.
- ☆ تسمح خاصية فيتاغورس بحساب طول ضلع في مثلث قائم إذا علمنا طولي الضلعين الآخرين.
- ☆ تسمح خاصية فيتاغورس بالتحقق بأن المثلث غير قائم، إذا كان مربع طول أطول أضلاعه لا يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

مثال

EHF مثلث قائم في E حيث $EF = 8cm$ ،$EH = 6cm$
المطلوب حساب الطول HF



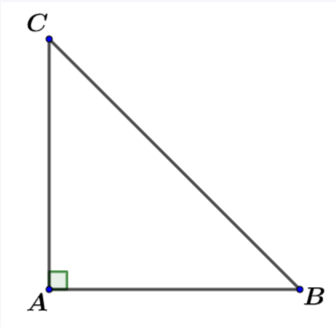
لدينا EHF مثلث قائم في E بتطبيق خاصية فيتاغورس نجد:

$$HF^2 = EF^2 + EH^2$$
$$HF^2 = 8^2 + 6^2$$
$$HF^2 = 64 + 36$$
$$HF^2 = 100$$
$$HF = 10$$

الخاصية العكسية لفيتاغورس

خاصية

إذا كان في مثلث، مربع طول أطول أضلاعه مساويا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن هذا المثلث قائم في الرأس المقابل لأطول ضلع فيه.
بتعبيرآخر: إذا كان ABC مثلث بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإنّ المثلث ABC قائم في A

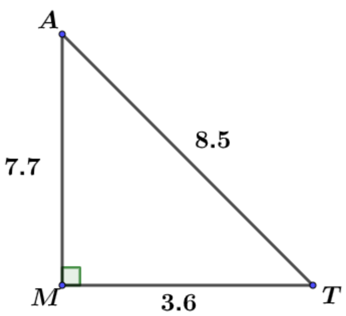


ملاحظة

تسمح الخاصية العكسية لفيتاغورس بإثبات أن مثلثا قائما علمت أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال

MAT مثلث حيث: $MA = 7.7$ ، $MT = 3.6$ و $AT = 8.5$
المطلوب إثبات أن المثلث MAT قائم في M.



نقارن بين مربع طول أطول ضلع ومجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، أي بين AT^2 و $MA^2 + MT^2$

$$AT^2 = 8.5^2 = 72.25$$
$$MA^2 + MT^2 = 7.7^2 + 3.6^2 = 59.29 + 12.96 = 72.25$$

ومنه نستنتج أنّ $AT^2 = MA^2 + MT^2$
وبالتالي حسب خاصية فيتاغورس العكسية فإن المثلث MAT

قائم في M.

جيب تمام زاوية حادة

جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم

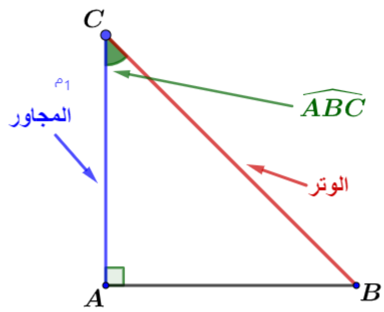
خاصية

جيب تمام زاوية حادة $cosinus$ في مثلث قائم يساوي حاصل قسمة طول الضلع المجاور لها على طول الوتر

$$\text{جيب تمام زاوية حادة}(cos) = \frac{\text{طول الضلع المجاور لهذه الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$$

مثال

لدينا ABC مثلث قائم في A حيث $AB = 4cm$ ، $BC = 5cm$



حساب $cos(\widehat{ABC})$

$$cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} = 0.8$$

إستعمال الآلة الحاسبة

يمكن إستعمال الآلة الحاسبة العلمية لحساب:
القيمة المضبوطة أو قيمة مقربة لجيب تمام زاوية علم قيسها بإستعمال اللمسة cos

مثال

لحساب $\cos(50°)$ نضغط على $\boxed{(50°)}$ ثم $\boxed{\cos}$

فنجد $\boxed{\cos(50°) \approx 0.6427}$

القيمة المضبوطة أو قيمة مقربة لزاوية علم جيب تمامها باستعمال اللمسة $\cos^{-1}$

مثال

لإيجاد قيس الزاوية التي جيب تمامها 0.6 نضغط على $\boxed{0.6}$ + $\boxed{\cos^{-1}}$ فنجد 53.1301 وبالتدوير إلى الوحدة يكون قيس الزاوية هو $53°$

ملاحظة هامــة

يجب التأكد أولا من الوضع Degrés $Mode$
لإستعمال اللمسة $\cos^{-1}$، نضغط على $shift + cos$
أو $2^{ndf} + cos$ تبعا لنوع الحاسبة.

تمرين 01

(C) دائرة قطرها $[EF]$ ، G نقطة من الدائرة (C) حيث: $EF = 5cm$ ، $FG = 3cm$

❶ أنشئ الشكل

❷ أثبت ان المثلث EFG قائم في G.

❸ احسب الطول EG.

تمرين 02

أنشئ المثلث ABC حيث $AB = 3cm$ ، $AC = 4cm$ ، $BC = 5cm$

❶ اثبت أن المثلث ABC قائم في A.

❷ عين النقطة D منتصف الضلع $[AC]$ ثم أنشئ الدائرة (C) التي مركزها D ونصف قطرها $[AC]$

☆ ما هو بعد النقطة D عن المستقيم (AB)؟

☆ ما هي وضعية كل من المستقيمين (AB) و (BC) بالنسبة للدائرة (C)؟ برر

تمرين 03

$ABCD$ مستطيل حيث $AB = 7cm$ و $AD = 4cm$ ، E نقطة من $[DC]$ و $CE = 2cm$

❶ أنشئ المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة E ويعامد (DC)

❷ أنشئ الدائرة (C) التي مركزها C ونصف قطرها $2cm$.

❸ ماهو بعد النقطة C عن المستقيمين (Δ) و (AD).

❹ ما هي وضعية المستقيمين (Δ) و (AD) بالنسبة للدائرة (C)؟ علّل إجابتك.

تمرين 04

(C) دائرة مركزها O وقطرها $BC = 5cm$، A نقطة من الدائرة (C) حيث $AC = 3cm$

❶ أنشئ الشكل بدقة

❷ أثبت أن المثلث ABC قائم في A.

❸ احسب الطول AB

❹ أنشئ النقطة M نظيرة B بالنسبة لـ C.

☆ أثبت أن $(AC)//(MN)$، استنتج الطول MN

☆ ما نوع المثلث MNB؟ علّل.

تمرين 05

EFG مثلث قائم في F بحيث $EF = 4.5cm$ و $\widehat{FEG} = 25°$

❶ أنشئ الشكل

❷ احسب الطول EG (تعطى ابلنتيجة بالتدوير إلى الوحدة)

تمرين 06

ABC مثلث قائم في A حيث $AB = 4cm$ و $\widehat{ABC} = 60°$

❶ أنشئ الشكل

❷ أثبت أن $BC = 8cm$

❸ لتكن النقطة D منتصف $[BC]$، احسب الطول AD.

تمرين 07

ABC مثلث حيث $AC = 6cm$ ، $AB = 8cm$ و $BC = 10cm$

❶ أنشئ الشكل، ثم بين أن المثلث ABC قائم في A

❷ أنشئ الدائرة (C) التي مركزها O والمحيطة بالمثلث ABC (اشرح كيفية الإنشاء)

❸ أنشئ المستقيم (d) الذي يشمل النقطة B ويعامد (AB).

☆ ما هو بعد النقطة O عن المستقيم (d)

☆ ما هي وضعية المستقيم (d) بالنسبة للدائرة (C)؟ علل إجابتك.

تمرين 08

(C) دائرة قطرها $[HI]$ ومركزها R حيث $HI = 4cm$. (d) مماس للدائرة (C) في النقطة I، J نقطة من المستقيم (d) بحيث $RJ = 4cm$

1. أنشئ الشكل
2. أثبت أن المثلث RIJ قائم في I
3. لتكن النقطة K منتصف $[RJ]$
   ✯ احسب الطول KI.
4. احسب الطول IJ
5. احسب $\cos\widehat{J}$، ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{RJI}$

تمرين 09

(C) دائرة مركزها O وقطرها $[RT]$، S نقطة من الدائرة (C).

1. أنشئ الشكل
2. أثبت أن المثلث RST قائم.
3. هل (TS) محور للضلع (RH)؟ علل
4. بين أن المثلث RHJ قائم في H.
5. إذا كان لدينا: $RT = 7.5cm$ و $TS = 6cm$
   ✯ احسب الطول RS

تمرين 10

(C) دائرة قطرها $[AB]$ حيث $AB = 4cm$، C نقطة من الدائرة (C) بحيث $\widehat{CAB} = 40°$

1. أنشئ الشكل، ثم أثبت ان المثلث ABC قائم في C
2. احسب الطول AC (مع تدوير النتيجة إلى الوحدة)

تمرين 11

(C) دائرة مركزها O وقطرها $AB = 6cm$، C نقطة من الدائرة (C) حيث $\widehat{ABC} = 60°$

1. أنشئ الشكل بدقة
2. أثبت أن المثلث ABC قائم في C.
3. احسب الطول BC
4.

تمرين 12

(C) دائرة مركزها O وطول قطرها $EF = 5.8cm$، G نقطة من الدائرة (C) بحيث $EG = 4cm$.

1. أنشئ الشكل بدقة
2. بين أن المثلث EFG قائم في G
3. احسب الطول FG
4. المستقيم (d) مماس للدائرة (C) في النقطة F
   المستقيم (EG) يقطع (d) في H
   ✯ ما نوع المثلث EFH؟ علل
   ✯ ماذا تمثل النقطة F في المثلث EFH؟ علل

تمرين 13

(C) دائرة قطرها $[HI]$ ومركزها R حيث $HI = 4cm$
(d) مماس للدائرة (C) في النقطة I، J نقطة من المستقيم (d) بحيث $RJ = 4cm$

1. أنشئ الشكل بدقة
2. بين أن المثلث RIJ قائم في I
3. لتكن النقطة K منتصف $[RJ]$
   ✯ احسب الطول KI
4. احسب الطول IJ.
5. احسب $\cos\widehat{J}$، ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{RJI}$