مجاميع و جداءات المتتاليات

إعداد: عبلة محمد أمين

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_n = 2+3n$ (الأساس $r=3$ و الحد الأول $u_0 = 2$)

(v_n) متتالية هدسية حيث $v_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (الأساس $q=\frac{1}{3}$ و الحد الأول $v_0 = 2$)

و لتكن المتتالية (w_n) حيث $v_n = w_n + a$ (مع عدد a حقيقي غير معدوم)

و نعتبر المتتاليين العدديتين $\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)}$ و $\beta_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ (مع $n>0$)

أحسب المجاميع و الجداءات الثالية :

1- $S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$

2- $S_2 = v_0 + v_1 + ... + v_n$

3- $S_3 = b^{u_0} + b^{u_1} + ... + b^{u_n}$ (مع b عدد حقيقي غير معدوم مختلف عن 1)

4- $S_4 = v_0^\alpha + v_1^\alpha + ... + v_n^\alpha$ (مع α عدد حقيقي غير معدوم مختلف عن 1)

5- $S_5 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + ... + \frac{1}{v_n}$

6- $S_6 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + ... + \sqrt{v_n}$

7- $S_7 = w_0 + w_1 + ... + w_n$

8- $S_8 = v_0 + v_1 + ... + v_{2n}$

9- $S_9 = v_0 + v_2 + ... + v_{2n}$

10- $S_{10} = v_1 + v_3 + ... + v_{2n+1}$

11- $P_1 = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$

12- $S_{11} = \ln v_0 + \ln v_1 + ... + \ln v_n$ (بطريقتين)

13- $S_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ (بعد إثبات أن $\alpha_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$)

<u>خاصة بشعبة الرياضيات:</u>

14- $P_2 = \beta_1 \times \beta_2 \times .... \times \beta_n$

15- $S_{13} = \ln \beta_1 + \ln \beta_2 + ... + \ln \beta_n$ (بطريقتين)

16- $S_{14} = 1v_1 + 2v_2 + ... + nv_n$

تذكـــير:

قانون مجموع متتالية حسابية:

إذا كانت $u_n = u_0 + nr$ فإن:

$$S_n = u_p + \ldots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}$$

حيث:

u_p الحد الأول في المجموع

u_n الحد الأخير في المجموع

p دليل الحد الأول

n دليل الحد الأخير

$n - p + 1$ عدد الحدود

قانون مجموع المتتالية الهندسية:

إذا كانت $v_n = v_0 \times q^n$

فإن $s_n = v_p + \ldots + v_n = v_p \left(\frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q} \right)$

حيث:

v_p الحد الأول في المجموع

v_n الحد الأخير في المجموع

p دليل الحد الأول

n دليل الحد الأخير

$n - p + 1$ عدد الحدود

$S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$ -1

المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=3$ و حدها الأول $u_0 = 2$

إذا $S_1 = \frac{(u_0+u_n)(n-0+1)}{2} = \frac{(4+3n)(n+1)}{2}$

$S_2 = v_0 + v_1 + ... + v_n$ -2

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 2$

إذا $S_2 = v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right)$

$= 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$S_3 = b^{u_0} + b^{u_1} + ... + b^{u_n}$ -3

هنا نلاحظ ان المجموع هو لمتتالية مكتوبة على الشكل b^{u_n}

إذا $b^{u_n} = b^{u_0+nr} = b^{2+3n} = b^2 \times b^{3n} = b^2 \times (b^3)^n$

بعد الإثبات نجد أن (b^{u_n}) متتالية هندسية

أساسها $q' = b^r = b^3$ و حدها الأول $b^{u_0} = b^2$

إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد

$S_3 = b^{u_0}\left(\frac{1-(b^r)^{n+1}}{1-b^r}\right) = b^2\left(\frac{1-(b^3)^{n+1}}{1-b^3}\right)$

$S_4 = v_0^\alpha + v_1^\alpha + ... + v_n^\alpha$ -4

هنا نلاحظ ان المجموع هو لمتتالية مكتوبة على الشكل v_n^α

$v_n^\alpha = (v_0 \times q^n)^\alpha = v_0^\alpha \cdot q^{n\cdot\alpha} = v_0^\alpha \cdot (q^\alpha)^n$

بعد الإثبات نجد أن (v_n^α) متتالية هندسية

أساسها $q^\alpha = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha$ و حدها الأول $v_0^\alpha = 2^\alpha$

إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد

$S_4 = v_0^\alpha\left(\frac{1-(q^\alpha)^{n-0+1}}{1-q^\alpha}\right) = 2^\alpha\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha(n+1)}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha}\right)$

$S_5 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + ... + \frac{1}{v_n}$ -5

لدينا $\frac{1}{v_n} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{2} \times 3^n$

إذا بعد البرهان نجد أن $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q} = 3$ و حدها الأول $\frac{1}{v_0} = \frac{1}{2}$

إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد

$S_5 = \frac{1}{v_0}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^{n-0+1}}{1-\left(\frac{1}{q}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{-2}\right) = \frac{1}{4}\left(3^{n+1}-1\right)$

$S_6 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + ... + \sqrt{v_n}$ -6

هنا نلاحظ ان المجموع هو لمتتالية مكتوبة على الشكل $\sqrt{v_n}=(v_n)^{\frac{1}{2}}$

و نطبق نفس الطريقة في المثال 4

7- $S_7=w_0+w_1+....+w_n$

المتتالية (w_n) لا حسابية و لا هندسية و لكنها مكتوبة بدلالة المتتالية الهندسية (v_n)

لدينا $w_n=v_n-a$

نكتب كل حدود لمتتالية (w_n) بدلالة حدود المتتالية (v_n) فيصبح لدينا:

$$s_7=v_0-a+v_1-a+....+v_n-a$$

نجمع حدود المتتالية (v_n) لوحدهم و الأعداد $-a$ لوحدهم أيضا

إذا $S_7=\underbrace{v_0+v_1+...+v_n}_{S_2}\underbrace{-a-a-a-....-a}_{n\ (-0+1)}$

هناك $n+1$ حد من الأعداد $-a$ لأن كل حد من حدود المتتالية (v_n) يرافقه عدد $-a$

إذا $S_7=S_2-a(n+1)$

8- $S_8=v_0+v_1+....+v_{2n}$

S_8 عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0

و لكن الإختلاف مع S_2 يكمن في عدد الحدود فقط

إذا $S_8=v_0\left(\frac{1-(9)^{2n-0+1}}{1-9}\right)=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{\frac{2}{3}}\right)$

$$S_8=3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right)$$

9- $S_9=v_0+v_2+....+v_{2n}$

نلاحظ أن $\frac{v_2}{v_0}=....=\frac{v_{2n}}{v_{2n-2}}=q^2$ (قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه)

إذا المجموع S_9 هو مجموع متتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_0

نسميها $x_n=v_0\cdot(q^2)^n$

إذا $S_9=x_0+x_1+....+x_n=v_0\left(\frac{1-(q^2)^{n-0+1}}{1-q^2}\right)$

10- $S_{10}=v_1+v_3+....+v_{2n+1}$

نكتب كل الحدود بدلالة v_1 و q بإستخدام عبارة الحد العام $v_n=v_1\cdot q^{n-1}$

فيصبح لدينا

$$S_{10}=v_1+v_1q^2+v_1q^4+....+v_1q^{2n}$$

ثم نلاحظ أن $\frac{v_1q^2}{v_1}=....=\frac{v_1q^{2n}}{v_1q^{2n-2}}=q^2$

إذا يصبح المجموع عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1

نسميها $y_n=v_1(q^2)^n$

و منه $S_{10}=y_0+y_1+....+y_n=v_1\left(\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-(q^2)}\right)$

$\boxed{P_1 = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n}$ -11

نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة v_0 و q أي

بإستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية

$$v_n = v_0 q^n$$

إذا $P_1 = v_0 \times v_0 q \times v_0 q^2 \times .... \times v_0 q^n$

$$= \underbrace{v_0 \times v_0 \times .... \times v_0}_{n\ (\text{حد } 0+1)} \times q^1 \times q^2 \times .... \times q^n$$

$$P_1 = v_0^{n+1} \times q^{1+2+....+n}$$

نلاحظ أن $1+2+3+....+n$ هو مجموع لمتتالية

حسابية أساسها 1 و حدها الأول 1 (لاحظ أن

المجموع بدأ من 1و الفرق بين حد و الحد الذي يليه

هو 1)

إذا بعد تطبيق قانون مجموع متتالية حسابية نجد

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و منه $P_1 = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$\boxed{S_{11} = \ln v_0 + \ln v_1 + ... + \ln v_n}$ -12

طريقة 1: بتطبيق خواص الدالة اللوغاريتمية

نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة v_0 و q أي

بإستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية

فنجد: $v_n = v_0 q^n$

$$S_{11} = \ln v_0 + \ln v_0 \cdot q + \ln v_0 \cdot q^2 + ... + \ln v_0 \cdot q^n$$

نطبق خاصية الدالة اللوغاريتمية

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$$

يصبح لدينا

$$S_{11} = \ln v_0 + \ln v_0 + \ln q + \ln v_0 + \ln q^2 + ... + \ln v_0 + \ln q^n$$

بتطبيق خاصية الدالة اللوغاريتمية

$\ln a^n = n \ln a$ و بجمع الحدود $\ln v_0$ لوحدهم

و الحدود من الشكل $\ln q^n$ لوحدهم نجد

$$S_{11} = \underbrace{\ln v_0 + \ln v_0 + ... + \ln v_0}_{\text{حد } (n-0+1)} + \ln q + 2\ln q + ... + n \ln q$$

$$S_{11} = (n+1)\ln v_0 + (1+2+....+n)\ln q$$

$$= (n+1)\ln v_0 + \frac{n(n+1)}{2}\ln q$$

إذا $S_{11} = 2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\ln\frac{1}{3}$

طريقة 2: (شرط أن نكون قد وجدنا جداء المتتالة الهندسية)

نستخدم العلاقة $\ln a + \ln b = \ln a \cdot b$

نجد $S_{11} = \ln(v_0 \times v_1 \times .... \times v_n) = \ln P_1$

إذا $S_{11} = \ln\left(v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \ln v_0^{n+1} + \ln q^{\frac{n(n+2)}{2}}$

$$= (n+1)\ln v_0 + \frac{n(n+2)}{2}\ln q$$

$\boxed{S_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$ -13

بعدما أثبتنا أن $\alpha_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ يصبح المجموع

$$S_{12} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

لاحظ أن كل حد له علاقة مكتوب على شكل

مجموع كسرين الكسر الأول موجود عكسه

في حد الذي يسبقه أما الكسر الثاني عكسه

موجود في الحد الذي يليه فتحذ كل الكسور إلا أول كسر و آخر كسر

مثال للتوضيح:

$u_{n-5}=\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-4}$ (هو الحد الذي يسبق الحد u_{n-4})

$u_{n-4}=\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-3}$ (الكسر $\frac{1}{n-4}$ عكسه موجود في u_{n-5} و الكسر $\frac{1}{n-3}$ عكسه موجود في u_{n-3})

$u_{n-3}=\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}$ (هو الحد الذي يلي الحد u_{n-4})

فيصبح لدينا $S_{12}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

المجاميع الخاصة بشعبة الرياضيات:

14- $P_2=\beta_1\times\beta_2\times....\times\beta_n$

إذا $P_2=\frac{1(1+2)}{(1+1)^2}\times\frac{2(2+2)}{(2+1)^2}\times....\times\frac{(n-1)(n-1+2)}{(n-1+1)^2}\times\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

لاحظ أن كل حد(ما عدا الحد الأول و الأخير) مكتوب على شكل كسر حيث أن في البسط جداء دليله (الذي يحذف مع مقام الحد الذي يسبقه) ضرب دليله 2+ (الذي يحذف مع مقام الحد الذي بعده) و مقامه هو مربع دليله 1+ (الذي يحذف مع بسط الحد الذي قبله و بسط الحد الذي بعده)

إذا بعد التبسيط نجد

$$P_2=\frac{1}{(1+1)}\times\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

15- $S_{13}=\ln\beta_1+\ln\beta_2+....+\ln\beta_n$

طريقة 1: بتطبيق خواص الدالة اللوغاريتمية

لدينا $\ln a\cdot b=\ln a+\ln b,\ \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

$\ln a^n=n\ln a$

$$S_{13}=\ln\left(\frac{1\times(1+2)}{(1+1)^2}\right)+\ln\left(\frac{2\times(2+2)}{(2+1)^2}\right)+....+\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$$

تصبح

$$S_{13}=\ln1+\ln(1+2)-2\ln(1+1)+\ln2+\ln(2+2)$$
$$-2\ln(2+1)+...2+\ln n+\ln(n+2)-2\ln(n+1)$$

بعد التبسيط نجد

$$S_{13}=\ln1-\ln2+\ln(n+1)-\ln(n+2)$$

طريقة 2: يشرط علينا حساب الجداء

نطبق الخاصية $\ln a+\ln b=\ln ab$ نجد

$$S_{13}=\ln(\beta_1\times\beta_2\times....\times\beta_n)=\ln P_2$$

إذا $S_{13}=\ln\left(\frac{n+1}{2(n+2)}\right)=\ln(n+1)-\ln2-\ln(n+2)$

$$\boxed{S_{14} = 1v_1 + 2v_2 + ... + nv_n}$$ -16

$$S_{14} = v_1 + v_2 + v_2 + ... + \underbrace{v_n + v_n + ... + v_n}_{n \text{ حد}}$$

$$S_{13} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + \\ v_2 + v_3 + ... + v_n + \\ v_3 + ... + v_n + \\ . \\ . \\ . \\ v_{n-1} + v_n + \\ v_n \end{pmatrix}$$

إستخدمت هذا النوع من الكتابة لإظهار الحسابات فقط فالمجموع بين قوسين و كل مرة أعود إلى السطر فقط

$$S_{13} = \begin{pmatrix} v_1 + v_1q + v_1q^2 + ... + v_1q^{n-1} + \\ v_1q + v_1q^2 + ... + v_1q^{n-1} + \\ v_1q^2 + ... + v_1q^{n-1} + \\ . \\ . \\ . \\ v_1q^{n-2} + v_1q^{n-1} + \\ v_1q^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$S_{13} = \begin{pmatrix} v_1\left(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}\right) + \\ v_1q\left(1 + q + ... + q^{n-2}\right) + \\ v_1q^2\left(1 + ... + q^{n-3}\right) + \\ . \\ . \\ . \\ v_1q^{n-2}\left(1+q\right) + \\ v_1q^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$S_{13} = \frac{v_1}{1-q}\left(1 - q^n + q - q^n + q^2 - q^n + ... + q^{n-1} - q^n\right)$$

(نشرنا q^m على الكسر و إستخرجنا $\frac{1}{1-q}$ عامل مشترك)

$$S_{13} = \frac{v_1}{1-q}\left(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} \underbrace{-q^n - q^n - .... - q^n}_{n \text{ حد}}\right)$$

إذا $S_{13} = \frac{v_1}{1-q}\left(\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) - nq^n\right)$

لدينا $1 + q + q^2 + ... + q^m$ مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول 1 إذا

$$S_{13} = v_1\left(\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) + q\left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right) + q^2\left(\frac{1-q^{n-2}}{1-q}\right) + ... + q^{n-2}\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right) + q^{n-1}\left(\frac{1-q^1}{1-q}\right)\right)$$