مسائل في الإحتمالات

جمع و إعداد : خالد بحاحشة

التمرين: بكالوريا شعبة تسيير و اقتصاد 2019 – الموضوع الأول –

1) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة : $(4x^2+3x-1)(x^2-5x+6)=0$ .... (E)

2) كيس به أربع كريات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 . نسحب منه كرية واحدة و نرمز بـ P_i إلى إحتمال سحب الكرية التي تحمل الرقم i و نضع : $P_1=3\alpha^2$ ، $P_2=\alpha^2$ ، $P_3=\alpha$ و $P_4=2\alpha$.
حدد قيمة α .

3) نضع $\alpha=\frac{1}{4}$. أحسب إحتمالات الأحداث التالية :
A : " سحب كرية تحمل رقما فرديا " .
B : " سحب كرية تحمل الرقم 4 " .
C : " سحب كرية تحمل رقما أصغر أو يساوي 3 " .
D : " سحب كرية تحمل رقما حلا للمعادلة (E) " .

حل التمرين:

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E) .... $(4x^2+3x-1)(x^2-5x+6)=0$
المعادلة (E) تكافئ : $x^2-5x+6=0$ أو $4x^2+3x-1=0$.
لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2-5x+6=0$:
لدينا $\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=1$ ومنه المعادلة تقبل حلين هما : $x_1=\frac{5-1}{2}=2$ و $x_2=\frac{5+1}{2}=3$.
لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $4x^2+3x-1=0$:
لدينا $\Delta=3^2-4\times(-1)\times4=25$ ومنه المعادلة تقبل حلين هما : $x_1'=\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times4}=-1$ و $x_2'=\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times4}=\frac{1}{4}$.
إذن مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ هي : $S=\left\{-1;\frac{1}{4};2;3\right\}$.

2) كيس به أربع كريات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 . نسحب منه كرية واحدة و نرمز بـ P_i إلى إحتمال سحب الكرية التي تحمل الرقم i و نضع $P_1=3\alpha^2$ ، $P_2=\alpha^2$ ، $P_3=\alpha$ و $P_4=2\alpha$.
تحديد قيمة α :
لدينا : $P_1+P_2+P_3+P_4=1$ أي $3\alpha^2+\alpha^2+\alpha+2\alpha=1$ ومنه $4\alpha^2+3\alpha-1=0$ إذن $\alpha=\frac{1}{4}$.

3) نضع $\alpha=\frac{1}{4}$. حساب الإحتمالات :

$$P(A)=P_1+P_3=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$$

$$P(B)=P_4=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(C)=P_1+P_2+P_3=\frac{3}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

$$P(D)=P_2+P_3=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$$

التمرين: بكالوريا شعبة علوم 2021 –م 1– بتصرف

يراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 و امرأتان F_1 و F_2 .

نعتبر الأحداث A ، B و C حيث : A : عضوا اللجنة من نفس الجنس .

B : عضوا اللجنة من جنسين مختلفين .

C : H_1 عضو في اللجنة .

1) استعن بمخطط .

2) أ ـ أحسب $P(A)$ و $P(B)$ إحتمال A و B على الترتيب .

ب ـ بين أن $P(C)$ إحتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة .

أ ـ برر أن مجموعة قيم X هي : $\{0;1;2\}$.

ب ـ عين قانون الإحتمال المتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

حل التمرين:

1) المخطط :

	H_1	H_2	H_3	F_1	F_2
H_1		H_1H_2	H_1H_3	H_1F_1	H_1F_2
H_2			H_2H_3	H_2F_1	H_2F_2
H_3				H_3F_1	H_3F_2
F_1					F_1F_2
F_2					

2) أ ـ حساب الإحتمالات :

لدينا : A : عضوا اللجنة من نفس الجنس .

B : عضوا اللجنة من جنسين مختلفين .

$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ و $P(B)=1-P(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

ب ـ تبيان أن $P(C)$ إحتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.

لدينا : C : H_1 عضو في اللجنة . و منه $P(C)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة .

أ ـ تبرير أن مجموعة قيم X هي : $\{0;1;2\}$.

لدينا : اللجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال و امرأتان .

فيمكن أن يكون في اللجنة إمرأتين أي $X=0$ ، أو رجل و إمرأة أي $X=1$ ، أو رجلان أي $X=2$.

ب ـ تعيين قانون الإحتمال المتغير العشوائي X :

لدينا : $P(X=0)=\frac{1}{10}$ ، $P(X=1)=\frac{6}{10}$ و $P(X=2)=\frac{3}{10}$.

X_i	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

الأمل الرياضياتي: $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{12}{10}$.

التمرين: بكالوريا شعبة علوم 2021 -م2-

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، مكتوب على كل منها سؤال واحد ، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ1 ، 2 و 3 ، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ 1 ، 2 ، 3 و 4 و سؤالين في التحليل مرقمين بـ 1 و 2 .

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق و نعتبر الأحداث التالية :

A " سحب سؤال في الهندسة " ، B " سحب سؤال في التحليل " و C " سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا " .

1) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ إحتمال الأحداث A ، B و C على الترتيب .

2) أحسب إحتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 .

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها .

أ- برر أن مجموعة قيم X هي : $\{1;2;3;4\}$.

ب- عين قانون الإحتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي .

جـ- استنتج قيمة $E(2021X+1442)$.

حل التمرين:

1) حساب الإحتمالات :

$P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ، $P(B)=\frac{2}{9}$ و $P(C)=\frac{2}{9}$.

2) حساب إحتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 : $P(D)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها . و لدينا أرقام الأسئلة هي : 1 ، 2 ، 3 و 4 .

و بالتالي قيم X هي : $\{1;2;3;4\}$.

ب- قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

لدينا : $P(X=1)=\frac{3}{9}$ ، $P(X=2)=\frac{3}{9}$ ، $P(X=3)=\frac{2}{9}$ و $P(X=4)=\frac{1}{9}$.

X_i	1	2	3	4
$P(X=X_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

الأمل الرياضياتي : $E(X)=1\times\frac{3}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}=\frac{19}{9}$.

جـ- الاستنتاج : $E(2021X+1442)=2021E(X)+1442=\frac{51377}{9}\approx 5708.55$

التمرين: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2023 -م1-

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، موزعة كما يلي :

ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ: 1 ، 2 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس و نعتبر الأحداث A ، B و C الآتية :

A " الحصول على كريتين من نفس اللون " ، B " الحصول على كرية حمراء على الأقل "

C "الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما يساوي 3"

1) استعن بمخطط .

2) أ- بين أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{1}{4}$. وأن احتمال الحدث B يساوي $\frac{9}{14}$.

ب- أحسب الإحتمال $P(C)$.

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

أ ـ برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{1;2;3;4\}$.

بـ ـ عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

حل التمرين:

1) المخطط :

	B_1	B_1	B_0	R_1	R_1	R_2	V_1	V_2
B_1		B_1B_1	B_1B_0	B_1R_1	B_1R_1	B_1R_2	B_1V_1	B_1V_2
B_1			B_1B_0	B_1R_1	B_1R_1	B_1R_2	B_1V_1	B_1V_2
B_0				B_0R_1	B_0R_1	B_0R_2	B_0V_1	B_0V_2
R_1					R_1R_1	R_1R_2	R_1V_1	R_1V_2
R_1						R_1R_2	R_1V_1	R_1V_2
R_2							R_2V_1	R_2V_2
V_1								V_1V_2
V_2								

2) أ ـ تبيان أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{1}{4}$. وأن احتمال الحدث B يساوي $\frac{9}{14}$.

لدينا : $P(A)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$.

أو كطريقة ثانية : $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{10}{28}=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$.

بـ ـ حساب الإحتمال $P(C)$.

لدينا : $P(C)=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$.

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

أ ـ تبرير أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{1;2;3;4\}$.

- إذا سحبنا كريتين تحمل كل منهما الرقم 1 فإن : $X=2$.
- إذا سحبنا كريتين تحمل كل منهما الرقم 2 فإن : $X=4$.
- إذا سحبنا كريتين إحداهما تحمل الرقم 0 و الأخرى تحمل الرقم 1 فإن : $X=1$.
- إذا سحبنا كريتين إحداهما تحمل الرقم 0 و الأخرى تحمل الرقم 2 فإن : $X=2$.

بـ ـ تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$P(X=1)=\frac{5}{28}$ ، $P(X=2)=\frac{12}{28}$ ، $P(X=3)=\frac{10}{28}$ ، $P(X=4)=\frac{1}{28}$.

قانون الإحتمال :

X_i	1	2	3	4
$P(X=X_i)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{1}{28}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=1\times\frac{5}{28}+2\times\frac{12}{28}+3\times\frac{10}{28}+4\times\frac{1}{28}=\frac{63}{28}=\frac{9}{4}$$

التمرين: بكالوريا شعبة رياضيات 2021 -م1-بتصرف

كيس به كرية 12 متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

كل من الكريات الإثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية : 1 ، 2 ، 3 و 4 .

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس .

نرمز بـ P_i إلى إحتمال سحب كرية رقمها i ، حيث : $P_1=\frac{1}{3}$ ، $P_2=\frac{1}{6}$ ، $P_3=\frac{1}{4}$ و $P_4=\frac{1}{4}$.

1) وزع الكريات الإثنتي عشرة حسب الأرقام 1 ، 2 ، 3 و 4 .

2) أحسب إحتمال كلا من الأحداث A ، B و C الآتية : A : سحب كرية تحمل رقما فرديا .

B : سحب كرية تحمل رقما أصغر تماما من 4 .

C : سحب كرية رقمها حل للمعادلة $x^2=2^x$.

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب لكرية الرقم الذي تحمله .

عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي .

حل التمرين:

1) توزيع الكريات الإثنتي عشرة حسب الأرقام 1 ، 2 ، 3 و 4 .

لدينا : $P_1=\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ و منه عدد الكريات التي تحمل الرقم 1 هو 4 . و $P_2=\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$ و منه عدد الكريات التي تحمل الرقم 2 هو 2 .

و $P_3=\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ و منه عدد الكريات التي تحمل الرقم 3 هو 3 . و $P_4=\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ و منه عدد الكريات التي تحمل الرقم 4 هو 3 .

2) حساب إحتمالات الأحداث :

A : سحب كرية تحمل رقما فرديا . $P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

B : سحب كرية تحمل رقما أصغر تماما من 4 . $P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{9}{12}$

C : سحب كرية رقمها حل للمعادلة $x^2=2^x$. $P(C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب لكرية الرقم الذي تحمله .

مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{1;2;3;4\}$.

قانون الإحتمال :

X_i	1	2	3	4
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{29}{12}$.

التمرين: بكالوريا شعبة رياضيات 2021 –م 2– بتصرف

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا له من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 ، H_3 و أربع نساء F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4 .

1) استعن بمخطط .

2) نعتبر الأحداث الآتية :

A : " اللجنة من نفس الجنس " . B : " اللجنة من جنسين مختلفين " .

C : " H_1 هو الرئيس " . E : " اللجنة لا تضم كلا من H_1 و F_1 " .

أ ـ أحسب $P(A)$ إحتمال الحدث A ثم استنتج $P(B)$.

بـ ـ أحسب $P(C)$ و $P(E)$.

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها .

عين قانون احتمال X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي .

حل التمرين:

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا له من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 ، H_3 و أربع نساء F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4 .

1) المخطط :

	H_1	H_2	H_3	F_1	F_2	F_3	F_4
H_1		H_1H_2	H_1H_3	H_1F_1	H_1F_2	H_1F_3	H_1F_4
H_2	H_2H_1		H_2H_3	H_2F_1	H_2F_2	H_2F_3	H_2F_4
H_3	H_3H_1	H_3H_2		H_3F_1	H_3F_2	H_3F_3	H_3F_4
F_1	F_1H_1	F_1H_2	F_1H_3		F_1F_2	F_1F_3	F_1F_4
F_2	F_2H_1	F_2H_2	F_2H_3	F_2F_1		F_2F_3	F_2F_4
F_3	F_3H_1	F_3H_2	F_3H_3	F_3F_1	F_3F_2		F_3F_4
F_4	F_4H_1	F_4H_2	F_4H_3	F_4F_1	F_4F_2	F_4F_3	

2) أ ـ أحسب $P(A)$ إحتمال الحدث A .

A : " اللجنة من نفس الجنس " . $P(A)=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$

استنتاج $P(B)$ إحتمال الحدث B .

B : " اللجنة من جنسين مختلفين " . $P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

بـ ـ حساب $P(C)$ و $P(E)$.

C : " H_1 هو الرئيس " . $P(C)=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$

E : " اللجنة لا تضم كلا من H_1 و F_1 " . $P(E)=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها .

مجموعة قيم X هي : $\{0;1;2\}$.

قانون احتمال X :

لدينا : $P(X=0)=\frac{12}{42}$ ، $P(X=1)=P(B)=\frac{4}{7}=\frac{24}{42}$ و $P(X=2)=\frac{6}{42}$.

X_i	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{6}{42}$

حساب الأمل الرياضياتي : $E(X)=0\times\frac{12}{42}+1\times\frac{24}{42}+2\times\frac{6}{42}=\frac{36}{42}=\frac{6}{7}$.

التمرين: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2018 –م2–

كيس به 7 كريات متماثلة ، لانفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و4 خضراء .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس .

I)1)استعن بمخطط .

2)أحسب إحتمال الحادثة A : "سحب كريتين مختلفتين في اللون" .

3)أحسب إحتمال الحادثة B : "سحب كريتين من نفس اللون" .

II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha\,(DA)$ ، (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).

فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، و إذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ، و إذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه . و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

1) برر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha;50-\alpha;-\alpha\}$ ثم عرف قانون إحتماله .

2) بين أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو : $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$.

ثم جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.