محور

الدوال الأصلية وحساب التكامل

درس الدوال الأصلية

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I . نقول عن الدالة F المعرفة على المجال I والقابلة للاشتقاق على I أنها دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا كان من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

مثال01 :

- $F: x \mapsto 3x^2-6x+7$ هي دالة أصلية للدالة $f: x \mapsto 6x-6$ على $\mathbb{R}$ لأن $F'(x)=f(x)$.
- $F: x \mapsto \dfrac{5x}{x^2+1}$ هي دالة أصلية للدالة $f: x \mapsto \dfrac{-5x^2+5}{\left(x^2+1\right)^2}$ على $\mathbb{R}$ لأن $F'(x)=f(x)$.

تطبيق :

F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=\dfrac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}$ و $G(x)=\dfrac{-6x-2}{x^2+x+1}$

تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة على $\mathbb{R}$.

الحل :

الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=G'(x)$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=\dfrac{2(3x^2+2x-2)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ و $G'(x)=\dfrac{2(3x^2+2x-2)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان F و G هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية :نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$F(x)-G(x)=\frac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}-\frac{-6x-2}{x^2+x+1}=\frac{5x^2-x+3+6x+2}{x^2+x+1}=\frac{5x^2+5x+5}{x^2+x+1}=\frac{5\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}=5$$

أي $\left[F(x)-G(x)\right]'=0$ ومنه $F'(x)=G'(x)$ لأن مشتقة 5 تساوي صفر.

. مجموعة الدوال الأصلية لدالة

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل عدد لانهائي من الدوال الأصلية على I من الشكل $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت. دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=6x^2+10x-8$. كل الدوال $F_1: x \mapsto 2x^3+5x^2-8x+1$ ، $F_2: x \mapsto 2x^3+5x^2-8x+13$ ، $F_3: x \mapsto 2x^3+5x^2-8x+\sqrt{7}$ هي دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $F(x)=2x^3+5x^2-8x+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F\left(x_0\right)=y_0$.

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f\left(x\right)=12x^2-2x+3$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F\left(x\right)=4x^3-x^2+3x+c$. توجد دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 7 من أجل $x=1$ أي $F\left(1\right)=7$ أي $4-1+3+c=7$ ومنه $c=1$ أي $F\left(x\right)=4x^3-x^2+3x+1$.

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$I=$	$F\left(x\right)=$	$f\left(x\right)=$
$\mathbb{R}$	$F\left(x\right)=ax+c$	$f(x)=a$ (a **عدد حقيقي**)
$\mathbb{R}$	$F\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2+c$	$f(x)=x$
$\mathbb{R}$	$F\left(x\right)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$f(x)=x^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)
$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$	$F\left(x\right)=-\frac{1}{x}+c$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$
$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$	$F\left(x\right)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$f(x)=\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)
$]0;+\infty[$	$F\left(x\right)=2\sqrt{x}+c$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$F\left(x\right)=-\cos x+c$	$f(x)=\sin x$
$\mathbb{R}$	$F\left(x\right)=\sin x+c$	$f(x)=\cos x$
$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$	$F\left(x\right)=\tan x+c$	$f(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

تطبيق :

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f\left(x\right)=8x^3-4x+7$ ، $I=\mathbb{R}$ 2) $g\left(x\right)=x^2+\sin x-\frac{1}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$ 3) $h\left(x\right)=\frac{3}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\cos x$ ، $I=]0;+\infty[$

الحل :

1) F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بِـ: $F\left(x\right)=8\times\frac{1}{3+1}x^{3+1}-4\times\frac{1}{2}x^2+7x+c=2x^4-2x^2+7x+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) G دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$ معرفة بِ :

$G(x)=\frac{x^{2+1}}{2+1}+(-\cos x)-\left(-\frac{1}{(2-1)x^{2-1}}\right)+c=\frac{1}{3}x^3-\cos x+\frac{1}{x}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

3) H دالة أصلية للدالة h على $]0;+\infty[$ معرفة بِ :

$$H(x)=3\left(-\frac{1}{(4-1)x^{4-1}}\right)+2\sqrt{x}-(\sin x)+c=-\frac{1}{x^3}+2\sqrt{x}-\sin x+c$$

5. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الشروط الخاصة بالدالة u	الدوال الأصلية للدالة f على I F
$f=u'u$		$F=\frac{1}{2}u^2+c$
($n\in\mathbb{N}^*$) $f=u'u^n$		$F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$
$f=\frac{u'}{u^2}$	من أجل كل x من I : $u(x)\neq 0$	$F=-\frac{1}{u}+c$
($n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N}$) $f=\frac{u'}{u^n}$	من أجل كل x من I : $u(x)\neq 0$	$F=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$
$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$	من أجل كل x من I : $u(x)>0$	$F=2\sqrt{u}+c$

تطبيق01 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=\left(3x^2+2x\right)\left(x^3+x^2+7\right)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ (2 $g(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $h(x)=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+11\right)^3}$ ، $I=\mathbb{R}$

الحل :

1) $f(x)=\left(3x^2+2x\right)\left(x^3+x^2+7\right)^2$: الدالة f من الشكل $u'u^n$ حيث $u(x)=x^3+x^2+7$ و $u'(x)=3x^2+2x$ و $n=2$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{2+1}\left(x^3+x^2+7\right)^{2+1}+c=\frac{1}{3}\left(x^3+x^2+7\right)^3+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $g(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$: الدالة g من الشكل $\frac{u'}{u^2}$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $u'(x)=2x$.

دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{u}+c$ أي $G(x)=-\frac{1}{x^2+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

3) $h(x)=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+11\right)^3}$: الدالة h من الشكل $\frac{u'}{u^n}$ حيث $u(x)=x^2+x+11$ و $u'(x)=2x+1$.

دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $H(x)=-\frac{1}{(3-1)\left(x^2+x+11\right)^{3-1}}+c=-\frac{1}{2\left(x^2+x+11\right)^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

تطبيق02 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=(x+1)\left(2x^2+4x+1\right)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ 2) $g(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $h(x)=\frac{3x+1}{\left(3x^2+2x+7\right)^3}$ ، $I=\mathbb{R}$ 4) $v(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$

طريقة :

عنما لا نستطيع تطبيق مباشرة القواعد السابقة لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1) ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\frac{u'}{u^n}$ أو $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.

2) حساب $u'(x)$ ثم تعيين عددا حقيقيا k (حسب كل حالة) بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\frac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

3) تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

1) $f(x)=(x+1)\left(2x^2+4x+1\right)^2$ تكافئ $f(x)=\frac{1}{4}(4x+4)\left(2x^2+4x+5\right)^2$ وهي من الشكل $f=k\times u'u^n$ أي $f=\frac{1}{4}\times u'u^2$ حيث $u(x)=2x^2+4x+1$ و $u'(x)=4x+4$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{4}\times\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3=\frac{1}{12}\left(2x^2+4x+1\right)^3+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $g(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ من الشكل $g=k\times\frac{u'}{u^2}$ أي $g=\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u^2}$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $u'(x)=2x$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{u}\right)+c$ أي $G(x)=-\frac{1}{2x^2+2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

3) $h(x)=\frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3}=\frac{1}{2}\times\frac{6x+2}{(3x^2+2x+7)^3}$. الدالة h من الشكل $h=k\times\frac{u'}{u^n}$ أي $h=\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u^n}$ حيث $u(x)=3x^2+2x+7$ و $u'(x)=6x+2$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}\right)+c$ أي $H(x)=-\frac{1}{4(3x^2+2x+7)^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

4) $v(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}=5\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ من الشكل $v=k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$ أي $v=5\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $u'(x)=2x$.

دوالها الأصلية من الشكل $V(x)=5\times\sqrt{x^2+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

6) الدوا الدوال الأصلية للدوال $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I :

بما أنّ الدالة $F:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I ، $F'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

فإنّ الدالة $F:x\mapsto e^{u(x)}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I .

تطبيق : عين في كل حالة من الحالتين التاليتين دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=2xe^{x^2+3}$ على $I=\mathbb{R}$. 2) $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x-5}$ على $I=\mathbb{R}$.

الحل :

1) $f(x)=2xe^{x^2+3}$ من الشكل $f(x)=u'(x)e^{u(x)}$ حيث $u(x)=x^2+3$ و $u'(x)=2x$ دوالها الأصلية من الشكل $F:x\mapsto e^{u(x)}+c$ أي $F(x)=e^{x^2+3}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x-5}=\frac{1}{2}(2x+2)e^{x^2+2x-5}$ من الشكل $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ حيث $u(x)=x^2+2x-5$ و $u'(x)=2x+2$ دوالها الأصلية من الشكل $F:x\mapsto\frac{1}{2}e^{u(x)}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2+2x-5}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

7) الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

بما أن الدالة $F:x\mapsto\ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I ، $F'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

فإن الدالة $F:x\mapsto\ln[u(x)]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ على I .

تطبيق: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ، $I=]-1;+\infty[$ 2) $f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ ، $I=]2;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ ، $I=]0;\pi[$ 4) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ ، $I=]1;+\infty[$ 5) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$.

الحل :

1) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ من الشكل $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(x+1)+c$ على $]-1;+\infty[$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(x-2)-\ln(x+2)=\ln\frac{x-2}{x+2}+c$ على $]2;+\infty[$ حيث c ثابت حقيقي..

3) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ من الشكل $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(\sin x)+c$ على $]0;\pi[$ حيث c ثابت حقيقي.

4) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}$ من الشكل $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+c$ على $]1;+\infty[$ حيث c ثابت حقيقي.

5) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ من الشكل $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(e^x+1)+c$ على $\mathbb{R}$ حيث c ثابت حقيقي.

المعادلات التفاضلية

1) المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

- حلول المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{(x+1)^2}$ في $]-1;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=-\frac{1}{x+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.
- حلول المعادلة التفاضلية $y'=\ln x$ في $]0;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=x\ln x-x+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=G(x)+c_1x+c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

مثال:

- حلول المعادلة التفاضلية $y''=\cos x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=-\cos x+c_1x+c_2$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

- حلول المعادلة التفاضلية $y''=4e^{2x}$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=e^{2x}+c_1x+c_2$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

3) المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=-\omega^2 y$

مبرهنة : إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2 y$ هي الدوال y حيث:

$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

مثال:

- حلول المعادلة التفاضلية $y''=-4y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.
- حلول المعادلة التفاضلية $y''+3y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\left(\sqrt{3}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{3}x\right)$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

تطبيق :

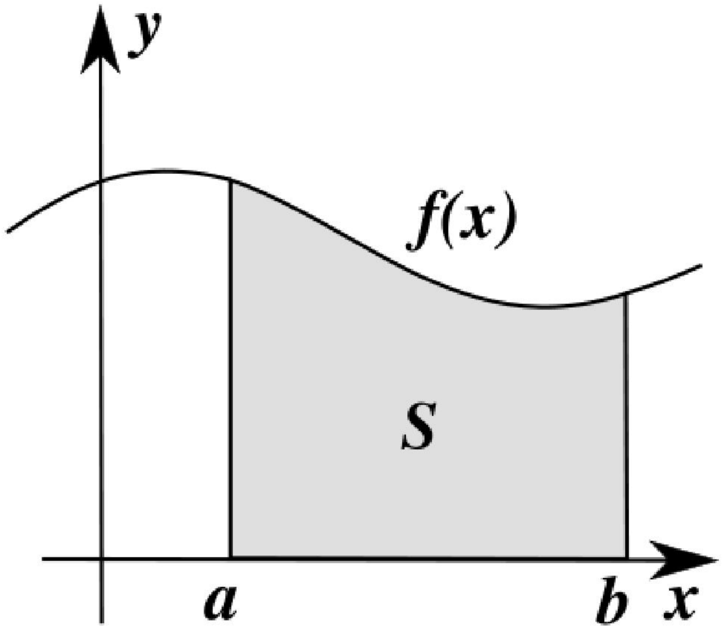
بين أن الدالة $f:x\mapsto Ae^{3x}+Be^{-3x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y"-9y=0$

الحل :

من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=3Ae^{3x}-3Be^{-3x}$ و $f"(x)=9Ae^{3x}+9Be^{-3x}=9f(x)$

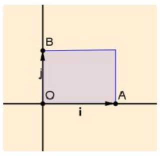
ومنه $f"(x)-9f(x)=0$ ومنه f هي حل للمعادلة التفاضلية $y"-9y=0$.

حساب التكامل

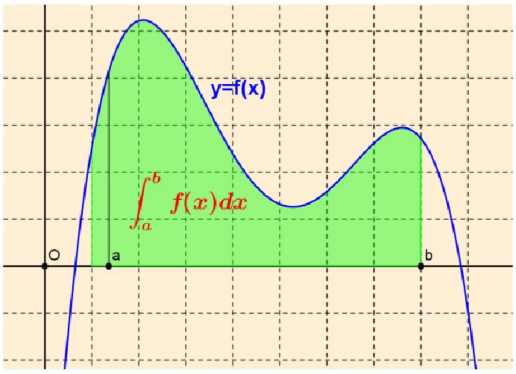


درس : حساب التكامل

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ ولتكن A و B نقطتان بحيث $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل الذي ضلعاه $[OA]$ و $[OB]$.

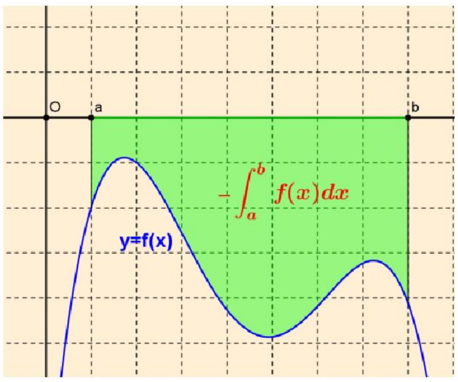


1) إذا كانت الدالة f مستمرة وموجبة على المجال $[a\,,\,b]$ ، فإن مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي التكامل من a إلى b للدالة f ونرمزلها $\int_a^b f(x)\,dx$ وحدة المساحة



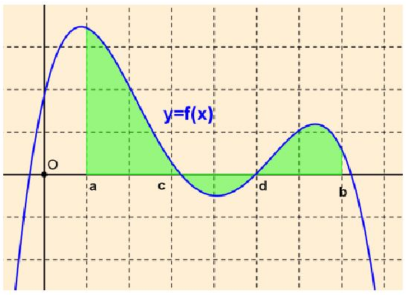
هذه المساحة هي مجموعة النقط $(x\,,\,y)$ التي تحقق $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x) \end{cases}$

2) إذا كانت الدالة f مستمرة وسالبة على المجال $[a\,,\,b]$ ، فإن مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي التكامل من a إلى b للدالة f ونرمزلها $-\int_a^b f(x)\,dx$ وحدة المساحة.



3) إذا كانت الدالة f مستمرة وتغير إشارتها على المجال $[a\,,b]$. نجزء هذا المجال إلى مجالات جزئية تحافظ في كل منها الدالة f على إشارة ثابتة ونطبق القواعد السابقة . الجزء الملون هو مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

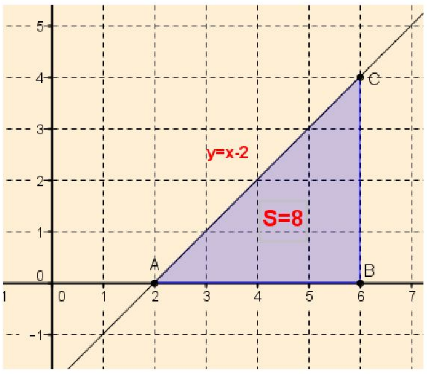


أمثلة :

1) أحسب التكامل $\int_{2}^{6}(x-2)\,dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة $f:x\mapsto x+2$ وهي دالة تآلفية . الحيز في هذه الحالة هو **مثلث** ABC

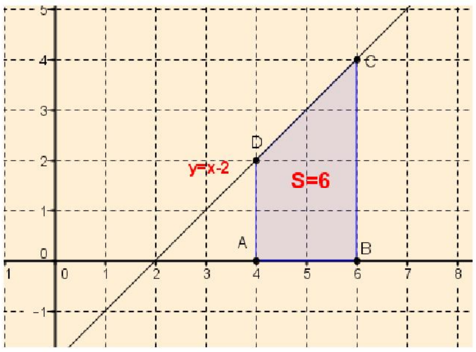
$$\int_{2}^{6}(x-2)\,dx=S_{ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times BC=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$$



2) أحسب التكامل $\int_{4}^{6}(x-2)\,dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة $f:x\mapsto x+2$ وهي دالة تآلفية . الحيز في هذه الحالة هو شبه منحرف $ABCD$

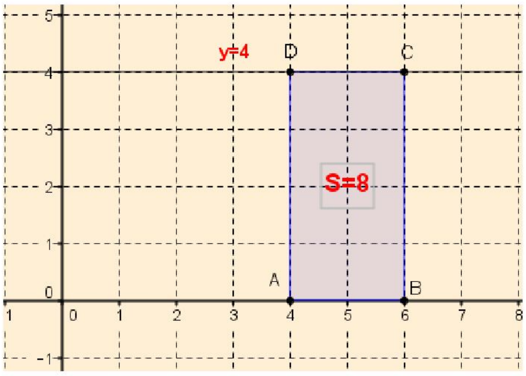
$$\int_{4}^{6}(x-2)\,dx=S_{ABCD}=\frac{(AD+BC)\times AB}{2}=\frac{(2+4)\times 2}{2}=6$$



3) أحسب التكامل $\int_{4}^{6}4\,dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة $f:x\mapsto 4$ وهي دالة ثابتة $(f(x)=4)$. الحيز في هذه الحالة هو مستطيل $ABCD$

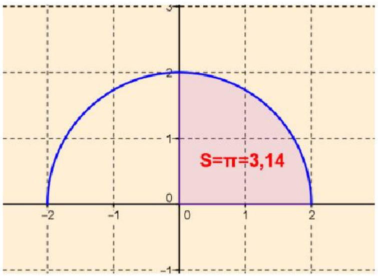
$$\int_{4}^{6}4\,dx=S_{ABCD}=AB\times AD=2\times 4=8$$



4) بين أن مجموعة النقط $M\left(x,y\right)$ التي معادلتها $y=\sqrt{4-x^2}$ هي نصف دائرة ثم أحسب التكامل $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,d\,x$

$y=\sqrt{4-x^2}$ تكافئ $\begin{cases} y^2=4-x^2 \\ y\geq 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y\geq 0 \end{cases}$ وهي معادلة جزء من الدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها 2 والواقعة فوق محور الفواصل أي نصف دائرة.

التكامل $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,d\,x$ يمثل إذن مساحة ربع الدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها 2 .

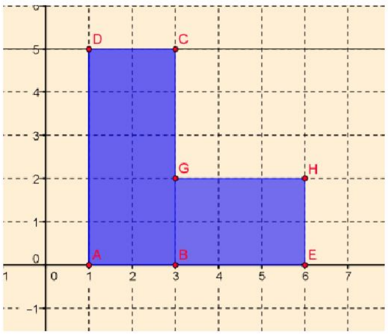


$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,d\,x=\frac{1}{4}\left(\pi\times r^2\right)=\frac{1}{4}\left(\pi\times 2^2\right)=\pi$$

5) نستطيع في بعض الحالات حساب تكامل لدوال غير مستمرة مثلا : $\begin{cases} f(x)=5 \quad , \quad x<3 \\ f(x)=2 \quad , \quad x\geq 3 \end{cases}$ ونحسب $\int_1^6 f(x)\,d\,x$.

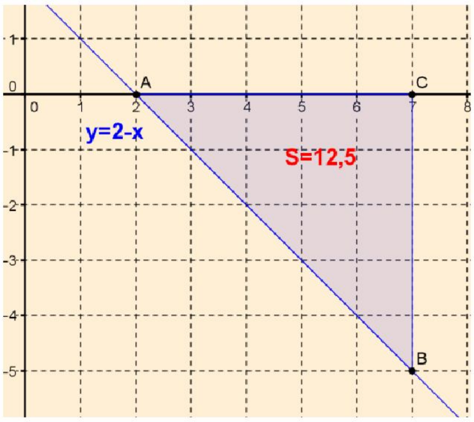
$\int_1^6 f(x)\,d\,x$ يمثل مساحة الشكل $AEHGCD$ و هو مجموع مساحتي المستطيلين $ABCD$ و $BEHG$

$$\int_1^6 f(x)\,d\,x=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^9 f(x)=AB\times BC+BE\times EH=2\times 5+3\times 2=16$$

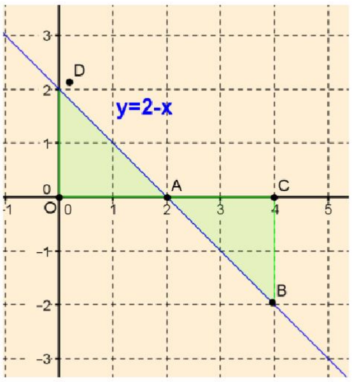


6) **أحسب التكامل** $\int_2^7 \left(2-x\right)d\,x$

$\int_2^7 (2-x)\,dx = -\frac{1}{2}\times 5\times 5 = -\frac{25}{2} = -12{,}5$. إذن مساحة المثلث ABC هي $-\int_2^7 (2-x)\,dx = 12{,}5$



7) أحسب $\int_0^4 (2-x)dx$



$$\int_0^4 (2-x)dx = S_{OAD} + (-S_{ABC}) = \frac{1}{2}(2)(2) - \frac{1}{2}(2)(2) = 0$$

الدالة الأصلية و مساحة حيز

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ و F دالة أصلية لِ f على I. مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لِ f

و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$. نقرأ:" التكامل من a إلى b لِ $f(x)$ تفاضل x ".

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

مثال : نحاول حساب التكاملات السابقة باستعمال الدوال الأصلية :

1) $\int_2^6 (x-2)\,dx$ ، **2)** $\int_4^6 (x-2)\,dx$ ، **3)** $\int_4^6 4\,dx$ **4)** $\int_0^7 (2-x)dx$.

1) $\int_{2}^{6}(x-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^6=\left(\frac{36}{2}-12\right)-\left(\frac{4}{2}-4\right)=8$

2) $\int_{4}^{6}(x-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_4^6=\left(\frac{36}{2}-12\right)-\left(\frac{16}{2}-8\right)=6$

3) $\int_{4}^{6}4dx=[4x]_4^6=(24)-(16)=8$.

4) $\int_{2}^{7}(2-x)dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_2^7=\left(14-\frac{49}{2}\right)-\left(4-\frac{4}{2}\right)=-\frac{25}{2}$.

تطبيق :

أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{1}^{3}(3x^2-4x+1)dx$ ، 2) $\int_{0}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx$ ، 3) $\int_{0}^{2}2xe^{x^2}dx$ ، 4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ ،5) $\int_{-1}^{0}(2x-3)(x^2-3x+1)dx$

الحل :

1) $\int_{1}^{3}(3x^2-4x+1)dx=\left[3\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+x\right]_1^3=\left[x^3-2x^2+x\right]_1^3$

$=(27-18+3)-(1-2+1)=12$

2) $\int_{0}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx=\left[\ln(x^2+1)\right]_0^2=\ln 5-\ln 1=\ln 5$

3) $\int_{0}^{2}2xe^{x^2}dx=\left[e^{x^2}\right]_0^2=e^4-e^0=e^4-1$

4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin-\frac{\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=2$

5) $\int_{-1}^{0}(2x-3)(x^2-3x+1)^3dx=\left[\frac{1}{4}(x^2-3x+1)^4\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}-\frac{625}{4}=\frac{-624}{4}=-156$

خواص التكامل

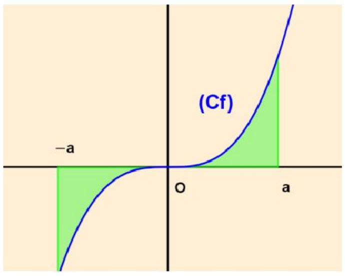
f و g دالتان مستمرتان على المجال I . a ، b عددان حقيقيين من I.

1) $\int_{a}^{a}f(x)dx=0$ ، 2) $\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$ ، 3) **علاقة شال :** $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$ حيث $c\in I$.

4) $\int_{a}^{b}kf(x)dx=k\int_{b}^{a}f(x)dx$ حيث $k\in\mathbb{R}$ ،5) $\int_{a}^{b}[f(x)+g(x)]dx=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{a}^{b}g(x)dx$.

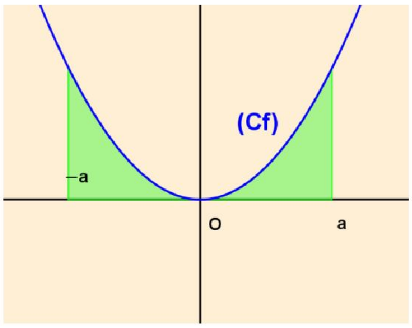
تكامل الدالة الفردية :

إذا كانت الدالة f فردية ومستمرة على مجال I مركزه O فإنه من أجل كل a من I : $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$



تكامل الدالة الزوجية:

إذا كانت الدالة f زوجيةومستمرة على مجال I مركزه O فإنه من أجل كل a من I: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$



التكامل والمقارنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a\,;b]$.

1) إذا كان من أجل كل x من $[a\,;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$

2) إذا كان من أجل كل x من $[a\,;b]$، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx$

مثال : نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي t من $[0\ ,\ x]$: $e^{t} \geq 1$.

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0\,,+\infty[$ فإن $e^{x} \geq x+1$.

الحل :

بما أن $e^{t} \geq 1$ فإن $\int_{0}^{x} e^{t}dt \geq \int_{0}^{x} 1dt$ وبالتالي $[e^{t}]_{0}^{x} \geq [t]_{0}^{x}$ أي $e^{x}-e^{0} \geq x-0$ ومنه $e^{x} \geq x+1$

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

f دالة مستمرة على مجال $[a\,;b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a\,;b]$ هي العدد الحقيقي m حيث: $m=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$.

مثال : عين القيمة المتوسطة للدالة الأسية $(x\mapsto e^{x})$ على المجال $[0\ ,\ 3]$

الحل :

نعلم ان الدالة الأصلية للدالة $f:x\mapsto e^{x}$ هي الدوال $F:x\mapsto e^{x}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

$$m=\frac{1}{3-0}\int_0^3 e^x dx=\frac{1}{3}\left[e^x\right]_0^3=\frac{e^3-e^0}{3}=\frac{e^3-1}{3}$$

حصر القيمة المتوسطة

f دالة مستمرة على مجال $[a\,;b]$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a\,;b]$، $m\le f(x)\le M$ فإن:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بِ $f(x)=1+\ln(x+1)$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0\ ;\ e-1]$.

2) استنتج حصرا لِ $f(x)$.

3) استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_1^{e-1} f(x)dx$

الحل:

1) لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x+1}$ أي $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و بالتالي هي كذلك متزايدة تماما على المجال $[0\ ;\ e-1]$.

2) بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0\ ;\ e-1]$ نستنتج أنه من أجل كل x من $[0\ ;\ e-1]$، $f(0)\le f(x)\le f(e-1)$ أي $1\le f(x)\le 2$.

3) بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\le\int_1^{e-1}f(x)dx\le 2(e-2)$.

المكاملة بالتجزئة

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I و u' و v' مشتقاتهما على الترتيب مستمرتان على I.

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

مثال :

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: $A=\int_0^1 xe^{2x}dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

الحل:

1) حساب $A=\int_0^1 xe^{2x}dx$: نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=e^{2x}$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة نكتب : $A=\int_0^1 xe^{2x}dx=\int_0^1 u(x)v'(x)dx=\left[x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\right]_0^1-\int_0^1(1)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$

و منه $A=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}e^0\right]=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$. إذن $A=\frac{e^2+1}{4}$.

2) حساب $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$: نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\cos x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=\sin x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة نكتب : $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx=\left[x(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1)(\sin x)\,dx$

و منه $B=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right]=\frac{\pi}{2}-1$. إذن $B=\frac{\pi}{2}-1$.

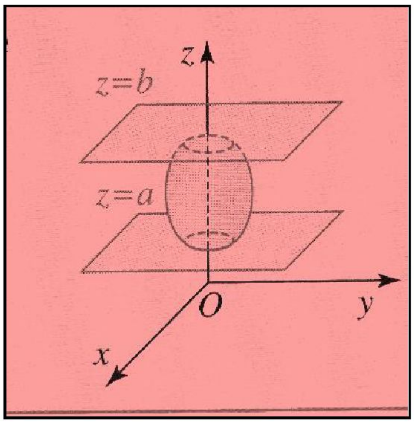
حساب الحجوم

حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محاوره $(x'x)$ ، $(y'y)$ و $(z'z)$.

وحدة الحجوم (uv) هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على $(O;I,J,K)$.

المجسم Σ محدد بمستويين (P_1) ، (P_2)



نعتبر في الفضاء Σ مجسما محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما: $z=a$ و $z=b$.

نسمي V حجم المجسم و $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو موازٍ للمستوي (xOy) راقمه z حيث $a\leq z\leq b$.

فإن $V=\int_a^b S(z)\,dz$.

حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر الجزء من المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ المحدد بالمنحني الذي معادلته $y=f(x)$ والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=b$, $x=a$ والمحور $(O,\vec{i})$.

عندما يدورهذا الجزء من المستوي يولد مجسما دورانيا محددا بالمستويين الموازيين لـ $(O,\vec{j},\vec{k})$ راقمهما على الترتيب a و b .

حجم هذا المجسم الدوراني بوحدة الحجوم هو $V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$

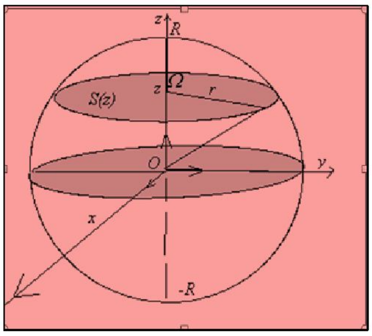
مثال: أحسب V حجم المجسم الدوراني المولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ للحيز المحدد بمنحني الدالة $f:x\mapsto x^2$ وبالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

الحل : $V=\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x^4\right)dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{5}$

أمثلة متنوعة

1) برهن أن حجم كرة طول نصف قطرها R هو: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

الحل :



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

الكرة التي مركزها O و طول نصف قطرها R.

مقطع هذه الكرة بمستو مواز للمستوي $\left(xOy\right)$ و راقمه z حيث $-R<z<R$

هي دائرة مركزها $\Omega\left(0\,;0\,;z\right)$ و طول نصف قطرها $r=\Omega M$ مع $OM=R$.

لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2+z^2=R^2$ ومنه $r^2=R^2-z^2$.

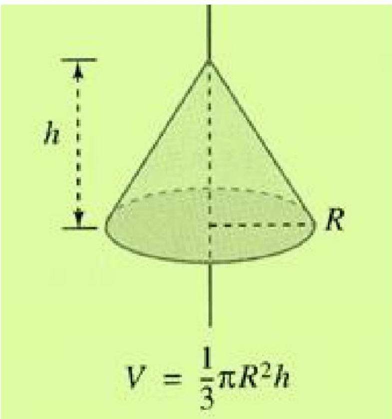
إذن مساحة القرص الذي مركزه Ω و طول نصف قطره R هي: $S\left(z\right)=\pi\left(R^2-z^2\right)$

ونحسب الحجم كما يلي : $V=\int_{-R}^{R}S\left(z\right)dz=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz$ و بالتالي:

$V=\pi\left[R^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}=\pi\left[\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)-\left(-R^3+\frac{1}{3}R^3\right)\right]$ و منه $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ وحدة الحجوم

2) برهن أن حجم المخروط الدوراني الذي راسه O وارتفاعه h و طول نصف قطره R هو $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$

الحل :



ليكن r طول نصف قطر القرص

لدينا حسب مبرهنة طاليس $\frac{r}{R}=\frac{z}{h}$ ومنه $r=\frac{Rz}{h}$

ومنه مساحة القرص بدلالة z هي $S\left(z\right)=\pi\times r^2=\pi\left(\frac{Rz}{h}\right)^2=\pi\frac{R^2}{h^2}z^2$

ويكون حجم المخروط

$$V=\int_{0}^{h}S\left(z\right)dz=\int_{0}^{h}\left(\pi\frac{R^2}{h^2}\right)z^2dz=\left(\pi\frac{R^2}{h^2}\right)\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h=\left(\pi\frac{R^2}{h^2}\right)\left[\frac{h^3}{3}-\frac{0}{3}\right]=\frac{1}{3}\pi R^2h$$

تمارين محلولة للتدريب

تمارين محلولة حول الدوال الأصلية و التكامل

التمرين رقم 01 : أحسب F الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ للدوال التالية:

1) $f(x)=-10x^4+8x^3+3x^2-4x+17$ على المجال $\mathbb{R}$ ، **2)** $f(x)=\dfrac{4x^3+2x^2-5}{3}$ على المجال $\mathbb{R}$ ،

3) $f(x)=-2\cos x-4\sin x+3$ على المجال $\mathbb{R}$ ، **4)** $f(x)=3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}$ على المجال $]0\ ,\ +\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2x+3$ على المجال $]0\ ,\ +\infty[$

التمرين رقم 02 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $u'u^n$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=2x\left(x^2-1\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=-3(-3x+1)^4$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=x^2\left(x^3-2\right)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 4) $f(x)=\dfrac{(2x+3)^3}{7}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=e^x\left(e^x-2\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 6) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x)^2$ ، $I=]0;+\infty[$ ، 8) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}\left[\ln(x-1)\right]^2$ ، $I=]1;+\infty[$

9) $f(x)=-2\cos x\sin^2 x$ ، $I=\mathbb{R}$

التمرين رقم 03 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{u^n}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$ ، $I=]-1;+\infty[$ **2)** $f(x)=\dfrac{7}{(2x+1)^3}$ ، $I=\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ ، $I=]1;+\infty[$ **4)** $f(x)=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$ ؛ $I=]0;\pi[$

التمرين رقم 04 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ ؛ $I=]2;+\infty[$ **2)** $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ ؛ $I=]-\infty;2[$

3) $f(x)=\dfrac{2e^x}{3\sqrt{e^x+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$ **4)** $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ ، $I=]1;+\infty[$

التمرين رقم 05 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{u}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ ؛ $I=]2;+\infty[$ 2) $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$ 4) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ ؛ $I=]0;\pi[$

التمرين رقم 06 : أحسب الدوال الأصلية لكل من الدوال التالية على المجال المعطى I:

1) $f(x)=2x^3-4x+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}$ مع $I=]0\,;+\infty[$.

2) $f(x)=(2x+1)^4$ مع $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\frac{1}{(3x+2)^2}$ مع $I=]0\,;+\infty[$.

4) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}$ مع $I=\mathbb{R}$.

التمرين رقم 07 :

لتكن f الدالة المعرفة على $]0\ ;\ +\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x^3+2x^2+x-3}{(x+1)^2}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\ ;\ +\infty[$:

$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$.

2) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0\ ;\ +\infty[$.

التمرين رقم 08 : أحسب $A=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$ ، $B=\int_{-2}^{0}\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$

التمرين رقم 09 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$ ونعرف التكامل التالي : $I=\int_0^{\ln 2}f(x)\,dx$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)>0$ واستنتج إشارة I .

2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث $\frac{e^x}{1+e^x}=a+\frac{b}{1+e^x}$.

3) أحسب $A=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx$ ثم $B=\int_0^{\ln 2}f'(x)\,dx$

4) أحسب $f(x)+f'(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل I .

التمرين رقم 10 :

1) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx}{x^2+1}$.

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_1^2 \frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

التمرين رقم 11 :

أحسب $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,d\,x$

التمرين رقم 12:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2e^{2x}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

2) أحسب $\int_0^1 f(x)dx$

التمرين رقم 13 :

1) احسب التكامل $I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

2) ليكن $I_2=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$ احسب I_1+I_2 ثم استنتج قيمة I_2 .

التمرين رقم 14 :

نضع $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$.

1) أحسب $A+B$.

2) أحسب باستعمال المكاملة بالتجزئة $A-B$.

3) استنتج من 1) و 2) قيمة كلا من A و B .

التمرين رقم 15 :

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $A=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ ، $B=\int_1^{e}\ln t\,dt$ ، $C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}\,dx$.

حلول التمارين التدريبة

!!!!!!!!

حلول تطبيقات الدوال الأصلية والتكامل

حل التمرين رقم 01 :

1) $f(x)=-10x^4+8x^3+3x^2-4x+17$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ أي $F(x)=-10\dfrac{x^5}{5}+8\left(\dfrac{x^4}{4}\right)+3\left(\dfrac{x^3}{3}\right)-4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)+17x+c=-2x^5+2x^4+x^3-2x^2+17x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f(x)=\dfrac{4x^3+2x^2-5}{3}=\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5}{3}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ أي $F(x)=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{x^4}{4}\right)+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^3}{3}\right)-\dfrac{5}{3}x+c=\dfrac{1}{3}x^4+\dfrac{2}{9}x^3-\dfrac{5}{3}x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

3) $f(x)=-2\cos x-4\sin x+3$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ أي $F(x)=-2(\sin x)-4(-\cos x)+3x+c=-2\sin x+4\cos x+3x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

4) $f(x)=3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]0\ ,\ +\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]0\ ,\ +\infty[$ أي $F(x)=3x-\left(\dfrac{-1}{2x^2}\right)+5\left(\dfrac{-1}{3x^3}\right)+c=3x+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{5}{3x^3}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

5) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2x+3$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]0\ ,\ +\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]0\ ,\ +\infty[$ أي $F(x)=\sqrt{x}-x^2+3x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 02 :

1) $f(x)=2x\left(x^2-1\right)^3$ الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\dfrac{1}{4}\left(x^2-1\right)^4+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f(x)=-3(-3x+1)^4$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\dfrac{1}{5}(-3x+1)^5+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

3) $f(x)=x^2\left(x^3-2\right)^2=\frac{1}{3}\times 3x^2\left(x^3-2\right)^2$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\frac{1}{3}u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\frac{1}{3}\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\left(x^3-2\right)^3+c=\frac{1}{9}\left(x^3-2\right)^3+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

4) $f(x)=\frac{(2x+3)^3}{7}=\frac{1}{7}(2x+3)^3=\frac{1}{14}\times 2(2x+3)^3$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\frac{1}{14}u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\frac{1}{14}\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{14}.\frac{1}{4}(2x+3)^4+c=\frac{1}{56}(2x+3)^4+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

5) $f(x)=e^x\left(e^x-2\right)^3$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{4}\left(e^x-2\right)^4+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

6) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=-\frac{1}{2}u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=-\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=-\frac{1}{8}\left(e^{-2x}+2\right)^4+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

7) $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x)^2$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]0\ ,\ +\infty[$ وهي من الشكل $f=u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]0\ ,\ +\infty[$ من الشكل $F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{3}(\ln x)^3+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

8) $f(x)=\frac{3}{x-1}\left[\ln(x-1)\right]^2=3\times\frac{1}{x-1}\left[\ln(x-1)\right]^2$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]1\ ,\ +\infty[$ وهي من الشكل $f=3u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]1\ ,\ +\infty[$ من الشكل $F=3\times\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي

$F(x)=3\times\frac{1}{3}\left[\ln(\ln x-1)\right]^3+c=\left[\ln(\ln x-1)\right]^3+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

9) $f(x)=-2\cos x\sin^2 x=-2(\cos x)(\sin x)^2$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=-2u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=-2\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{-2}{3}(\sin x)^3+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 03 :

1) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}$.الدالة f معرفة ومستمرة على $]-1;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\frac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]-1;+\infty[$ من الشكل $F=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\frac{-1}{2(x+1)^2}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f(x)=\frac{7}{(2x+1)^3}=\frac{7}{2}\times\frac{2}{(2x+1)^3}$.الدالة f معرفة ومستمرة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ وهي من الشكل $f=\frac{7}{2}\times\frac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ من الشكل $F=-\frac{7}{2}\times\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\frac{-7}{4(2x+1)^2}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

3) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$.الدالة f معرفة ومستمرة على $]1;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\frac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]1;+\infty[$ من الشكل $F=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\frac{-1}{\ln x}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

4) $f(x)=\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=2\times\frac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=2\times\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\frac{-2}{(1+e^x)}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

5) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^3 x}$.الدالة f معرفة ومستمرة على $]0;\pi[$ وهي من الشكل $f=\frac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]0;\pi[$ من الشكل $F=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\frac{-1}{2(\sin x)^2}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 04 :

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$.الدالة f معرفة ومستمرة على $]2;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]2;+\infty[$ من الشكل $F=2\sqrt{u}+c$ أي $F(x)=2\sqrt{x-2}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f\left(x\right)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{1}{2}\times\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]-\infty;2[$ وهي من الشكل $f=\frac{1}{2}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]-\infty;2[$ من الشكل $F=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{u}\right)+c$ أي $F(x)=\sqrt{x^2-2x}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

3) $f\left(x\right)=\frac{2e^x}{3\sqrt{e^x+1}}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\frac{2}{3}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{u}\right)+c$ أي $F(x)=\frac{4}{3}\sqrt{e^x+1}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

4) $f\left(x\right)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=2\sqrt{u}+c$ أي $F(x)=2\sqrt{\sin x+1}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

5) $f\left(x\right)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln x}}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]1;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]1;+\infty[$ من الشكل $F=2\sqrt{u}+c$ أي $F(x)=2\sqrt{\ln x}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 05 :

1) $f\left(x\right)=\frac{1}{x-2}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]2;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\frac{u'}{u}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]2;+\infty[$ من الشكل $F=\ln u+c$. وعلى المجال $]2;+\infty[$ يكون $x-2>0$ إذن $F(x)=\ln\left(x-2\right)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f\left(x\right)=\frac{x}{x^2+3}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+3}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\frac{1}{2}.\frac{u'}{u}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\ln u+c$ إذن $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

3) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\dfrac{u'}{u}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\ln u+c$ إذن $F(x)=\ln\left(e^x+1\right)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]0;\pi[$ وهي من الشكل $f=\dfrac{u'}{u}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\ln u+c$ ولدينا $\sin x>0$ على $]0;\pi[$ إذن $F(x)=\ln(\sin x)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 06 :

1) $f(x)=2x^3-4x+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}=2x^3-4x+2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-5\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ **دوالها الأصلية F حيث**

$F(x)=2\dfrac{x^4}{4}-4\dfrac{x^2}{2}+2\left(-\dfrac{1}{x}\right)-5\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)+c=\dfrac{x^4}{2}-2x^2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{2x^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $f(x)=(2x+1)^4=\dfrac{1}{2}(2)(2x+1)^4$ من الشكل $\dfrac{1}{2}u'u^n$ دوالها الأصلية F حيث

$F(x)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{5}(2x+1)^5\right]+c=\dfrac{1}{10}(2x+1)^5+c$ حيث c ثابت حقيقي.

3) $f(x)=\dfrac{1}{(3x+2)^2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{(3x+2)^2}$ من الشكل $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'}{u^2}$ دوالها الأصلية F حيث

$F(x)=\dfrac{1}{3}\left[-\dfrac{1}{(2-1)(3x+2)^{2-1}}\right]+c=-\dfrac{1}{3(3x+2)}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}$ من الشكل $\dfrac{u'}{u^3}$ دوالها الأصلية F حيث

$F(x)=\left[-\dfrac{1}{(3-1)\left(x^2+x+2\right)^{3-1}}\right]+c=-\dfrac{1}{2\left(x^2+x+2\right)^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

حل التمرين رقم 07 :

1) $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}=\dfrac{(ax+b)(x+1)^2+c}{(x+1)^2}$ بعد النشر والتبسيط نجد $a=1\ ,\ b=0\ \ ,\ c=-3$ أي

$f(x)=x-\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

2) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-3\left[\dfrac{-1}{(2-1)(x+1)^{2-1}}\right]+k=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x+1}+k$ حيث k ثابت حقيقي.

حل التمرين رقم 08 :

1) حساب $A=\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx$

الدالة $f:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ معرفة ومستمرة على $\left[1\ ,\ e^2\right]$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية على هذا المجال .

$A=\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx=\int_1^{e^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)(\ln x)dx$. الدالة f من الشكل $f=u'u$ حيث $u(x)=\ln x$ و $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.

إذن $A=\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx=\left[\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{e^2}=\dfrac{1}{2}\left(\ln e^2\right)^2-\dfrac{1}{2}(\ln 1)^2=2$ وأخيرا $\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx=2$

$B=\int_{-2}^{0}\dfrac{x-1}{x^2-2x+5}dx$

الدالة $f:x\mapsto\dfrac{x-1}{x^2-2x+5}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية على $\mathbb{R}$.

$B=\int_{-2}^{0}\dfrac{x-1}{x^2-2x+5}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-2}^{0}\dfrac{2x-2}{x^2-2x+5}dx$ من الشكل من الشكل $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u}$ حيث $u(x)=x^2-2x+5$ وهي موجبة تماما

$(\Delta<0)$ و $u'(x)=2x-2$

$$B=\int_{-2}^{0}\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2-2x+5\right)\right]_{-2}^{0}=\frac{1}{2}[\ln 5-\ln 13]=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{13}$$

حل التمرين رقم 09 :

1) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x>0$ ومنه $e^x+1>1$ وبالتالي $\ln\left(e^x+1\right)>0$ وكذلك من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{-x}>0$ ومنه $e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)>0$ أي $f(x)>0$. وبما أن $0<\ln 2$ فحسب الخاصية :

إذا كانت $f(x)\geq 0$ و $a\leq b$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ نستنتج أن $\int_0^{\ln 2}f(x)dx>0$.

2) $\dfrac{e^x}{1+e^x}=a+\dfrac{b}{1+e^x}=\dfrac{ae^x+a+b}{1+e^x}$ وبالمطابقة نجد $a=1$ و $a+b=0$ أي $b=-1$. إذن $\dfrac{e^x}{1+e^x}=1-\dfrac{1}{1+e^x}$.

3) $A=\int_0^{\ln 2}\dfrac{1}{1+e^x}dx=\int_0^{\ln 2}\left(1-\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\left[x-\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^{\ln 2}=\ln 2-\ln\left(1+e^{\ln 2}\right)-0+\ln\left(1+e^0\right)$

أي $A=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx=\ln 2-\ln\left(1+e^{\ln 2}\right)-0+\ln\left(1+e^0\right)=\ln 2-\ln 3+\ln 2=2\ln 2-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$

$$\boxed{A=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx=\ln\frac{4}{3}}$$

إذن $B=\int_0^{\ln 2}f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^{\ln 2}=f(\ln 2)-f(0)=e^{-\ln 2}\ln\left(1+e^{\ln 2}\right)-\ln 2=\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2$

$$\boxed{B=\int_0^{\ln 2}f'(x)dx=\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2}$$

4) لدينا $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$ ومنه $f'(x)=-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)+\frac{e^x}{1+e^x}\times e^{-x}=\frac{1}{1+e^x}-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$ إذن

$$f(x)+f'(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)+\frac{1}{1+e^x}-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)=\frac{1}{1+e^x}$$

بما أن $f(x)+f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$ فإن $f(x)=\frac{1}{1+e^x}-f'(x)$ ومنه

وأخيرا $\int_0^{\ln 2}f(x)dx=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx-\int_0^{\ln 2}f'(x)dx=A-B=\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2=\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}$ $\boxed{I=\int_0^{\ln 2}f(x)dx=\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}}$

حل التمرين رقم 10 :

1) من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx}{x^2+1}=\frac{a\left(x^2+1\right)+bx^2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{(a+b)x^2+a}{x\left(x^2+1\right)}$

بالمطابقة نجد $a=1$ و $a+b=0$ أي $b=-1$ ومنه $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$.

2)حساب $\int_1^2\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$: نضع $u(x)=\ln x$ ، $v'(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ و منه $u'(x)=\frac{1}{x}$ ، $v(x)=-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$ نكتب :

$$\int_1^2\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\left[(\ln x)\left(\frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\right)\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{-\ln 2}{10}\right]+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx$$

ولكن $\int_1^2\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5$

ومنه $\int_1^2\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\left[\frac{-\ln 2}{10}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5\right]=\frac{-\ln 2}{10}+\frac{3\ln 2}{4}-\frac{\ln 5}{4}=\frac{13\ln 2}{20}-\frac{\ln 5}{4}$

وأخيرا $\boxed{\int_1^2\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{13\ln 2}{20}-\frac{\ln 5}{4}}$

حل التمرين رقم 11 :

الدالة $f : x \mapsto \tan x$ معرفة ومستمرة على المجال $\left[\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{4}\right]$ فهي تقبل على هذا المجال دوالا أصلية .

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx$ وهذه الدالة f من الشكل $-\frac{u'}{u}$ حيث $u(x) = \cos x$ وهي موجبة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$ إذن $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx = -\left[\ln(\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left[\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\left[\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$

وأخيرا : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx = \frac{1}{2}\ln 2$

حل التمرين رقم 12:

1) F أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معناه $F'(x) = f(x)$ أي

$$F'(x) = (2ax+b)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^2+bx+c) = \left[2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c\right]e^{2x}$$

$F'(x) = f(x)$ تكافئ $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a+2b = 0 \\ b+2c = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$ ومنه $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$

2) حساب $\int_0^1 f(x)dx$: $\int_0^1 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^0 = \frac{e^2-1}{4}$

حل التمرين رقم 13 :

1) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$ وأخيرا $I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$

2) $I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ إذن $I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$.

نستنتج أن $I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

حل التمرين رقم 14 :

1) $A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\ dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$ إذن

$A+B=\frac{\pi^2}{8}$

2) $A-B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\ dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$

نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\cos 2x$ ومنه $u'(x)=1$ ، $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$ نكتب :

$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx=\left[(x)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=\left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}$ إذن $A-B=-\frac{1}{2}$

3) لدينا $\begin{cases} A+B=\frac{\pi^2}{8} \\ A-B=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $A=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$ و $B=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$.

حل التمرين رقم 15 :

1)حساب $A=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$. نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\sin x$ ومنه $u'(x)=1$ ، $v(x)=-\cos x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$ نكتب :

$A=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=\left[(x)(-\cos x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x\,dx=[\pi]+\left[\sin x\right]_0^{\pi}=\pi$ إذن $A=\pi$

2)حساب $B=\int_1^{e}\ln t\,dt$. نضع $u(t)=\ln t$ ، $v'(t)=1$ ومنه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(t)v'(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$ نكتب :

$B=\int_1^{e}\ln t\,dt=\left[(t)(\ln t)\right]_1^{e}-\int_1^{e}\frac{1}{t}\times t\,dt=\left[e\ln e-1\ln 1\right]-\left[e-1\right]=1$ إذن $B=1$.

1) حساب $C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}\,dx$

نضع $u(x)=2x+1$ ، $v'(x)=e^{-x}$ ومنه $u'(x)=2$ ، $v(x)=-e^{-x}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$ نكتب :

$C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}\,dx=\left[(2x+1)\left(-e^{-x}\right)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-2e^{-x}dx=[-1-e]-\left[2e^{-x}\right]_{-1}^{0}=e-3$ إذن $C=e-3$

استعد للبكالوريا

تمارين نموذجية

التمرين رقم 01:

الهدف من هذا التمرين هو حساب التكاملات التالية :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ، \quad J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad ، \quad K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx .$$

أولا : حساب I:

f الدالة المعرفة على $[0\,,1]$ كما يلي : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

1) أحسب الدالة المشتقة للدالة $x\mapsto\sqrt{x^2+2}$.
2) استنتج الدالة المشتقة f' للدالة f.
3) أحسب قيمة I.

ثانيا: حساب J و K

1) بدون حساب J و K بين أن $J+2I=K$.
2) باستعمال المكاملة بالتجزئة على K، بين أن $K=\sqrt{3}-J$.
3) استنتج قيمة كلا من J و K.

التمرين رقم 02:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ كما يلي:

$u_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{2x}dx$ حيث $\ln$ هو اللوغاريتم النيبري.

1. أحسب u_n بدلالة n
2. بين أنّ المتتالية (u_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين الحد الأول والأساس.
3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ كما يلي: $v_n=e^{u_n}$ بين أنّ (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول والأساس.
4. أحسب بدلالة n المجموع $S_n=u_1+u_2+.......+u_n$
5. أحسب بدلالة n الجداء $P_n=v_1\times v_2\times v_3........\times v_n$.

التمرين رقم 03:

الأسئلة الثلاثة مستقلة فيما بينها .

1) نعتبر التكامل $I=\int_{0}^{1}\frac{x^2}{x+2}dx$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0\,,1]$: $\frac{x^2}{x^2+2}=x-2+\frac{4}{x+2}$.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لـ I.

2) نعتبر التكاملين : $K=\int_{0}^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ ، و $J=\int_{0}^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$

أ) أحسب $K-3J$ و $K+J$.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من K و J.

3) لتكن f الدالة المعرفة على $[-1\,,1]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

أ) تحقق من أن (C_f) هو نصف دائرة مركزها O وطول نصف قطرها 1 والتي يقع في نصف المستوي الذي تراتيب نقطه موجبة .

ب) استنتج أن $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{4}$.

التمرين رقم 04:

1. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع. $u_n=\int_{0}^{1}x^n e^{-x}dx$

بين أنّ. $u_1=1-\frac{2}{e}$

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}=(n+1)u_n-\frac{1}{e}$

3. أحسب u_2 بدلالة e .

4. بين أن. $u_3=6-\frac{16}{e}$

تحقق أن $\int_{0}^{1} 2x^3-8x^2+4x\ \ e^{-x}dx=0$

التمرين رقم 05

نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

1) أ) لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = xe^{x^2}$. بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة g .

ب) استنتج قيمة I_1 .

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$.

3) استنتج I_3 و I_5

التمرين رقم 06

نريد حصرا للتكامل $I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx$.

1) أدرس تغيرات الدالتين u و v المعرفتين على $[0\,;1]$ كما يلي :

$u(x) = x - 1 + e^{-x}$ و $v(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$.

2) تحقق انه من أجل كل x من $[0\,;1]$: $1 - x \le e^{-x} \le 1 - x + \frac{x^2}{2}$.........(1)

3) بين أنه من أجل كل x من $[0\,;1]$: $1 - x \le \frac{e^{-x^2}}{1+x} \le 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$.........(2) .

4) تحقق أنه من أجل كل x من $[0\,;1]$: $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$

5) استنتج من العلاقة (2) أن $\frac{1}{2} \le I \le \frac{5}{24} + \frac{1}{2}\ln 2$.

حلول استعد للبكالوريا

حل التمرين رقم 01:

أولا:

1) نضع $u(x)=\sqrt{x^2+2}$ ، u قابلة الإشتقاق على $[0\,,1]$ و $u'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

2) $$f'(x)=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

3) $$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=\ln(1+\sqrt{3})-\ln\sqrt{2}$$

ثانيا: $\left[f(x)\right]_0^1$

1) $J+2I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx=K$.

2) $K=\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx$ نستعمل المكاملة بالتجزئة

$$u(x)=\sqrt{x^2+2}\;;\;u'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$
$$v(x)=x\;;\;v'(x)=1$$

$$K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx=\left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-J$$

إذن $K=\sqrt{3}-J$.

4) استنتاج قيمة كلا من J و K.

لدينا $J+2I=K$ و $K=\sqrt{3}-J$ نحل الجملة : $\begin{cases}J+2I=K\\K=\sqrt{3}-J\end{cases}$ التي تكافئ $\begin{cases}J=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-I\\K=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+I\end{cases}$

ونجد $\begin{cases} J=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\ln(1+\sqrt{3})+\ln\sqrt{2} \\ K=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\ln(1+\sqrt{3})-\ln\sqrt{2} \end{cases}$

حل التمرين رقم 02:

1) $u_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln n}^{\ln(n+1)}=n+\frac{1}{2}$

2) $u_{n+1}-u_n=\left(n+1+\frac{1}{2}\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)=1$ **ومنه** u_n **حسابية أساسها 1 وحده الأول** $u_1=\frac{3}{2}$

3) $v_{n+1}=e^{u_{n+1}}=e^{u_n+1}=e^{u_n}\times e^1=v_n\times e$ **ومنه** v_n **هندسية أساسها** e **وحده الأول** $v_1=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

4) $S_n=u_1+u_2+.......+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=\frac{n}{2}(\frac{3}{2}+n+\frac{1}{2})=\frac{n}{2}(n+2)$

5)
$$P_n=v_1\times v_2\times v_3........\times v_n=e^{u_1}\times e^{u_2}\times e^{u_3}\times........e^{u_n}$$
$$=e^{u_1+u_2+.......+u_n}=e^{S_n}=e^{\frac{n}{2}(n+2)}$$

حل التمرين رقم 03:

1) أ) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $[0\,,1]$: $\frac{x^2}{x^2+2}=\frac{x^2-4+4}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)+4}{x+2}=x-2+\frac{4}{x+2}$.

ب) $I=\int_0^1\frac{x^2}{x+2}dx=\int_0^1\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x+ln\left(x+2\right)\right]_0^1=-\frac{3}{2}+4ln\frac{3}{2}$.

2) أ) لدينا : $K=\int_0^{ln16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ ، و $J=\int_0^{\ln16}\frac{1}{e^x+4}dx$

$K-3J=\int_0^{ln16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx-3\int_0^{ln16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{ln16}\frac{e^x}{e^x+4}dx=\left[ln\left(e^x+4\right)\right]_0^{ln16}=ln4$ و

$K+J=\int_0^{ln16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx+\int_0^{ln16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{ln16}\frac{e^x+4}{e^x+4}dx=[x]_0^{ln16}=ln16$.

ب) لدينا إذن : $\begin{cases} K-3J=ln4 \\ K+J=ln16 \end{cases}$ نحل الجملة فنجد : $J=\frac{\ln2}{2}$ و $K=\frac{7ln2}{2}$.

3) f الدالة المعرفة على $[-1\,,1]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

أ) لتكن $M(x,y)$ نقطة من (C_f) فيكون لدينا $y=\sqrt{1-x^2}$ حيث $y\geq 0$ ومنه النقطة M تقع في نصف المستوي الذي تراتيب نقطه موجبة .

وكذلك $OM^2=x^2+y^2=x^2+1-x^2=1$ أي $OM=1$.

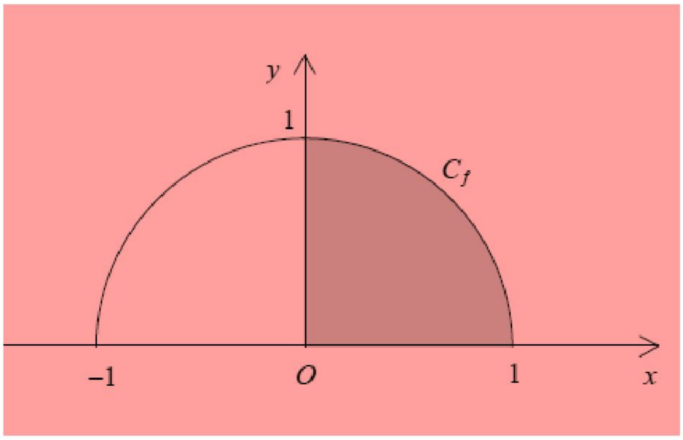
إذن النقطة M تقع على نصف دائرة مركزها O وطول نصف قطرها 1 والتي يقع في نصف المستوي الذي تراتيب نقطه موجبة

وبالعكس لتكن $N(a,b)$ نقطة من هذا نصف الدائرة فيكون :

$(b\geq 0$ و $ON^2=1)$ أي $(b\geq 0$ و $a^2+b^2=1)$ أو كذلك $(b\geq 0$ و $b^2=1-a^2)$

وبما أن $a\in[-1\,,1]$ فإن $1-a^2\geq 0$ فإن $b=\sqrt{1-a^2}$ أي $b=f(a)$ ومنه $N\in(C_f)$.

ب) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}$ يمثل مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ هذا الحيز



هو ربع القرص الذي طول نصف قطره 1 مساحته $\frac{\pi}{4}$

إذن : $\int_0^1\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{4}$

حل التمرين رقم 04:

1) $u_1=\int_0^1 xe^{-x}dx$ نكامل بالتجزئة :

لدينا $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=e^{x}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=-e^{x}\end{cases}$

$$u_1=\int_0^1 xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\left[-e^{-x}\right]_0^1=u_1=1-\frac{2}{e}$$

2) $u_{n-1}=\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$ نكامل بالتجزئة :

نضع $u(x)=x^{n+1}$ و $v'(x)=e^{-x}$ ومنه $u'(x)=\ n+1\ x^{n}$ و $v(x)=-e^{-x}$

$$u_{n\ \ 1}=\int_{0}^{1}x^{n+1}e^{-x}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1-\int_{0}^{1}-(n+1)x^{n}e^{-x}dx$$

$$u_{n-1}=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1+(n+1)\int_{0}^{1}x^{n}e^{-x}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1+(n+1)u_{n}$$

$$u_{n-1}=-\frac{1}{e}+(n+1)u_{n}$$

3) من العلاقة $u_{n+1}=(n+1)u_{n}-\dfrac{1}{e}$ نستنتج أن $u_{2}=2u_{1}-\dfrac{1}{e}=2\left(1-\dfrac{2}{e}\right)-\dfrac{1}{e}=2-\dfrac{5}{e}$

4) من العلاقة $u_{n+1}=(n+1)u_{n}-\dfrac{1}{e}$ نستنتج أن $u_{3}=3u_{2}-\dfrac{1}{e}=3\left(2-\dfrac{5}{e}\right)-\dfrac{1}{e}=6-\dfrac{16}{e}$

5)
$$\int_{0}^{1}\ 2x^{3}-8x^{2}+4x\ \ e^{-x}dx=2\int_{0}^{1}x^{3}e^{-x}dx-8\int_{0}^{1}x^{2}e^{-x}dx+4\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$$
$$=2u_{3}-8u_{2}+4u_{1}=2\left(6-\frac{16}{e}\right)-8\left(2-\frac{5}{e}\right)+4\left(1-\frac{2}{e}\right)=0$$

حل التمرين رقم 05:

1) أ) الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $G'(x)=\dfrac{1}{2}\times 2xe^{x^{2}}=xe^{x^{2}}=g(x)$ أي الدالة G هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة g .

ب) $\dfrac{e-1}{2}=\dfrac{1}{2}e^{1}-\dfrac{1}{2}e^{0}=G(1)-G(0)=\left[G(x)\right]_0^1=I_1=\displaystyle\int_{0}^{1}x^{1}e^{x^{2}}dx$. ومنه $I_1=\dfrac{e-1}{2}$

2) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $I_{n+2}=\displaystyle\int_{0}^{1}x^{n+2}e^{x^{2}}dx=\int_{0}^{1}x^{n+1}\times xe^{x^{2}}dx$

نضع $u(x)=x^{n+1}$ و $v'(x)=xe^{x^{2}}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^{n}$ و $v(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^{2}}$.

$$I_{n+2}=\int_{0}^{1}x^{n+1}\times xe^{x^{2}}dx=\left[x^{n+1}\times\frac{1}{2}e^{x^{2}}\right]_0^1-\int_{0}^{1}(n+1)x^{n}\times\frac{1}{2}e^{x^{2}}dx$$

$$I_{n+2}=\left(1^{n+1}\times\frac{1}{2}e^{1}-0\times\frac{1}{2}e^{0}\right)-\frac{n+1}{2}\int_{0}^{1}x^{n}\times e^{x^{2}}dx=\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}I_{n}$$

3) لدينا $I_{n+2}=\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}I_n$ و $I_1=\frac{e-1}{2}$

$$I_3=I_{1+2}=\frac{1}{2}e-\frac{1+1}{2}I_1=\frac{e}{2}-\frac{e-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$I_5=I_{3+2}=\frac{1}{2}e-\frac{3+1}{2}I_3=\frac{e}{2}-2I_3=\frac{e-2}{2}$$

حل التمرين رقم 06

1) **دراسة تغيرات u** : الدالة u مستمرة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وخصوصا على $[0\,;1]$

و $u'(x)=1-e^{-x}=1-\frac{1}{e^x}>0$ أي $u'(x)>0$ ومنه u متزايدة تماما جدول تغيراتها على المجال $[0\,;1]$

لاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من $[0\,;1]$: $u(x)\geq 0$

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ 1
$u'(x)$	$+$
$u(x)$	$0 \nearrow \frac{1}{e}$

دراسة تغيرات v : الدالة v مستمرة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وخصوصا على $[0\,;1]$ و $v'(x)=-1+x-e^{-x}=u(x)$

أي $v'(x)\geq 0$ ومنه v متزايدة تماما جدول تغيراتها على المجال $[0\,;1]$

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ 1
$v'(x)$	$+$
$v(x)$	$0 \nearrow \frac{e-2}{2e}$

لاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من $[0\,;1]$: $v(x)\geq 0$

2) لدينا مما سبق $u(x)\geq 0$ و $v(x)\geq 0$ أي $x-1+e^{-x}\geq 0$ و $1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\geq 0$

ومنه $e^{-x} \geq 1-x$ و $e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}$ وبالتالي : $1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}$.........(1)

3) لدينا $0 \leq x \leq 1$ ومنه $0 \leq x^2 \leq 1$ وبالتالي نعوض كل x بـ x^2 في العلاقة (1) فنجد $1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1-x^2+\frac{x^4}{2}$

ونقسم كل الأطراف على العدد الحقيقي الموجب تماما $1+x$ فنجد $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$.........(2)

4) من أجل كل x من $[0;1]$: نوحد المقامات في $x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}$

$x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{x^4+x^3-x^3-x^2+x^2+x-x-1+1}{x+1}=\frac{x^4}{x+1}$.

5) تصبح العلاقة (2) كما يلي : $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x+\frac{1}{2}\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)$ أي

وبالتالي : $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}$

$1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}$ نكامل الأطراف فنجد

فنحصل على : $\int_0^1 (1-x)dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}\right)dx$

$\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_0^1$ وأخيرا $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24}+\frac{1}{2}\ln 2$