تمارين الدوال الأصلية والحساب التكاملي

التمرين الأول

نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=x+1-\left(x^2+1\right)e^x$.

ونسمّي $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ حيث $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=2cm$.

1- تحقّق من أنّ: $H:x\mapsto\left(x-1\right)e^x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$، ثمّ بيّن أنّ: $\int_{-1}^{0}xe^xdx=\frac{2}{e}-1$.

2- باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أنّ: $\int_{-1}^{0}\left(x^2+1\right)e^xdx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

3- احسب مساحة الحيز المحدد بـ $\left(C_f\right)$ والمستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ والمستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=-1$.

التمرين الثاني

نعتبر الدّالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f\left(x\right)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$.

ونسمّي $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي cm.

1- بيّن أنّ: $\int_{1}^{2}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2\right)^2$.

2- بيّن أنّ: $H:x\mapsto 2\ln x-x$ هي دالة أصلية لـ $h:x\mapsto\frac{2}{x}-1$ على المجال $]0;+\infty[$.

3- باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أنّ $\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln xdx=\left(1-\ln 2\right)^2$.

4- احسب مساحة الحيز المحدّد بـ $\left(C_f\right)$ والمستقيمات ذات المعادلات $y=x$، $x=1$ و $x=2$.

التمرين الثالث

نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=2x-2+e^{2x}-4e^x$.

ونسمّي $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي cm.

1- بيّن أنّ: $\int_{0}^{\ln 4}e^{2x}-4e^xdx=-\frac{9}{2}$.

2- احسب مساحة حيز المستوي المحدّد بـ $\left(C_f\right)$ والمستقيمات $y=2x-2$، $x=0$ و $x=\ln 4$.

التمرين الرابع

نعتبر الدّالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f\left(x\right)=3-3x+2\left(x+1\right)\ln x$.

ونسمّي $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ حيث $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=2cm$.

1- باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أنّ: $\int_{1}^{2}\left(x+1\right)\ln xdx=4\ln 2-\frac{7}{4}$.

2- احسب مساحة الحيز المحدّد بـ $\left(C_f\right)$ ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1$ و $x=2$.

التمرين الخامس

نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=\frac{x}{e^x-2x}$.

ونسمّي $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي cm.

1- باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أنّ: $\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$.

2- بيّن أنه من أجل كل $x \in [0;+\infty[$: $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$.

2- لتكن $A(E)$ مساحة الحيز المحدّد بـ (C_f) ومحور الفواصل، محور التراتيب والمستقيم ذو المعادلة $x = 1$.

- بيّن أنّ: $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$.

التمرين السادس

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.

وجدول تغيّراتها يعطى كمايلي:

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 1	$\searrow$	$\frac{2-e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

1- أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّين أحدهما 1 والآخر α بحيث: $2.2 < \alpha < 2.3$.

2- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي $2cm$.

1- بيّن أنّ: $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \ln 2$.

2- بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$.

3- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

4- احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = \sqrt{e}$.

التمرين السابع

نعتبر الدّالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$.

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي cm.

1- بيّن أنّ: $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 1$.

2- احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتهما $x = 1$ و $x = e$.

التمرين الثامن

نعتبر الدّالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$.

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي cm.

1- بيّن أنّ: $H : x \mapsto x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto 1 + \ln x$، ثمّ استنتج أنّ: $\int_1^e (1+\ln x)\,dx = e$.

2- باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أنّ: $\int_{1}^{e}(1+\ln x)^2\,dx = 2e-1$.

3- احسب مساحة الحيز المحدّد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

التمرين التاسع

1 نعتبر الدّالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$.
ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي cm.

2- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=e^{\frac{n-2}{2}}$.

أ- بيّن أنّ: (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ج- من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $A_n=4\int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx$.

- أعط تفسيرا هندسيا للعدد A_n.
- بيّن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $A_n=\frac{2n+1}{2}$.
- استنتج أنّ (A_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

التمرين العاشر

1 نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$.
ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي cm.

1- تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)+f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}$.

2- استنتج الدّالة الأصلية F لـ f والتي تأخذ القيمة $-2\ln 2$ من أجل $x=0$.

3- ليكن التكامل التالي: $A=\int_{0}^{1}f(x)\,dx$.

أ- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[0;1]$ فإنّ: $A>0$.

ب- احسب العدد A.

التمرين الحادي عشر

1 نعتبر الدّالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$.
ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي cm.

1- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2- احسب $f(2)$ و $f(6)$، ثمّ مثّل بيانيا (C_f).

3- n عدد طبيعي غير معدوم. جد مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=n$، $x=n+1$ و $y=0$.

أ- نضع من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم: $s_n=\sum_{i=1}^{i=n}u_i$.

- احسب s_1، s_2 و s_3.

ب- برهن بالتراجع أنّه من كل n عدد طبيعي غير معدوم: $s_n=(n+2)\ln(n+1)$.

التمرين الثاني عشر

1 نعتبر الدّالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$ و $g(x)=-\ln(e^x+1)$
ونسمّي (C_f) و (C_g) تمثيلهما البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ وحدة الطول هي $2cm$.

1- بيّن أنّ الدّالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x\ln(e^x)$ هي دالة أصلية للدّالة $x\mapsto f(x)-g(x)$ على $]0;+\infty[$.

2- بيّن أنّه من أجل كل x موجب فإنّ: $f(x)-g(x)>0$.

3- β عدد حقيقي موجب تماما. احسب بدلالة β المساحة $A(\beta)$ للحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\beta$.
4- عيّن β حتى يكون: $A(\beta)=4\ln(e+1)^{\beta}$.

التمرين الثالث عشر

نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة بـ: $I_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx$.

1- بيّن أنّ: $I_0=\ln 2$.
2- احسب: I_0-I_1.
3- استنتج قيمة: I_1.
4- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $I_n-I_{n+1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
5- ليكن n عدد طبيعي غير معدوم. نقبل أنّه من أجل كل $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$: $0\le\frac{x^n}{1-x}\le\frac{1}{2^{n-1}}$.
أ- بيّن أنّه من كل n عدد طبيعي غير معدوم: $0\le I_n\le\frac{1}{2^n}$، ثمّ استنتج نهاية المتتالية (I_n).
6- نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $s_n=\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$.
أ- بيّن أنّه من كل n عدد طبيعي غير معدوم: $s_n=I_0-I_n$، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty}s_n$.

التمرين الرابع عشر

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-\ln x$.
1- احسب نهايتي الدّالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.
2- ادرس اتجاه تغير الدّالة g، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
3- استنتج أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\ge 1$.
4- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=g(u_n)$.
أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n عدد طبيعي فإنّ: $u_n>1$.
ب- بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنّها متقاربة واحسب نهايتها.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}$. ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.
1- أ- احسب: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$، ثم فسّر النتيجة الثانية بيانيا.
ب- احسب: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$، ثمّ فسر النتيجة هندسيا.
ج- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.
2- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x^2)}{x^2}$.
ب- استنتج إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
ج- بيّن أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.
3- أ- بيّن أنّه يوجد مماس (T) وحيد لـ (C_f) يوازي المستقيم (Δ)، ثمّ اكتب معادلة له.
ب- أثبت أنّه يوجد مماس (T') وحيد لـ (C_f) يمر من المبدأ، معادلته: $y=(1+e)x$.
4- أ- بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $0.3<x_0<0.4$.
ب- مثل بيانيا كل من (T)، (T') و (C_f).
ج- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

(III) نعتبر الدّالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=\frac{x^2+2+\ln(x^2)}{x}$. ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.
1- بيّن أنّ الدّالة h فردية.
2- اشرح كيف يتم تمثيل (C_h) انطلاقا من (C_f)، ثمّ مثّله.

(IV) **1**- جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

2- من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x)\, dx$.

أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n > 0$.

ب- أعط تفسيرا هندسيا للعدد v_0، ثمّ احسب v_n بدلالة n.

ج- احسب بدلالة n المجموع s_n حيث: $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

(V) λ عدد حقيقي موجب تماما. نعتبر الدّالة f_λ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f_\lambda(x) = x + \frac{\lambda}{x}(1 + \ln x)$. (C_λ) تمثيلها البياني.

1- بيّن أنّ كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

2- نعتبر النقط $A\left(\lambda; \frac{2\ln\lambda}{\lambda}\right)$، $B\left(1; -\frac{2}{\lambda}\right)$ و $C(1;\lambda)$، ونعتبر النقطة G_λ مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$.

أ- عيّن بدلالة λ إحداثيي النقطة G_λ.

ب- عيّن المحل الهندسي للنقط G_λ لمّا λ يمسح المجال $]0;+\infty[$.

حل تمارين الدوال الأصلية والحساب التكاملي

حل التمرين الأول

1 التحقّق من أنّ: $H : x \mapsto (x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

H دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$\begin{aligned} H'(x) &= 1(\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)x - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه H دالة أصلية لـ h على $\mathbb{R}$.

تبيين أنّ: $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} xe^x dx &= [(x-1)e^x]_{-1}^{0} \\ &= (0-1)e^0 - (-1-1)e^{-1} \\ &= -1 + 2e^{-1} \\ &= \frac{2}{e} - 1 \end{aligned}$$

2 باستعمال التكامل بالتجزئة، تبيين أنّ: $\int_{-1}^{0} (x^2+1)e^x dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$

نضع:

$$\begin{cases} u(x) = x^2 + 1 \\ v'(x) = e^x \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} (x^2+1)e^x dx &= \left[(x^2+1)e^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2xe^x dx \\ &= 1 - 2e^{-1} - 2\int_{-1}^{0} xe^x dx \\ &= 1 - \frac{2}{e} - 2\left(\frac{2}{e} - 1\right) \\ &= 3 - \frac{6}{e} \\ &= 3\left(1 - \frac{2}{e}\right) \end{aligned}$$

3 حساب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = x+1$ والمستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=-1$

لدينا: $f(x) - y = -\left(x^2+1\right)e^x < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة: $y = x+1$، على المجال $[-1;0]$ ومنه:

$$\begin{aligned}
S &= \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| \times \left(\int_{-1}^{0} (y - f(x))\,dx\right) \quad cm^2 \\
&= 2 \times 2 \times \int_{-1}^{0} -\left(x^2+1\right)e^x dx \quad cm^2 \\
&= -4 \times \int_{-1}^{0} \left(x^2+1\right)e^x dx \quad cm^2 \\
&= -4 \times 3\left(1 - \frac{2}{e}\right) \quad cm^2 \\
&= -12\left(1 - \frac{2}{e}\right) \quad cm^2
\end{aligned}$$

حل التمرين الثاني

1 تبيين أنّ: $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} \times \ln(x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}(\ln(2))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(\ln 2)^2
\end{aligned}$$

2 تبيين أنّ: $H : x \mapsto 2\ln x - x$ هي دالة أصلية لـ $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0;+\infty[$

H دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$\begin{aligned}
H'(x) &= 2\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \\
&= \frac{2}{x} - 1 \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

ومنه الدّالة H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0;+\infty[$.

3 باستعمال التكامل بالتجزئة، تبيين أنّ $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx = (1 - \ln 2)^2$ نضع:

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = 2\ln(x) - x \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln(x)\,dx &= \left[\ln(x)\left(2\ln(x) - x\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\left(2\ln(x) - x\right)dx = \ln(2)\left(2\ln(2) - 2\right) - \int_1^2 \left(\frac{2\ln(x)}{x} - 1\right)dx \\
&= 2(\ln 2)^2 - 2\ln(2) - 2\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx + \int_1^2 1dx = 2(\ln 2)^2 - 2\ln(2) - 2\left(\frac{1}{2}(\ln 2)^2\right) + [x]_1^2 \\
&= 2(\ln 2)^2 - 2\ln(2) - (\ln 2)^2 + 1 = (\ln 2)^2 - 2\ln(2) + 1 = (\ln(2) - 1)^2 = (1 - \ln(2))^2
\end{aligned}$$

4 حساب مساحة الحيز المحدّد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y=x$، $x=1$ و $x=2$

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x)-y &= \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln(x) \\ &= \left(\frac{x-2}{x}\right)\ln(x) \end{aligned}$$

وبما أنّه من أجل كل x من المجال $[1;2]$ فإنّ: $f(x)-y<0$، وعليه: المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y=x$ على المجال $[1;2]$. إذن:

$$\begin{aligned} S &= \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| \times \left(\int_1^2 (y-f(x))\,dx\right) \ cm^2 \\ &= \int_1^2 -\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln(x)\,dx \ cm^2 \\ &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln(x)\,dx \ cm^2 \\ &= \int_1^2 -\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln(x)\,dx \ cm^2 \\ &= (1-\ln(2))^2 \ cm^2 \end{aligned}$$

حل التمرين الثالث

1 تبيين أنّ: $\int_0^{\ln 4} e^{2x}-4e^x dx = -\frac{9}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 4} \left(e^{2x}-4e^x\right)dx &= \int_0^{\ln 4} e^{2x}dx - 4\int_0^{\ln 4} e^x dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\ln 4} 2e^{2x}dx - 4\int_0^{\ln 4} e^x dx \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^{\ln 4} - 4\left[e^x\right]_0^{\ln 4} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2\ln 4}-e^0\right) - 4\left(e^{\ln 4}-e^0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln 4^2}-1\right) - 12 = \frac{15}{2} - 12 = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

2 حساب مساحة حيز المستوي المحدّد بـ (C_f) والمستقيمات $y=2x-2$، $x=0$ و $x=\ln 4$

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x)-y &= e^{2x}-4e^x \\ &= e^x\left(e^x-4\right) \end{aligned}$$

ولدينا لمّا $x\in[0;\ln 4]$: $e^x-4<0$ ومنه: $f(x)<0$ على المجال $[0;\ln 4]$. وعليه (C_f) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y=2x-2$. إذن:

$$\begin{aligned} S &= \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| \times \int_0^{\ln 4} (y-f(x))\,dx \ cm^2 \\ &= 1\times 1\times \int_0^{\ln 4} -\left(e^{2x}-4e^x\right)dx \ cm^2 \\ &= -\int_0^{\ln 4} -\left(e^{2x}-4e^x\right)dx \ cm^2 \\ &= -\left(-\frac{9}{2}\right) \ cm^2 \\ &= \frac{9}{2} \ cm^2 \end{aligned}$$

حل تمارين الدوال الأصلية والحساب التكاملي

حل التمرين الرابع

1 باستعمال التكامل بالتجزئة، تبيين أنّ: $\int_1^2 (x+1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$

نضع:

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x+1)\ln(x)\,dx &= \left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)dx \\
&= \left(\frac{1}{2}(2)^2+2\right)\ln(2) - \left(\frac{1}{2}(1)^2+1\right)\ln(1) - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx - \int_1^2 dx \\
&= 4\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - [x]_1^2 \\
&= 4\ln(2) - \frac{1}{4}\left((2)^2-(1)^2\right) - (2-1) \\
&= 4\ln(2) - \frac{3}{4} - 1 \\
&= 4\ln(2) - \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

2 حساب مساحة الحيز المحدّد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1$ و $x=2$

بعد دراسة الدّالة ورسم المنحنى (C_f) نجد أنّ $f(x) \geq 0$ على المجال $[1;2]$. ومنه:

$$\begin{aligned}
S &= \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| \times \int_1^2 (f(x)-y)\,dx\ cm^2 = 2\times 2\times \int_1^2 (3-3x+2(x+1)\ln(x))\,dx\ cm^2 \\
&= 4\left(\int_1^2 (3-3x)\,dx + 2\int_1^2 (x+1)\ln(x)\,dx\right)\ cm^2 \\
&= 4\left(\left[3x-\frac{3}{2}x^2\right]_1^2 + 2\left(4\ln(2)-\frac{7}{4}\right)\right)\ cm^2 \\
&= 4\left(3(2)-\frac{3}{2}(2)^2 - \left(3(1)-\frac{3}{2}(1)\right) + 8\ln(2)-\frac{7}{2}\right)\ cm^2 \\
&= 4\left(\frac{3}{2}-3+8\ln(2)-\frac{7}{2}\right)\ cm^2 \\
&= 4\left(\frac{3-6}{2}+8\ln(2)-\frac{7}{2}\right)\ cm^2 = 4\left(-\frac{3}{2}+8\ln(2)-\frac{7}{2}\right)\ cm^2 = 4(-5+8\ln(2))\ cm^2
\end{aligned}$$

حل التمرين الخامس

1 باستعمال التكامل بالتجزئة، تبيين أنّ: $\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$

نضع:

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-x}dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx\\ &= -1e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1\\ &= -e^{-1} - e^{-1} + e^{-0}\\ &= 1 - 2e^{-1}\\ &= 1 - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

2 تبيين أنّه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $xe^{-x} \le \dfrac{x}{e^x - 2x} \le \dfrac{1}{e-2}$

لنبيّن أولا بأنّ: $\dfrac{x}{e^x-2x} \le \dfrac{1}{e-2}$.

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{e^x - 2x - x(e^x - 2)}{(e^x-2x)^2}\\ &= \frac{e^x - xe^x}{(e^x-2x)^2}\\ &= \frac{e^x(1-x)}{(e^x-2x)^2}\end{aligned}$$

ومنه:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e-2}$	$\searrow$	0

ومنه من جدول تغيّرات f القيمة $\dfrac{1}{e-2}$ قيمة حدية محلية عظمى لـ f على $\mathbb{R}$ ومنه: $f(x) \le \dfrac{1}{e-2}$ إذن: $\dfrac{1}{e-2} \le \dfrac{x}{e^x-2x}$.

ثانيا لنبيّن أنّ: $\dfrac{x}{e^x-2x} \le xe^{-x}$.

لدينا من أجل كل $x \ge 0$: $e^x \ge e^x - 2x$ يكافئ: $\dfrac{1}{e^x-2x} \le \dfrac{1}{e^x}$ ومنه: $\dfrac{x}{e^x-2x} \le \dfrac{x}{e^x}$.

ومنه من أجل x من المجال $[0; +\infty[$: $\dfrac{1}{e-2} \le \dfrac{x}{e^x-2x} \le xe^{-x}$.

3 • تبيين أنّ: $\dfrac{1}{e-2} \le A(E) \le 1 - \dfrac{2}{e}$

بما أنّ: $f(x) \ge 0$ على المجال $[0;1]$ فإنّ: $A(E) = \int_0^1 f(x)\,dx\ \ cm^2$.

لدينا:

$$xe^{-x} \le \frac{x}{e^x-2x} \le \frac{1}{e-2}$$

يكافئ:

$$xe^{-x} \le f(x) \le \frac{1}{e-2}$$

يكافئ:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{e-2}dx$$

يكافئ:

$$1 - \frac{2}{e} \le A(E) \le \frac{1}{e-2}$$

حل تمارين الدوال الأصلية والحساب التكاملي

حل التمرين السادس

I

1 إثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين أحدهما 1 والآخر α بحيث: $2.2<\alpha<2.3$

- $g(1)=1-(1)^2(1-\ln 1)=1-1=0$ ومنه 1 حل للمعادلة: $g(x)=0$.
- لدينا: $g(2.2)=-0.02$ و $g(2.3)=0.12$.

الدّالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]2.2;2.3[$ و $g(2.2)\times g(2.3)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا في المجال $]2.2;2.3[$.

2 استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

II

1 تبيين أنّ: $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx=\ln 2$

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx\\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}dx\\ &= -\int_1^{\sqrt{e}} \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}dx\\ &= -\left[\ln(1-\ln x)\right]_1^{\sqrt{e}}\\ &= -\left(\ln\left(1-\ln\left(\sqrt{e}\right)\right)-\ln(1-\ln 1)\right)\\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

2 تبيين أنّه من أجل كل x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

$$\begin{aligned}f(x)-x &= \frac{1}{x(1-\ln x)}-x\\ &= \frac{1-x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)}\\ &= \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}\end{aligned}$$

3 دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

نلخص ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ في الجدول التالي:

x	0		1		α		e		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x(1-\ln x)$	‖	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة A	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة B	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	

4 حساب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = \sqrt{e}$

نلاحظ أنّ: $f(x) - x \leq 0$ على المجال $\left[1; \sqrt{2}\right]$ ومنه المساحة s تعطى كمايلي:

$$s = \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| \times \int_1^{\sqrt{e}} (f(x) - x)\, dx\ cm^2 = 4\left(\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\, dx - \int_1^{\sqrt{e}} x dx\right)\ cm^2 = 4\left(\ln(2) - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}\right)\ cm^2$$
$$= 4\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{e}\right)^2 - (1)\right)\right)\ cm^2 = 4\left(\ln(2) - \frac{1}{2}(e-1)\right)\ cm^2 = 4\ln(2) - 2(e-1)\ cm^2$$

حل التمرين السابع

1 تبيين أنّ: $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln x}{x} dx = 1$

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{2\ln x}{x} dx &= 2\int_1^e \frac{1}{x} \times \ln(x)\, dx \\
&= 2\left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e \\
&= \ln(e) - \ln(1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2 حساب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتهما $x = 1$ و $x = e$

بعد دراسة الدالة f نجد أنّ $f(x) > 0$ على المجال $[1; e]$ ومنه:

$$\begin{aligned}
S &= \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| \times \int_1^e (f(x) - y)\, dx\ \ cm^2 \\
&= \int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}\right) dx\ cm^2 \\
&= \int_1^e 3 - \frac{1}{x^2} dx - \int_1^e \frac{2\ln x}{x} dx\ cm^2 \\
&= \left[3x + \frac{1}{x}\right]_1^e - 1\ cm^2 \\
&= 3e + \frac{1}{e} - 3 - 1 - 1\ cm^2 \\
&= 3e + e^{-1} - 4\ cm^2
\end{aligned}$$

حل تمارين الدوال الأصلية والحساب التكاملي

حل التمرين الثامن

1 تبيين أنّ: $H : x \mapsto x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto 1 + \ln x$

الدالة H معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \ln(x) + \frac{1}{x} \times x \\ &= \ln(x) + 1 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

استنتاج أنّ: $\int_1^e (1 + \ln x)\, dx = e$

$$\begin{aligned} \int_1^e (1 + \ln(x))\, dx &= [x\ln(x)]_1^e \\ &= e\ln(e) - 1\ln(1) \\ &= e \end{aligned}$$

2 باستعمال التكامل بالتجزئة تبيين أنّ: $\int_1^2 (1 + \ln x)^2\, dx = 2e - 1$

نضع:

$$\begin{cases} u(x) = (1 + \ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)(1 + \ln x) \\ v(x) = x \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx &= \left[x(1 + \ln x)^2\right]_1^e - 2\int_1^e (1 + \ln x)\, dx \\ &= \left(e(1 + \ln e)^2 - 1(1 + \ln 1)\right) - 2(e) \\ &= 4e - 1 - 2e \\ &= 2e - 1 \end{aligned}$$

3 حساب مساحة الحيز المحدّد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$

لدينا: $f(x) > 0$ على المجال $[1; e]$ ومنه:

$$\begin{aligned} S &= \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| \times \int_1^e (f(x) - y)\, dx \ cm^2 \\ &= \int_1^e \left((1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx\ cm^2 \\ &= \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx\ cm^2 \\ &= 2e - 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e\ cm^2 \\ &= 2e - 1 - \frac{1}{e} + 1\ cm^2 \\ &= 2e + e^{-1}\ cm^2 \end{aligned}$$

حل تمارين الدوال الأصلية والحساب التكاملي

حل التمرين التاسع

1 أ- تبيين أنّ: (u_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدّها الأول

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e^{\frac{n+1-2}{2}} \\ &= e^{\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{n-2}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{e} \times u_n \end{aligned}$$

ومنه (u_n) هندسية أساسها $q = \sqrt{e}$ وحدّها الأول هو: $u_0 = e^{-1}$.

ب- تبيين أنّ (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

لدينا: $u_n > 0$ وكذلك:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{e} > 1$$

إذن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ج- • إعطاء تفسير هندسيا للعدد A_n

العدد A_n يمثل هندسيا مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$ والمستقيمين ذو المعادلتين $x = u_n$ و $x = u_{n+1}$.

• تبيين أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $A_n = \dfrac{2n+1}{2}$

$$\begin{aligned} A_n = 4\int_{u_n}^{u_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx &= 4\int_{u_n}^{u_{n+1}} \left(\frac{1+\ln x}{x}\right) dx \\ &= 4\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{x}(1+\ln x)\, dx \\ &= 4\left[\frac{1}{2} \times (1+\ln x)^2\right]_{u_n}^{u_{n+1}} \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\left((1+\ln(u_{n+1}))^2 - (1+\ln(u_n))^2\right)\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\left(\left(1+\ln\left(e^{\frac{n-1}{2}}\right)\right)^2 - \left(1+\ln\left(e^{\frac{n-2}{2}}\right)\right)^2\right)\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{n-1}{2}\right)^2 - \left(1+\frac{n-2}{2}\right)^2\right)\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2+n-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2+n-2}{2}\right)^2\right)\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right)\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{8}\left(n^2+2n+1-n^2\right)\right) \\ &= \frac{2n+1}{2} \end{aligned}$$

• استنتاج أنّ (A_n) حسابية مع تعيين أساسها وحدّها الأول

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= \frac{2(n+1)+1}{2} - \frac{2n+1}{2} \\ &= \frac{2n+2+1-2n-1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه (A_n) حسابية أساسها $r=1$ وحدّها الأول: $A_0=\frac{1}{2}$..

حل التمرين العاشر

1 التحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)+f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}$.

الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}\ln(e^x+1)+\frac{e^x}{e^x+1}\times e^{-x} \\ &= -e^{-x}\ln(e^x+1)+\frac{1}{e^x+1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(x)+f'(x) &= e^{-x}\ln(e^x+1)-e^{-x}\ln(e^x+1)+\frac{1}{e^x+1} \\ &= \frac{1}{e^x+1} \\ &= \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1} \\ &= \frac{1+e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x+1} \\ &= 1-\frac{e^x}{e^x+1} \end{aligned}$$

2 استنتاج الدّالة الأصلية F لـ f والتي تأخذ القيمة $-2\ln 2$ من أجل $x=0$

لدينا: $f(x)+f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}$ وبما أنّ f مستمرة ومشتقتها مستمرة على $\mathbb{R}$ فإنّ:

$$\int f(x)\,dx+\int f'(x)\,dx=\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

يكافئ:

$$F(x)+c+f(x)=x-\ln(e^x+1)$$

يكافئ:

$$F(x)=x-\ln(e^x+1)-f(x)-c$$

يكافئ:

$$F(x)=x-\ln(e^x+1)-e^{-x}\ln(e^x+1)-c$$

يكافئ:

$$F(x)=x-(1+e^{-x})\ln(e^x+1)-c$$

الدّالة التي تأخذ القيمة $-2\ln 2$ من أجل $x=0$ تعني: $F(0)=-2\ln 2$ ومنه: $-(1+e^{-0})\ln(e^0+1)-c=-2\ln 2$ إذن: $c=0$، وعليه الدّالة الأصلية F لـ f والتي تأخذ القيمة $-2\ln 2$ من أجل $x=0$ هي:

$$F(x)=x-(1+e^{-x})\ln(e^x+1)$$

3 أ- تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $[0;1]$ فإنّ: $A>0$

بما أنّ $f(x)>0$ فإنّ تكامل دالة موجبة تماما على مجال موجب هو عدد موجب تماما.

ب- حساب العدد A، ثمّ تحقّق حسابيا من نتيجة السؤال السابق

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \left[x-(1+e^{-x})\ln(e^x+1)\right]_0^1 \\ &= 1-(1+e^{-1})\ln(e^1+1)+2\ln 2 \\ &= 2\ln(2)+1-(1+e^{-1})\ln(e^1+1) \end{aligned}$$

حل تمارين الدوال الأصلية والحساب التكاملي

حل التمرين الحادي عشر

1 دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f

الدّالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x^2} \end{aligned}$$

وإشارة $f'(x)$ تكون كالتالي:

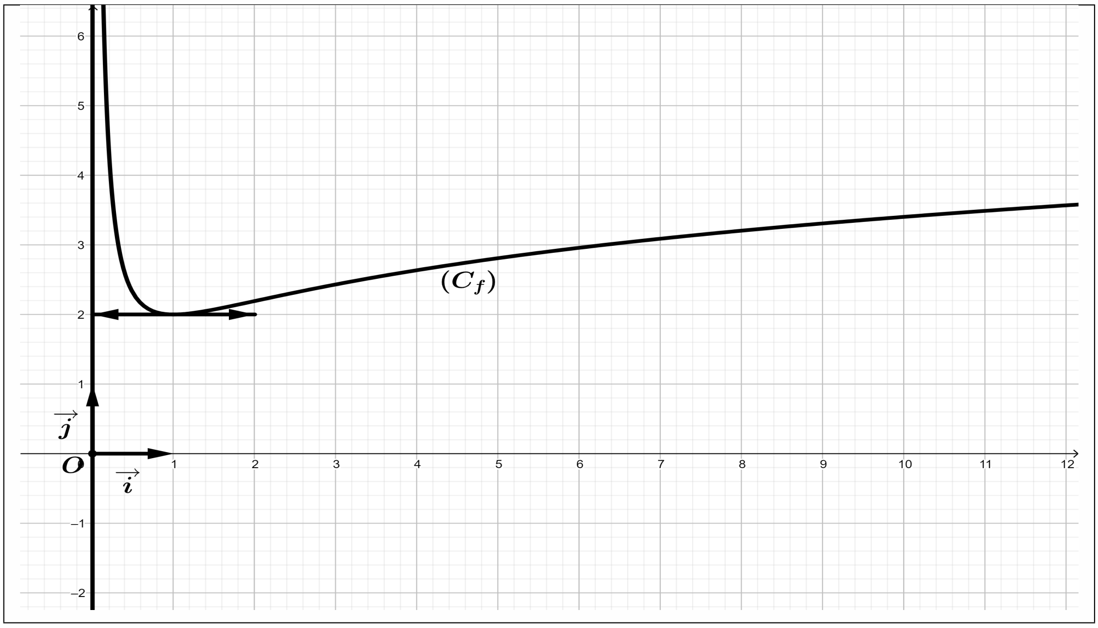
x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

- لمّا $x \in]0;1]$ الدّالة f متناقصة.
- لمّا $x \in [1;+\infty[$ الدّالة f متزايدة.

2 حساب $f(2)$ و $f(6)$

$$\bullet f(2) = 1+\frac{1}{2}+\ln(2) = \frac{3}{2}+\ln(2)$$
$$\bullet f(6) = 1+\frac{1}{6}+\ln(6) = \frac{7}{6}+\ln(6)$$

تمثيل بيانيا (C_f)



3 إيجاد مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = n$، $x = n+1$ و $y = 0$

من التمثيل البياني لمنحنى الدّالة f نلاحظ أنّ: $f(x) > 0$ ومنه:

$$\begin{aligned} u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx &= \int_n^{n+1} \left(1 + \frac{1}{x} + \ln(x)\right) dx \\ &= [x + \ln(x) + x\ln(x) - x]_n^{n+1} \\ &= [(x+1)\ln(x)]_n^{n+1} \\ &= (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln(n) \end{aligned}$$

4 ● حساب s_1، s_2 و s_3

$$\bullet s_1 = \sum_{i=1}^{i=1} u_i = u_1 = 3\ln(2)$$
$$\bullet s_2 = \sum_{i=1}^{i=2} u_i = u_1 + u_2 = 3\ln(2) + 4\ln(3) - 3\ln(2) = 4\ln(3)$$
$$\bullet s_3 = \sum_{i=1}^{i=3} u_i = u_1 + u_2 + u_3 = 5\ln(4)$$

ب- البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم: $s_n = (n+2)\ln(n+1)$

● من أجل $n = 1$ لدينا من جهة: $s_1 = 3\ln(2)$ ومن جهة أخرى: $s_1 = 3\ln(2)$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 1$.

● نفرض أنّ: $s_n = (n+2)\ln(n+1)$ ونبرهن أنّ $s_n = (n+3)\ln(n+2)$، إذن:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{i=1}^{i=n+1} u_i \\ &= u_{n+1} + \sum_{i=1}^{i=n} u_i \\ &= (n+3)\ln(n+2) + s_n \\ &= (n+3)\ln(n+2) - (n+2)\ln(n+1) + (n+2)\ln(n+1) \\ &= (n+3)\ln(n+2) \end{aligned}$$

وعليه من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم فإنّ: $s_n = (n+2)\ln(n+1)$.

حل التمرين الثاني عشر

1 تبيين أنّ الدّالة h المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $h(x) = x\ln(e^x)$ هي دالة أصلية للدّالة $x \mapsto f(x) - g(x)$ على $[0;+\infty[$

الدّالة h معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \ln(e^x+1) + \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \times x \\ &= \frac{xe^x}{e^x+1} + \ln(e^x+1) \\ &= \frac{xe^x}{e^x+1} - (-\ln(e^x+1)) \\ &= f(x) - g(x) \end{aligned}$$

ومنه: الدّالة h المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $h(x) = x\ln(e^x)$ هي دالة أصلية للدّالة $x \mapsto f(x) - g(x)$ على $[0;+\infty[$.

2 تبيين أنّه من أجل كل x موجب فإنّ: $f(x) - g(x) > 0$

لدينا: $f(x) - g(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1} + \ln(e^x+1)$.

نعلم أنّ: $e^x + 1 > 1$ ومنه: $\ln(e^x+1) > 0$ وكذلك من أجل $x > 0$: $\dfrac{xe^x}{e^x+1} > 0$ وعليه: $\dfrac{xe^x}{e^x+1} + \ln(e^x+1) > 0$ إذن: $f(x) - g(x) > 0$.

3 ✍ حساب بدلالة β المساحة $A(\beta)$ للحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\beta$

وجدنا مما سبق أنّ: $f(x)-g(x)>0$ وبالتالي: (C_f) فوق (C_g) ومنه:

$$\begin{aligned}A(\beta) &= 4\int_0^\beta (f(x)-g(x))\,dx\ cm^2\\ &= 4\left[x\ln(e^x+1)\right]_0^\beta\ cm^2\\ &= 4\beta\ln\left(e^\beta+1\right)\ cm^2\end{aligned}$$

4 ✍ تعيين β حتى يكون: $A(\beta)=4\ln(e+1)^\beta$

من أجل $\beta>0$ لدينا: $A(\beta)=4\ln(e+1)^\beta$ يكافئ: $4\beta\ln\left(e^\beta+1\right)=4\ln(e+1)^\beta$

يكافئ: $\beta\ln\left(e^\beta+1\right)=\beta\times\ln(e+1)$

يكافئ: $\ln\left(e^\beta+1\right)=\ln(e+1)$

يكافئ: $e^\beta+1=e+1$

يكافئ: $e^\beta=e$

يكافئ: $\beta=1$

حل التمرين الثالث عشر

1 ✍ تبيين أنّ: $I_0=\ln 2$

$$\begin{aligned}I_0 &= \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx\\ &= -\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-1}{1-x}dx\\ &= -\left[\ln(|1-x|)\right]_0^{\frac{1}{2}}\\ &= -\left[\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}\\ &= -\left(\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\ln(1-0)\right)\\ &= -\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

2 ✍ حساب : I_0-I_1

$$\begin{aligned}I_0-I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{1-x}dx\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-x}{1-x}dx\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}1dx\\ &= [x]_0^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3 استنتاج قيمة I_1:

لدينا: $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$ ومنه: $I_1 = I_0 - \frac{1}{2}$ إذن: $I_1 = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

4 تبيين أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$

$$\begin{aligned}
I_n - I_{n+1} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n - x^{n+1}}{1-x}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n(1-x)}{1-x}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

5 أ- تبيين أنّه من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$

لدينا من أجل كل $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$: $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ومنه:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 0dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}}dx$$

يكافئ:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{2}} 1dx$$

يكافئ:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2}$$

يكافئ:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$$

استنتاج نهاية المتتالية (I_n)

لدينا: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$ ولدينا: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$. إذن حسب النّهايات بالمقارنة فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

أ- تبيين أنّه من كل n عدد طبيعي غير معدوم: $s_n = I_0 - I_n$

هنا في هذا السؤال نستعمل البرهان بالتراجع. كمايلي:

- من أجل $n=1$ لدينا من جهة: $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$ ومن جهة أخرى لدينا: $s_1 = \frac{1}{2}$ وعليه: $s_1 = I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$، اذن الخاصية: " $s_n = I_0 - I_n$" محققة من أجل $n=0$.
- نفرض أنّ: $s_n = I_0 - I_n$ ونبرهن أنّ: $s_{n+1} = I_0 - I_{n+1}$، وعليه:

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \\
&= I_0 - I_n + I_n - I_{n+1} \\
&= I_0 - I_{n+1}
\end{aligned}$$

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنّه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $s_n = I_0 - I_n$.

حساب $\lim_{n\to+\infty} s_n$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} s_n &= \lim_{n\to+\infty} (I_0 - I_n) \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

حل التمرين الرابع عشر

I

1 حساب نهايتي الدّالة g عند أطراف مجموعة تعريفها

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x - \ln x) = +\infty \ \ / \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty \ \ / \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

2 ادرس اتجاه تغير الدّالة g

الدّالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

إشارة $g'(x)$ تكون كمايلي:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	

- لمّا $x \in]0;1]$ الدّالة g متناقصة.
- لمّا $x \in [1;+\infty[$ الدّالة g متزايدة.

✍ تشكيل جدول تغيرات الدّالة g

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3 ✍ استنتاج أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x) \geq 1$

من جدول التغيّرات نلاحظ أنّ الدالة تقبل قيمة حدية محلية صغرى هي 1 وبالتالي: من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x) \geq 1$.

4 ✍ أ- البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل n عدد طبيعي فإنّ: $u_n > 1$

- من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = e > 1$ ومنه الخاصية " $u_n > 1$" محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أنّ $u_n > 1$ ونبرهن أنّ: $u_{n+1} > 1$.

لدينا من الفرض $u_n > 1$ وبما أنّ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإنّ:

$$g(u_n) > g(1)$$

يكافئ:

$$u_{n+1} > 1$$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنّه من أجل كل n عدد طبيعي فإنّ: $u_n > 1$.

✍ ب- تبيين أنّ المتتالية (u_n) متناقصة لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= g(u_n) - u_n \\ &= u_n - \ln(u_n) - u_n \\ &= -\ln(u_n) \end{aligned}$$

وبما أنّ $u_n > 1$ أي: $\ln(u_n) > 0$ وعليه: $-\ln(u_n) < 0$ ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

✍ استنتاج أنّها متقاربة

بما أنّ (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 $(u_n > 1)$ فإنّها متقاربة.

✍ حساب نهايتها

بما أنّ (u_n) متقاربة فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ حيث: $l \in \mathbb{R}$.

لإيجاد l نحل المعادلة $g(l) = l$ يكافئ: $l - \ln(l) = l$ يكافئ: $\ln(l) = 0$ يكافئ: $l = 1$ ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

II

1 ✍ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty \;/\; \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0;\; \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(x + \frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(x + \frac{2 + 2\ln x}{x}\right) = -\infty \;/\; \lim_{x \overset{>}{\to} 0}(2 + 2\ln x) = -\infty$$

✍ التفسير الهندسي

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب.

✍ ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right) = 0$$

التفسير الهندسي

المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ج- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

لدينا: $f(x) - x = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$.

دراسة إشارة $2 + 2\ln x$.

لدينا: $2 + 2\ln x = 0$ يكافئ: $\ln x = -1$ يكافئ: $x = e^{-1}$ وعليه إشارة الفرق تكون كالتالي:

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	$-$	0	$+$	

- لمّا $x \in \left]0; e^{-1}\right[$ المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ).
- لمّا $x \in \left]e^{-1}; +\infty\right[$ المنحنى (C_f) يقع تحت (Δ).
- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة: $A\left(e^{-1}; e^{-1}\right)$.

2 أ- تبيين أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x^2}$

الدّالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} + 2\left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln x}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2} + 2\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$
$$= \frac{x^2 - 2 + 2 - 2\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2} = \frac{g(x^2)}{x^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدّالة f

مما سبق وجدنا أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g(x) \geq 1$ وبالتالي: $g(x^2) \geq 0$ ومنه $f'(x) > 0$ إذن الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

تشكيل جدول تغيّراتها

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ج- تبيين أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

الدّالة f' معرّف وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ:

$$f''(x) = \frac{2xg'(x^2) \cdot x^2 - 2xg(x^2)}{x^4}$$
$$= \frac{2x^2 g'(x^2) - 2g(x^2)}{x^3}$$
$$= \frac{2x^2\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2}\right) - 2\left(x^2 - \ln(x^2)\right)}{x^3}$$
$$= \frac{2(x^2 - 1) - 2x^2 + 2\ln(x^2)}{x^3}$$
$$= \frac{-2 + 2\ln(x^2)}{x^3}$$

من أجل كل $x > 0$. لدينا: $f''(x) = 0$ يكافئ: $-2 + 2\ln(x^2) = 0$ يكافئ: $x = \sqrt{e}$. إشارة $f''(x)$ تعطى كما في الجدول التالي:

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

بما أنّ $f''(x)$ تنعدم عند $x=\sqrt{e}$ وتغير إشارتها فإنّ النقطة $J\left(\sqrt{e};\dfrac{3+e}{\sqrt{e}}\right)$ نقطة إنعطاف للمنحني (C_f).

3 أ- تبيين أنّه يوجد مماس (T) وحيد لـ (C_f) يوازي المستقيم (Δ)

مماس يوازي المستقيم (Δ) معناه نحل المعادلة ذات المجهول a التالية: $f'(a)=1$.

$f'(a)=1$ يكافئ: $\dfrac{g(a^2)}{a^2}=1$ يكافئ: $g(a^2)=a^2$ يكافئ: $a^2-\ln(a^2)=a^2$ يكافئ: $\ln(a^2)=0$ يكافئ: $a^2=1$ يكافئ: $a=1$ $(a>0)$.

وعليه يوجد يوجد مماس (T) وحيد لـ (C_f) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته هي:

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1)+f(1)\\ &= 1(x-1)+3\\ &= x+2 \end{aligned}$$

ب- إثبات أنّه يوجد مماس (T') وحيد لـ (C_f) يمر من المبدأ، معادلته: $y=(1+e)x$

(C_f) يقبل مماسا يمر من المبدأ معناه نحل المعادلة ذات المجهول a التالية: $-bf'(b)+f(b)=0$.

لدينا: $-bf'(b)+f(b)=0$ يكافئ: $-b\times\dfrac{g(b^2)}{b^2}+b+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2\ln(b)}{b}=0$

يكافئ: $-\dfrac{b^2-\ln(b^2)}{b}+b+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2\ln(b)}{b}=0$

يكافئ: $-\dfrac{b^2-2\ln(|b|)}{b}+b+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2\ln(b)}{b}=0$

يكافئ: $\dfrac{-b^2+2\ln(b)+b^2+2+2\ln(b)}{b}=0$

يكافئ: $\dfrac{4\ln(b)+2}{b}=0$

يكافئ: $1+2\ln(b)=0$

يكافئ: $b=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

وعليه (C_f) يقبل مماسا (T') وحيدا في النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ معادلته هي:

$$\begin{aligned} y &= f'(e^{-2})(x-e^{-2})+f(e^{-2})\\ &= \frac{g\left(\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+\frac{1}{\sqrt{e}}+2\sqrt{e}+2\sqrt{e}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= e\cdot g(e^{-1})\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+\frac{1}{\sqrt{e}}+2\sqrt{e}+2\sqrt{e}\left(\frac{-1}{2}\right)\\ &= e\left(e^{-1}-\ln(e^{-1})\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+\frac{1}{\sqrt{e}}+2\sqrt{e}-\sqrt{e}\\ &= (1+e)x-e^{-\frac{1}{2}}(1+e)+e^{-\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{2}}=(1+e)x-e^{-\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{2}}=(1+e)x \end{aligned}$$

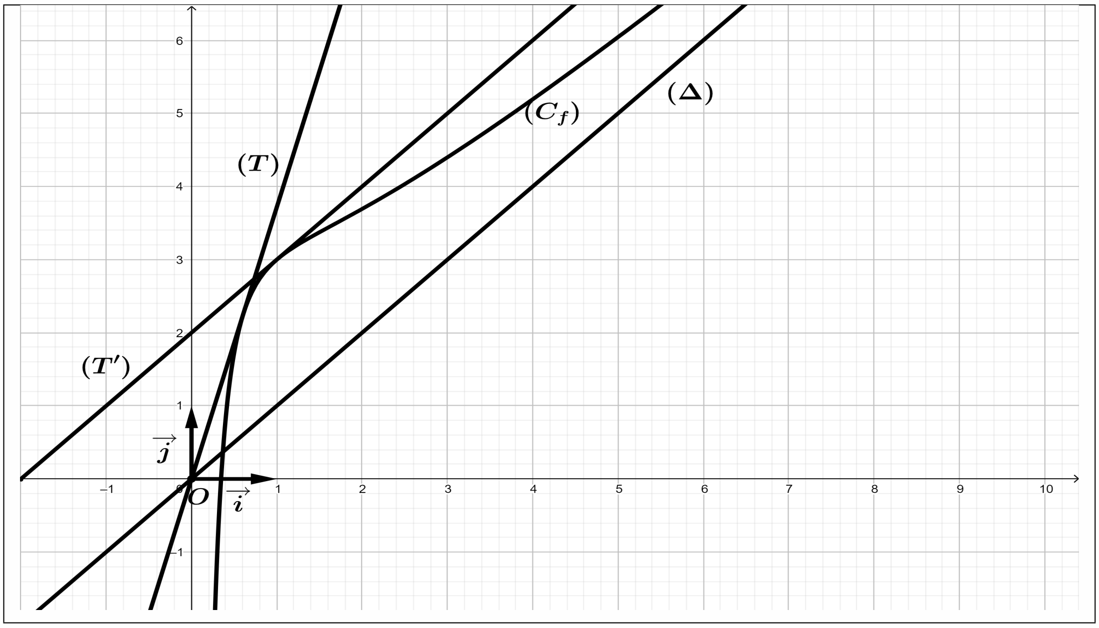
4 أ- تبيين أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $0.3<x_0<0.4$

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل معناه: $f(x)=0$. وعليه نطبق مبرهنة القيمة المتوسطة.

لدينا:

$f(0.3)=-1.05$ و $f(0.4)=0.81$ الدّالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.3;0.4[$ و $f(0.3)\times f(0.4)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا في المجال $]0.3;0.4[$. إذن: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $0.3<x_0<0.4$

ب- تمثيل بيانيا كل من (T)، (T') و (C_f)



ج- المناقشة البيانية

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y = x + m$ وعليه:

- لمّا $m \leq 0$ أي لمّا $m \in]-\infty;0]$ المعادلة تقبل حلا واحدا.
- لمّا $0 < m < 1$ أي لمّا $m \in]0;1[$ المعادلة تقبل حلّين متمايزين.
- لمّا $m = 1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا.
- لمّا $m > 1$ أي لمّا $m \in]1;+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

III

1 تبيين أنّ الدّالة h فردية

- بما أنّ $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة للصفر فإنّ x و $-x$ من $\mathbb{R}^*$.
- لدينا:

$$h(-x) = \frac{(-x)^2 + 2 + \ln\left((-x)^2\right)}{-x} = -\frac{x^2 + 2 + \ln(x^2)}{x} = -h(x)$$

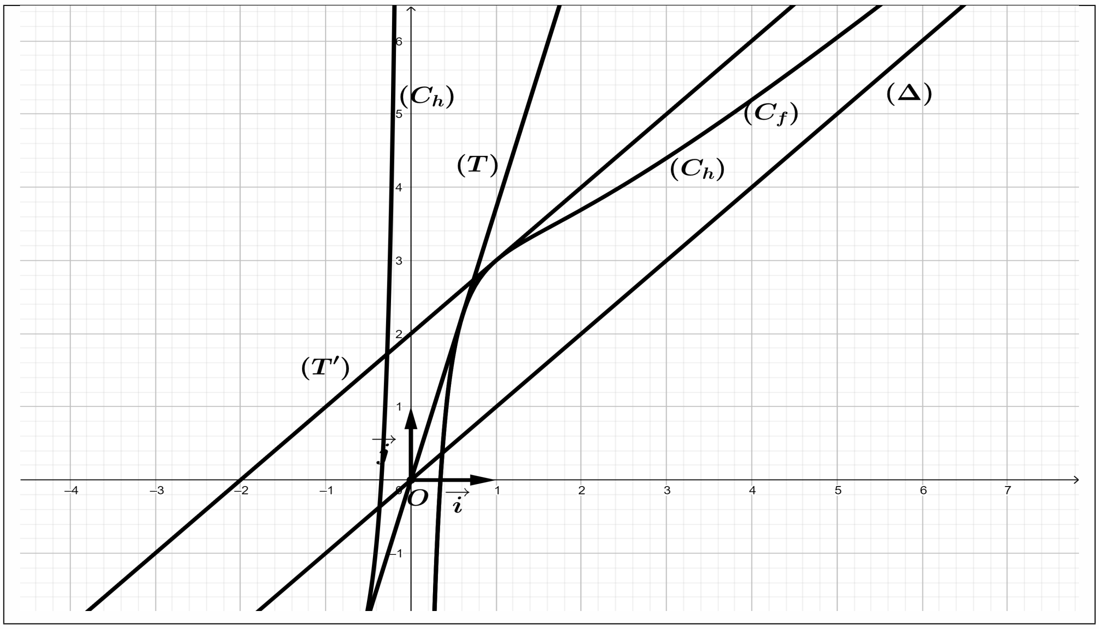
ومنه الدّالة h فردية.

2 شرح كيف يتم تمثيل (C_h) انطلاقا من (C_f) لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^2 + 2 + \ln(x^2)}{x} \\ &= \frac{x^2 + 2 + 2\ln|x|}{x} \\ &= x + \frac{2}{x} + \frac{2\ln|x|}{x} \\ &= \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ -f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لمّا $x \geq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f).
لمّا $x \geq 0$، لدينا الدّالة h فردية وعليه (C_h) متناظر بالنسبة للمبدأ.

ب- تمثيل بيانيا (C_h)



IV

1 إيجاد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}dx &= \int \frac{1}{x} \times \ln(x)\, dx \\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + c \quad / c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

2 أ- تبيين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n > 0$

وجدنا ممّا سبق أنّه لمّا $x \geq 0$ فإنّ: $f(x) - x \geq 0$ وعليه لمّا $x \in [e^n; e^{n+1}]$ فإنّ: $f(x) - x \geq 0$ ونعلم أنّ تكامل دالة موجبة على مجال موجب هو عدد موجب إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n > 0$.

ب- إعطاء تفسيرا هندسيا للعدد v_0

لدينا: $v_0 = \displaystyle\int_{e^0}^{e^1} (f(x) - x)\, dx$، بما أنّ: $f(x) - x \geq 0$ على المجال $[1; e]$ فإنّ: العدد v_0 يمثل مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y = x$، $x = 1$ و $x = e^1$.

حساب v_n بدلالة n

$$\begin{aligned}v_n &= \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x)\, dx \\ &= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln x}{x}\right) dx \\ &= 2\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{x}dx + 2\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x}dx \\ &= 2\left[\ln(x)\right]_{e^n}^{e^{n+1}} + 2\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_{e^n}^{e^{n+1}} \\ &= 2\left(\ln\left(e^{n+1}\right) - \ln\left(e^n\right)\right) + \left(\ln\left(e^{n+1}\right)\right)^2 - \left(\ln\left(e^n\right)\right)^2 \\ &= 2 + (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 3 - n^2 \\ &= 2n + 3\end{aligned}$$

ج- حساب بدلالة n المجموع s_n حيث: $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

نلاحظ أنّ المتتالية (v_n) حسابية وعليه:

$$\begin{aligned} s_n &= v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n \\ &= \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) \\ &= \frac{n+1}{2}(3 + 2n + 3) \\ &= \frac{(n+1)(2n+6)}{2} \\ &= (n+1)(n+3) \end{aligned}$$

V

1 تبيين أنّ كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة مع تعيينها

لتكن $A(x_0; y_0)$ نقطة ثابتة تنتمي للمنحنيين (C_λ) و $(C_{\lambda+1})$ إذن: $f_\lambda(x_0) = y_0$ و $f_{\lambda+1}(x_0) = y_0$

يكافئ: $\begin{cases} y_0 = x_0 + \dfrac{\lambda}{x_0}(1 + \ln(x_0)) \\ y_0 = x_0 + \dfrac{\lambda+1}{x_0}(1 + \ln(x_0)) \end{cases}$

يكافئ: $x_0 + \dfrac{\lambda}{x_0}(1 + \ln(x_0)) = x_0 + \dfrac{\lambda+1}{x_0}(1 + \ln(x_0))$

يكافئ: $\dfrac{\lambda}{x_0} + \dfrac{\lambda}{x_0}\ln(x_0) = \dfrac{\lambda+1}{x_0} + \dfrac{\lambda+1}{x_0} \cdot \ln(x_0)$

يكافئ: $\dfrac{\lambda + \lambda\ln(x_0) - \lambda - 1 - \lambda\ln(x_0) - \ln(x_0)}{x_0} = 0$

يكافئ: $\dfrac{-1 - \ln(x_0)}{x_0} = 0$

يكافئ: $x_0 = e^{-1}$، وأيضا: $y_0 = e^{-1} + \lambda e(1 + \ln(e^{-1})) = e^{-1}$

وعليه: جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة وحيدة هي: $B_\lambda(e^{-1}; e^{-1})$.

2 أ- تعيين بدلالة λ إحداثيي النقطة G_λ

$$\begin{cases} x_{G_\lambda} = \dfrac{1(x_A) - 1(x_B) + 1(x_C)}{1 - 1 + 1} = \lambda - 1 + 1 = \lambda \\ y_{G_\lambda} = \dfrac{1(y_A) - 1(y_B) + 1(y_C)}{1 - 1 + 1} = \dfrac{2\ln(\lambda)}{\lambda} + \dfrac{2}{\lambda} + \lambda = f(\lambda) \end{cases}$$

وعليه إحداثيات G_λ هي: $G_\lambda(\lambda; f(\lambda))$.

ب- تعيين المحل الهندسي للنقط G_λ لمّا λ يمسح المجال $]0; +\infty[$

بما أنّ: $y_{G_\lambda} = f(\lambda)$ فإنّ: $G_\lambda \in (C_f)$ وبالتالي المحل الهندسي للنقط G_λ لمّا λ يمسح المجال $]0; +\infty[$ هو المنحنى (C_f) كاملا.