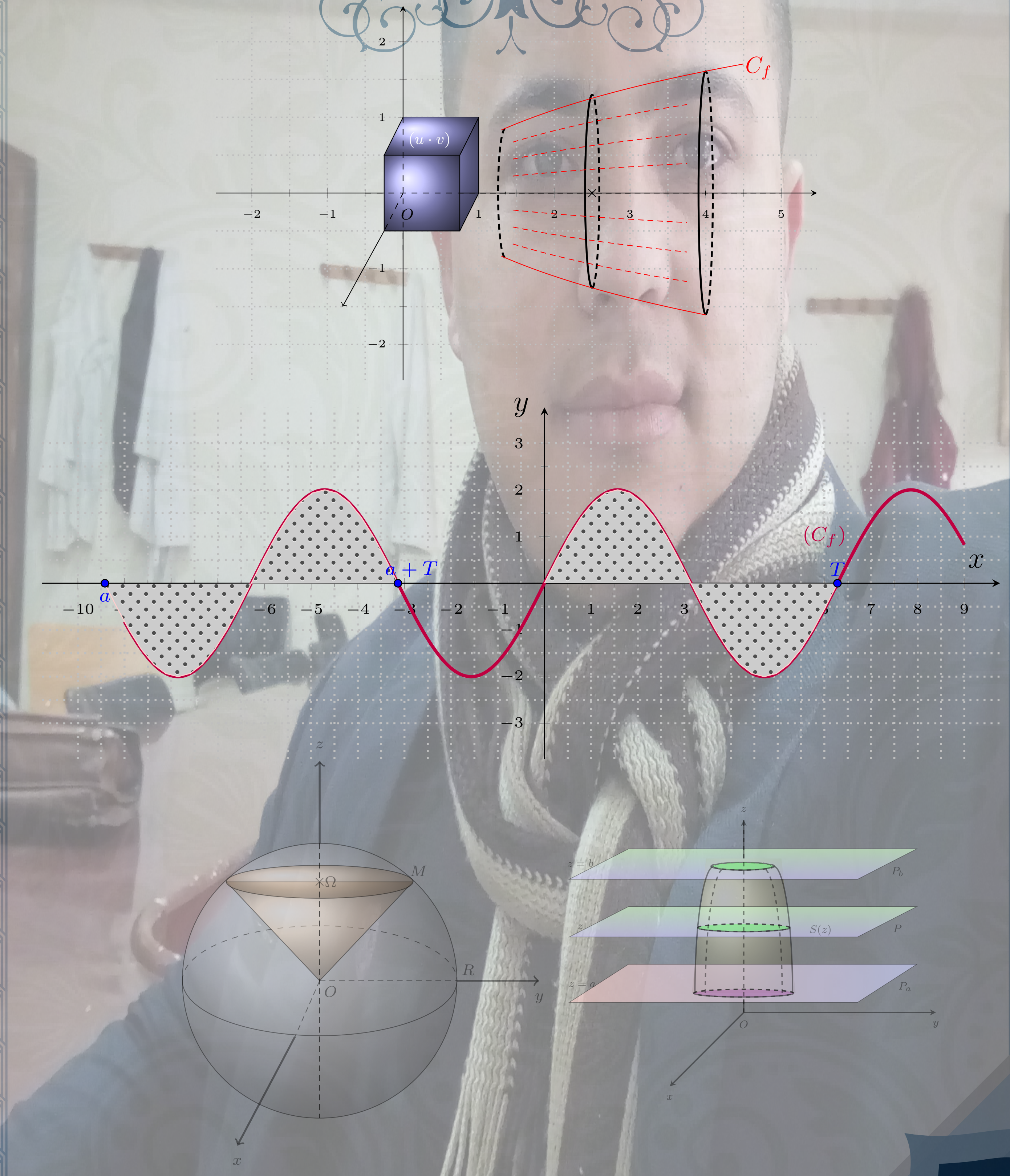
محور الدوال الاصلية و حساب التكاملي (9)



ثانوية عبد الحميد بن باديس-يلل-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأصلية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال

المكتسبات القبلية : العمليات المشتقات
الكفاءات المستهدفة : تعيين دالة أصلية لدالة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**نشاط أول صفحة 166** نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$ و $F(x)=ln(x^2+5)$ 1 تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $F'(x)=f(x)$ 2 اقترح دالة اخرى G بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $G'(x)=f(x)$	
مرحلة بناء المعارف	**تعريف** f و F دالتان معرفتان على المجال I و F قابلة للإشتقاق على I إذا كان من أجل كل x من I : $F'(x)=f(x)$ نقول أن : • f هي الدالة المشتقة للدالة F • F هي الدالة الأصلية للدالة f **مثال** الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=2x-3$ تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$ تعرف بالعبارة : $F(x)=x^2-3x+4$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $F'(x)=2x-3=f(x)$ **مجموعة الدوال الأصلية لدالة** إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل عدد لا نهائي من الدوال الأصلية على I من الشكل $x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت. دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بالثابت فقط **مثال** لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=6x^2+10x-8$. كل الدوال $F_1(x)=2x^3+5x^2-8x+1$ $F_2(x)=2x^3+5x^2-8x+10$, $F_3(x)=2x^3+5x^2-8x+\sqrt{6}$ هي دوال اصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ كل الدوال الاصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=2x^3+5x^2-8x+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت	

تقويم

تطبيق

f و F دالتين معرفتين على $]0;+\infty[$ بـ: $F(x) = x\ln x - x + 1$ و $f(x) = \ln x$

✍ بين أن F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;\infty[$

تطبيق

نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ بـ: $F(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$ و $G(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$

✍ بإستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة

ملاحظة حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية عبد الحميد بن باديس -يلل- غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : 3ريا+3تر+3ع

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأصلية

ميدان التعلم: التحليل

موضوع الحصة : الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معي

المكتسبات القبليــة : تعين الدالة الاصلية

الكفاءات المستهدفة : تعيين دالة اصلية تحقق شرطا معطى

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مــرحـلة الإنطلاق	الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معين	
مرحلة بــنــاء مــعــــارف	**خـاصية** (أظف إلى مطويتك) f دالة مستمرة على مجال I ، x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي . توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على مجال I تحقق الشرط **البــرهــان** بما أن f دالة مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I ولتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية . إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I : $F(x)=G(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت الشرط $F(x_0)=y_0$ يعني أن $G(x_0)+k=y_0$ أي أن $k=y_0-G(x_0)$ و هكذا نكون قد حددنا قيمة لـ k وهي قيمة وحيدة . ومنه توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على I تحقق $F(x_0)=y_0$ ■	
التقويم	**تطبيق** f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2x^2\ln x}{x}+3e^{3x}$ **1** تحقق أن الدالة F المعرفة بـ: $F(x)=(x^2+2)\ln x+e^{3x}$ أصلية للدالة F على $]0;+\infty[$ **2** عين الدالة الأصلية G للدالة f و التي تمثيلها البياني يشمل النقطة $A(1;2)$ حـل تمرين 4 و 6 صفحة 158 ملاحظات حول سير الدرس	

ثانوية عبد الحميد بن باديس -يلل- غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأصلية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : تعيين دوال أصلية لدوال مألوفة

المكتسبات القبلية : مشتق دوال مألوفة
الكفاءات المستهدفة : تعيين دوال الاصلية لدوال المألوفة
المراجع : الكتاب المدرسي،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق مرحلة بناء المعارف	(انظر أدناه)	

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

حصلنا على النتائج الملخصة في الجدول التالي من قراءة العكسية لمشتقات دوال مألوفة

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F ، حيث c عدد حقيقيا ثابا

المجال I	$F(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	$ax+c$	a
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2+c$	x
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$(n\in\mathbb{N}^\star)\ x^n$
$]0;+\infty[$ او $]-\infty;0[$	$-\frac{1}{x}+c$	$\frac{1}{x^2}$
$]0;+\infty[$ او $]-\infty;0[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$(n\geq 2, n\in\mathbb{N})\ \frac{1}{x^n}$
$]-\infty;0[$	$2\sqrt{x}+c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$]0;+\infty[$	$\ln x+c$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$-\cos x+c$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x+c$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	e^x+c	e^x

خواص

أظف إلى مطويتك

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لـ f و g على المجال I
فإن $F+G$ دالة أصلية لـ $f+g$ على المجال I
- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I

تطبيق

عين دالة أصلية على مجال I المعطى لكل دالة :

1. $f(x)=x^3-2x+3$ و $I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=\frac{4}{x^4}-2\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ و $I=]0;+\infty[$
3. $f(x)=\frac{1}{x}+e^x+3$ و $I=]0;+\infty[$

الدوال الاصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I

شروط على الدالة u	الدوال الأصلية للدالة f على I	الدالة f
	$\frac{1}{2}u^2+c$	$u'u$
	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	$(n\in\mathbb{N}^\star)$ $u'u^n$
من أجل كل x من I $u(x)\neq 0$	$-\frac{1}{u}+c$	$\frac{u'}{u^2}$
من أجل كل x من I $u(x)\neq 0$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	$(n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2)$ $\frac{u'}{u^n}$
من أجل كل x من I $u(x)>0$	$2\sqrt{u}+c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
من أجل كل x من D_u	e^u+c	$u'e^u$
من أجل كل x من I $u(x)>0$	$\ln(u)+c$	$\frac{u'}{u}$

تطبيق رقم 1

عين في كل حالة دالة اصلية للدالة f على المجال I

❶ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ و $I=]0;+\infty[$ ، ❷ $f(x)=5(5x+8)^6$ و $I=\mathbb{R}$

❸ $f(x)=\frac{1}{x}(3\ln x+3)^4$ و $I=]0;+\infty[$ ، ❹ $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x+9)^3}$ و $I=\mathbb{R}$

❺ $f(x)=\frac{1}{x\ln x}+\cos(2x+3)$ و $I=]0;+\infty[$ ، ❻ $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ و $I=]0;+\infty[$ ،

❼ $f(x)=\frac{x-1+\ln(x+1)}{x+1}$ و $I=]-1;+\infty[$ ❽ $f(x)=(x+1)e^{x^2+x-3}$ و $I=\mathbb{R}$

تطبيق رقم 2

لتكن G و g دالتين معرفتين على $]0;+\infty[$ بـ: $G(x)=(ax+b)\ln x$ حيث a و b عددان حقيقيان

و $g(x)=\frac{2x-3+2x\ln x}{x}$

1 عين a و b حتى تكون G دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$

2 إستنتج دالة أصلية للدالة g و التي تنعدم من أجل $x=e$

تطبيق رقم 3

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$

1 تحقق أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$

2 إستنتج دالة أًلية للدالة f على $\mathbb{R}$

حل تمرين 24 و25 و27 و28 صفحة 160

حل تمرين 53 و54 و 56 صفحة 162

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

التقويم

ثانوية عبد الحميد بن باديس -يلل- غليزان

الأستاذ : بخدة أمين — الوحدة التعلمية: الدوال الأصلية

المستوى : 3ريا+3تر+3ع — ميدان التعلم : التحليل

المدة : 1 ساعة — موضوع الحصة : حل معادلات التفاضلية

المكتسبات القبليــة : تعيين دوال اصلية لدوال مألوفة

الكفاءات المستهدفة : حل معادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ ، $y'' = f(x)$ ، $y'' = -\omega^2 y$

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق / مرحلة بناء المعارف	**المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$** **مبرهنة** أظف إلى مطويتك إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هي الدوال y حيث : $y = F(x) + c$ حيث c عدد حقيقي ثابت **مثال** حلول المعادلة $y' = 2x^2 + x - 1$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث : $y(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c$ مع c عدد حقيقي ثابت **المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$** **مبرهنة** أظف إلى مطويتك إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و اذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = f(x)$ هي الدوال y حيث : $y = G(x) + c_1x + c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان **مثال** حلول المعادلة $y'' = sin(x)$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث : $y = -sin(x) + c_1x + c_2$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان حقيقيان **المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = -\omega^2 y$** **مبرهنة** أظف إلى مطويتك إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -\omega^2 y$ هي الدوال y حيث : $y = c_1cos(\omega x) + c_2sin(\omega x)$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان	

مثال

حلول ال المعادلة $y'' = -4y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث : $y = c_1cos(2x) + c_2sin(2x)$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان

تطبيق

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية التالية :

1. $y' = 6x^3 - 2x^2 + 6x + 1$
2. $y' = 2\sin(4x)$
3. $y'' = 1 + \cos x$
4. $y'' + 6y = 0$

حل التطبيق

1. حلول المعادلة ال

حل تمرين 31 و32 و33 و34 صفحة 161

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

التقويم

ثانوية عبد الحميد بن باديس -يلل- غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : 3ريا+3تر+3ع

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي

ميدان التعلم : التحليل

موضوع الحصة : مدخل إلى التكامل

المكتسبات القبليـة : حساب الدوال الأصلية

الكفاءات المستهدفة : حساب مساحات بإستعمال التكامل.

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

العرض : بجهاز داتاشو

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		

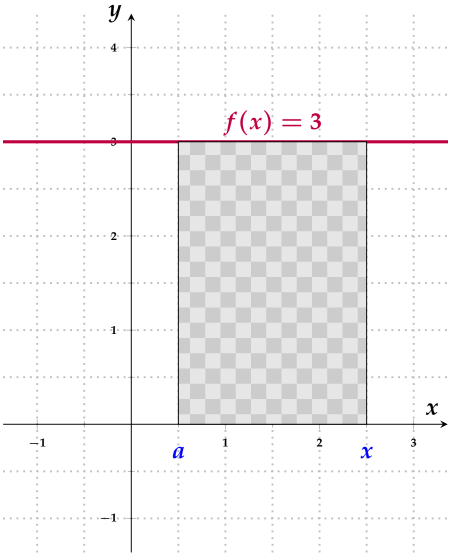
لنأخذ دالة حقيقية ثابتة منحانها البياني كما في الشكل المقابل

نلاحظ أن مساحة المستطيل الملون في الصورة تساوي الطول في العرض ، نرمز إلى مساحة الشكل بـ $S_a(x)$

إذن $S_a(x) = 3 \times (x - a) = 3x - 3a$

ولو إشتقنا عبارة المساحة فسنجد :

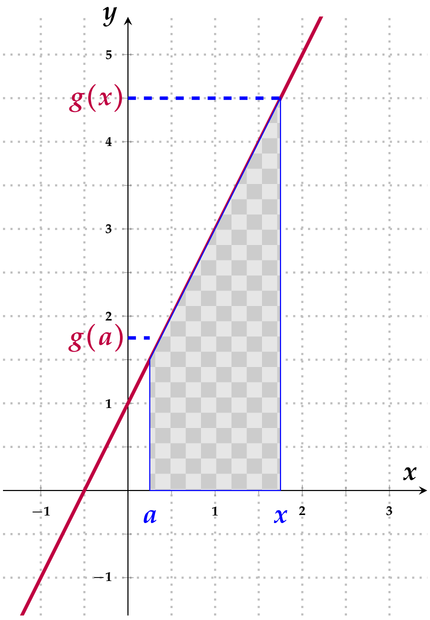
$S'_a(x) = 3 = f(x)$



لو تأملنا دالة أخرى خطية مثلا كما في المنحنى الثاني $g(x) = 2x + 1$

فالمساحة هي مساحة شبه منحرف و تساوي طول الإرتفاع في نصف مجموع طول الضلعين المتوازيين

$$\begin{aligned} S_a(x) &= (a - x) \times \frac{g(x) + g(a)}{2} \\ &= (a - x) \times \frac{(2x + 1 + 2a + 1)}{2} \\ &= (a - x) \times \frac{2x + 2a + 2}{2} \\ &= (x - a)((x + a) + 1) \\ &= x^2 - a^2 + x - a \\ &= x^2 + x - a^2 - a \\ &= x^2 + x - (a^2 + a) \end{aligned}$$



ولو إشتقنا عبارة المساحة فسنجد :

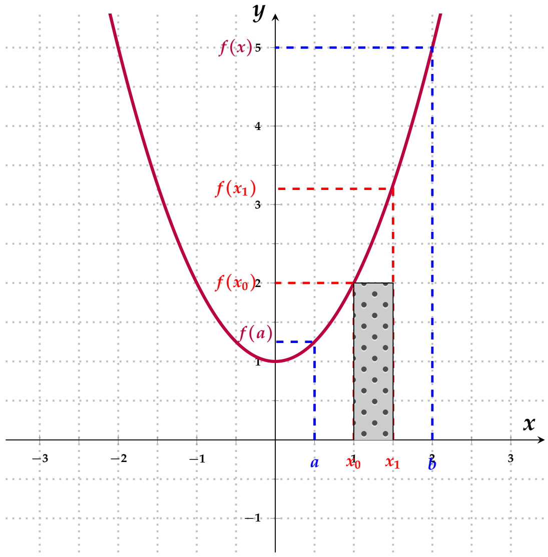
$S'_a(x) = 2x + 1 = g(x)$

نلاحظ أنه يوجد رابط بين المساحة تحت منحنى الدالة و الدالة فكأن مشتقة تساوي الدالة ، لو إعتبرنا دالة F بحيث $F'(x) = f(x)$ فكأن المساحة تكتب العلاقة $S_a(x) = F(x) - F(a)$

وهذا ملاحظ من شكل عبارة المساحة السابقة $S_a(x) = (x^2 + x) - (a^2 + a)$

سنسمي الدالة الدالة F التي مشتقتها f بالدالة الأصلية للدالة f ، في الحقيقة هي مجموعة دوال فنلاحظ الدوال الأصلية للدالة التي عبارتها $f(x) = 3$ هي كل دالة عبارتها من الشكل $F(x) = 3x + c$ حيث C عدد حقيقي ثابت

مرحلة بناء معارف



✍ لنأخذ دالة حقيقية f التي منحناها البياني كما في الصورة
عبارى العدد المشتق عند x_0 تعطى بالعلاقة

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

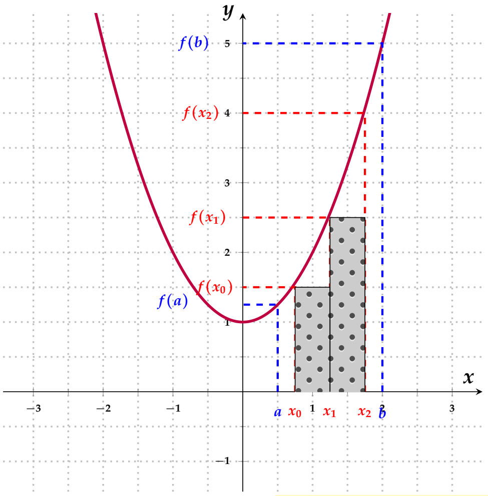
لو إخترنا نقطة x_1 قريبة جدا من x_0يمكننا أن نكتب

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx f'(x_0)$$

ومنه $f(x_1)-f(x_0)\approx(x_1-x_0)f'(x_0)$

فيمكننا تقريب الدالة بمشتقتها و هذا نسميه التقريب التألفي
لكن ماذا يحدث لو قمنا بالعملية العكسية ؟
لننطلق من الإشتقاق ،فلنعتبر الدالة f
كمشتقة لدالة أخرى F أي $F'(x)=f(x)$

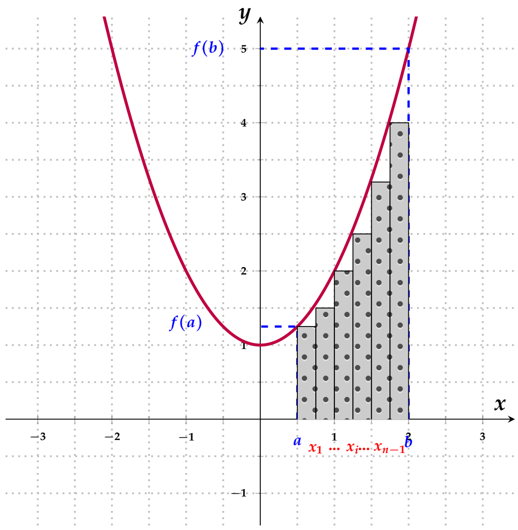
ومنه $F(x_1)-F(x_0)\approx(x_1-x_0)f(x_0)$



✍ لو تأملنا القيمة اليمنى لهذا التقريب نجدها مساحة المستطيل الملون في المنحنى
و الذي هو محصور بين منحنى الدالة و حامل محور الفواصل
✍ لو أخذنا نقطة أخرى x_2 قريبة جدا من x_1 و كررنا العملية فنجد $F(x_2)-F(x_1)=(x_2-x_1)f'(x_1)$
وهي مساحة مستطيل مجاورة كما في الصورة الثانية
لو جمعنا المساحتين نجد مساحة أكبر محصورة بين منحنى الدالة و حامل محور الفواصل و هي توافق الجمع بين العلاقتين السابقتين

$$F(x_2)-F(x_1)+F(x_1)-F(x_0)\approx(x_2-x_1)f'(x_1)+(x_1-x_0)f'(x_0)$$

ومنه $F(x_2)-F(x_0)\approx(x_2-x_1)f'(x_1)+(x_1-x_0)f'(x_0)$



✍ ماذا يحدث لو قسمنا المجال $[a;b]$ على n جزء و كررنا هذه العملية عند كل نقطة من هذا المجال ؟
a ، x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_{n-1} ، b
لو قسمنا المجال $[a;b]$ على n جزء و كررنا هذه العملية عند كل نقطة من هذا المجال فسنجد المساحة الدرجية الملونة و التي تكاد تكون المساحة المحصورة بين المنحنى و حامل محور الفواصل و التي نجد تقريبا لها بجمع جميع التقريبات التألفية كما فعلنا سابقا
سنسمي هذه المساحة بـ $S_{a;b}$

إذن

$$F(b)-F(a)\approx(b-x_{n-1})f'(x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})f'(x_{n-2})+\cdots+(x_1-a)f'(a)\approx S_{a;b}$$

بما أننا قسمنا المجال على n جزء فسنحصل على أجزائها طولها متساوي و نرمز له بـ Δx

$$\begin{aligned}F(b)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\cdots+F(x_1)-F(x_a)\\\approx\Delta xf'(x_{n-1})+\Delta xf'(x_{n-2})+\cdots+\Delta xf'(a)\\\approx S_{a;b}\end{aligned}$$

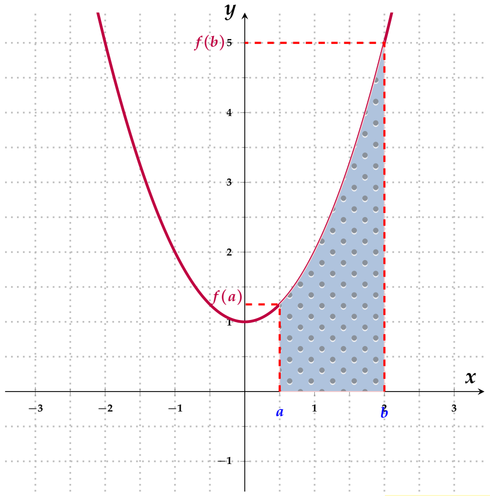
سنستعمل رمز المجموع للتعبير عن هذا المجموع $F(b)-F(a)\approx\sum_{i=0}^{n-1}\Delta xf(x_i)\approx\sum_{i=}^{n-1}f(x_i)\Delta x\approx S_{a;b}$

في الحقيقة لو جعلنا n كبيرا جدا سنقترب إلى المساحة المحصورة بين المنحنى و حامل محور الفواصل بمعنى أخر المسافة بين النقاط أي كل جزء Δx تقترب من الصفر

$$F(b)-F(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{a}^{b} f(x_i)\Delta x = S_{a;b}$$

نسمي هذا المجموع تكامل الدالة f

أول من وضع قواعد هذه الحسابات هو الرياضي ليبنيز **1682** و قدر رمز للمجموع بالرمز $\int$ و هو S كبير رمزا للمجموع بالاتينية $SOMME$ ، بما أن Δ يؤول إلى الصفر فسنرمز له بـ dx



ونعيد كتابة العلاقة السابقة كالتالي : $F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)dx = S_{a;b}$

نلاحظ أن تكامل الدالة f على المجال $[a;b]$ يعبر عن المساحة بين المنحنى و حامل محور الفواصل

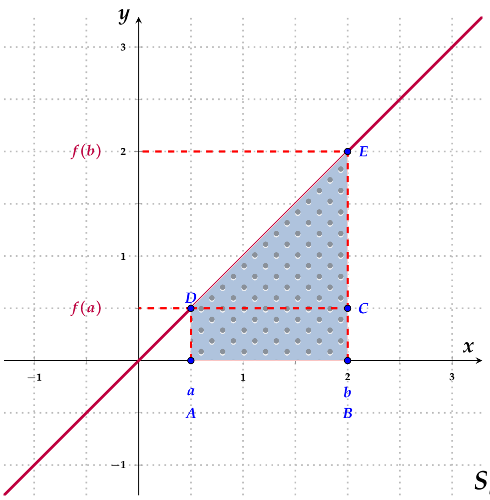
الدالة F تسمى الدالة الأصلية للدالة f أي $F'(x)=f(x)$

إذن تكامل الدالة f على المجال $[a;b]$ يساوي الفارق بين قيمتي الدالة الأصلية F عند a ، b

مثال 1

نأخذ المستقيم المعرف بالدالة $f(x)=x$ لنحاول حساب المساحة المحصورة بين المنحنى و حامل محور الفواصل في المجال $[a;b]$ بطريقتين بالقواعد الهندسية و بالتكامل

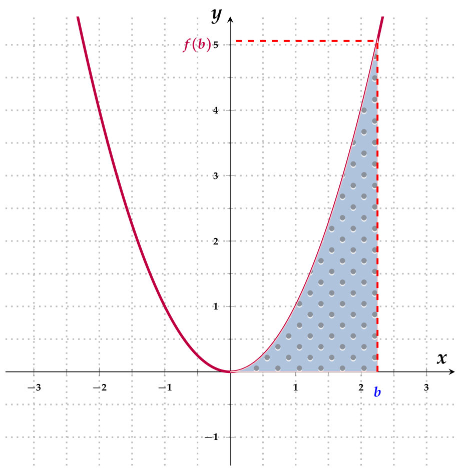
$$\begin{aligned} S_{a,b} &= \text{مساحة } \mathrm{DCE} + \text{مساحة } \mathrm{ABCD} \\ &= \frac{1}{2}\cdot CD\cdot CE + AB\cdot BC \\ &= \frac{1}{2}(b-a)(f(b)-f(a))+(b-a)f(a) \\ &= \frac{1}{2}(b-a)(b-a)+(b-a)a \\ &= \frac{1}{2}(b-a)((b-a)+2a) \\ &= \frac{1}{2}(b-a)(b+a) \end{aligned}$$



بالتكامل :

نختار الدالة الأصلية : $F(x)=\frac{1}{2}x^2$

إذن $S_{a,b}=\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{b} xdx = F(b)-F(a)=\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}(b-a)(b+a)$



مثال 2

$f(x)=x^2$

لنحاول حساب المساحة المحصورة بين المنحنى و حامل محور الفواصل

نختار الدالة الأصلية $F(x)=\frac{1}{3}x^3$

$$S_{0,b}=\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{0}^{b} x^2dx = F(b)-F(0)=\frac{1}{3}b^2$$

ثانوية عبد الحميد بن باديس-يلل-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : 3ريا+3تر+3ع

المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي

ميدان التعلم: التحليل

موضوع الحصة : حساب التكاملي

المكتسبات القبليــة : الدوال الأصلية

الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى

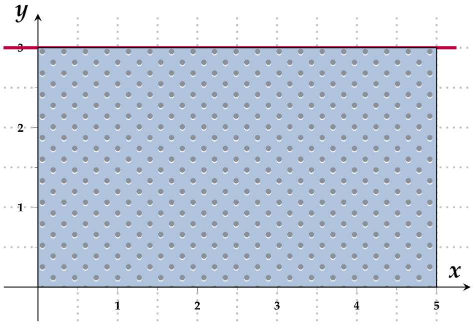
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق مرحلة بناء معارف	(انظر أدناه)	

نشاط أول صفحة 166

الجزء الأول

زود المستوي في كل ما سيأتي بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ حيث وحدة الأطوال هي $1cm$



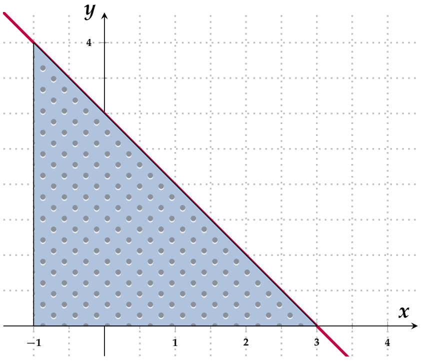
1 نعتبر الدالة f_1المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f_1(x)=3$ و ليكن (C_1) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$

نرمز بِ A_1 إلى مساحة الحيز الملون تحت المنحني (C_1) بين العددين0و5

◁ أحسب بـ cm^2 المساحة A_1

◁عين دالة أصلية F_1 للدالة f_1 على $\mathbb{R}$

◁أحسب $F_1(5)-F_1(0)$



2 نعتبر الدالة f_2 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_2(x)=-x+3$

و ليكن (C_2) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$

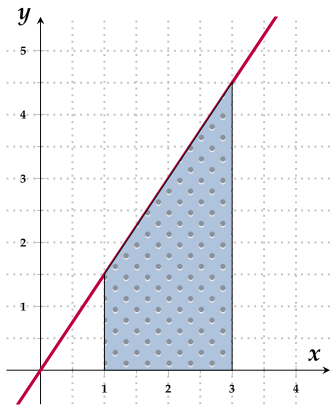
نرمز بِ A_2 إلى مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_2)، محور الفواصل

و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=3$

◁أحسب بـ cm^2 المساحة A_2

•عين دالة أصلية F_2 للدالة f_2 على $\mathbb{R}$

◁أحسب $F_2(3)-F_2(-1)$



3 نعتبر الدالة f_3 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(3(x)=\frac{3}{2}x$.

و ليكن (C_3) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$

نرمز بـ A_3 إلى مساحة الحيز مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث

$1\leq x\leq 3$ و $0\leq y\leq f_3(x)$

◁أحسب بـ cm^2 المساحة A_3

◁ عيّن دالة أصلية F_3 للدالة f_3 على $\mathbb{R}$

◁ أحسب $F_3(1)-F_3(3)$

4 ماذا تلاحظ في حالتين؟ ضع تخمينا

حـل الجزء الأول

1
- ◁ $A_1 = 3 \times 5 = 15cm^2$
- ◁ نختار دالة أصلية المعرفة بـ $F_1(x) = 3x$
- ◁ $F_1(5) - F_2(0) = 15 - 0 = 15$

2
- ◁ $A_2 = (4 \times 4)\frac{1}{2} = 8cm^2$
- ◁ نختار دالة أصلية المعرفة بـ $F_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$
- ◁ $F_2(3) - F_1(-1) = \frac{9}{2} - \frac{-7}{2} = \frac{9+7}{2} = 8$

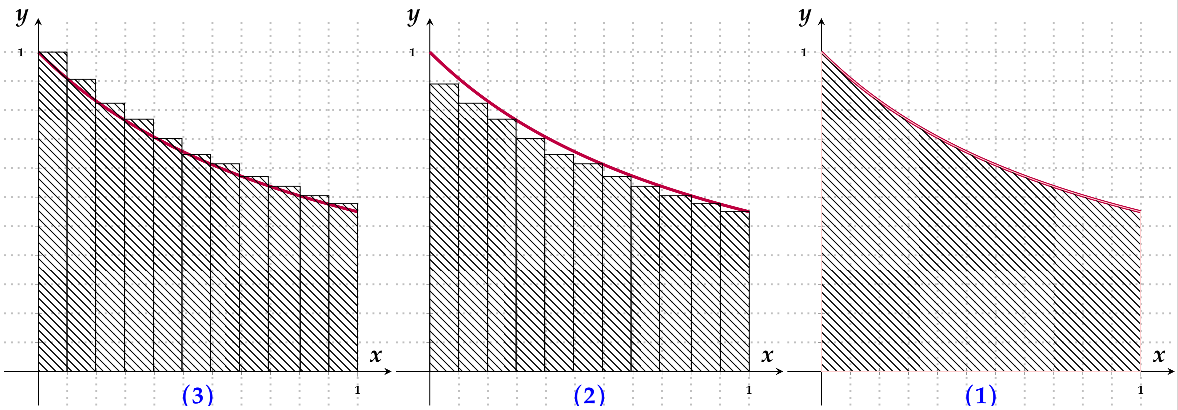
3
- ◁ $A_3 = [(4.5 + 1.5) \times 2]\frac{1}{2} = 6cm^2$
- ◁ نختار دالة أصلية المعرفة بـ $F_3(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2$
- ◁ $F_3(1) - F_1(3) = \frac{3}{4} - \frac{27}{4} = \frac{3-27}{4} = 6$

4 مما سبق نخمن أن: $A = |F(a) - F(b)|$ حيث A مساحة الحيز المحصور بالمنحنى دالة f وحامل محور الفواصل و المستقمين ذي المعادلة $x = a$ و$x = b$ و F دالة أصلية لها

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x+1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$



1 هل يمكن، بإستعمال قاعدة في الهندسة ،حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل (1) .

2 أحسب A مساحة الحيز الملون في الشكل (2) و A مساحة الحيز الملون في الشكل (3).

يمكنك إستعمال الجدول التالي :

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	.	.	.	.	.	.	.
$f(x)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
المساحة	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

3 إستنتج حصرا للمساحة A.

4 تحقق ما إن كانت النتيجة المحصل عليها متلائمة مع تخمينك الذي وضعته في السؤال 4 من الجزء الأول.

حـل الجزء الثاني

1 لايمكن

2

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	0.90	0.83	0.77	0.71	0.67	0.625	0.59	0.55	0.52	0.5
المساحة	0.09	0.083	0.077	0.071	0.067	0.625	0.059	0.055	0.052	0.05

◁ حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل (2)

$$\begin{aligned} S &= 0.1\times f(0.1)+0.1\times f(0.2)+0.1\times f(0.3)+0.1\times f(0.4)+0.1\times f(0.5)\\ &+0.1\times f(0.6)+0.1\times f(0.7)+0.1\times f(0.8)+0.1\times f(0.9)+0.1\times f(1)\\ &\approx 0.09+0.083+0.077+0.071+0.067+0.0625+0.059+0.055+0.052+0.05\\ &\approx 0.60 \end{aligned}$$

◁ حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل (1)

$$\begin{aligned} S &= 0.1\times f(0)+0.1\times f(0.1)+0.1\times f(0.2)+0.1\times f(0.3)+0.1\times f(0.4)+0.1\times f(0.5)\\ &+0.1\times f(0.6)+0.1\times f(0.7)+0.1\times f(0.8)+0.1\times f(0.9)\\ &\approx 0.1+0.09+0.083+0.077+0.071+0.067+0.0625+0.059+0.055+0.052\\ &\approx 0.71 \end{aligned}$$

3 إستنتاج حصرا لـ A

$0.60 \le A \le 0.71$

4 التحقق :

نختار دالة أصلية لـ f المعرفة بـ: $F(x)=\ln(x+1)$

لدينا: $F(1)-F(1)=\ln(2)-0=\ln(2)\approx 0.69$ إذن $0.60\le F(1)-F(0)\le 0.71$

النتيجة متلائمة مع التخمين

نشاط ثانٍ صفحة 167

نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;2]$ بـ: $g(x)=-x+2$.

و ليكن (d) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

لتكن النقطة $A(-1;3)$ ولتكن النقطة A' مسقطها العمودي على حامل محور الفواصل .

نعتبر نقطة M من المنحنى (d) فاصلتها x ونرمز بـ M' إلى مسقطها العمودي على حامل محور الفواصل .

نرمز بـ: $G(x)$ إلى مساحة شبه المنحرف $AA'MM'$

1 أنجز شكلا مناسبا .

2 نفرض أن: $-1\le x\le 2$

◁ أحسب $G(x)$ بدلالة x. ثم تحقق أن $G'(x)=g(x)$

◁ أحسب $G(-1)$. ماذا تستنتج ؟

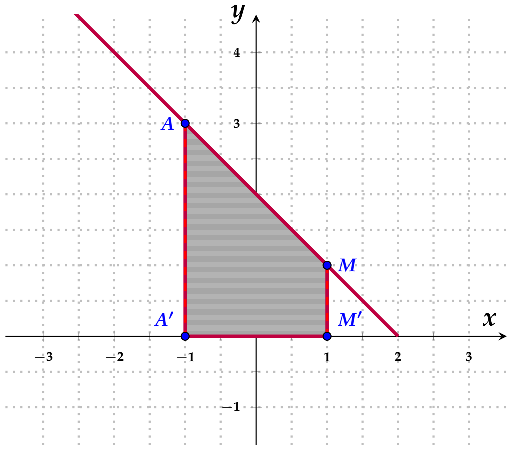
3 نفرض أن: $x\le -1$

◁ أحسب $G(x)$ بدلالة x. ماذا تلاحظ؟

◁ أحسب $G(-1)$. ماذا تستنتج؟

حـل نشاط ثانٍ

1 إنشاء : $-1 \leq x \leq 2$



2 ◁ حساب $G(x)$

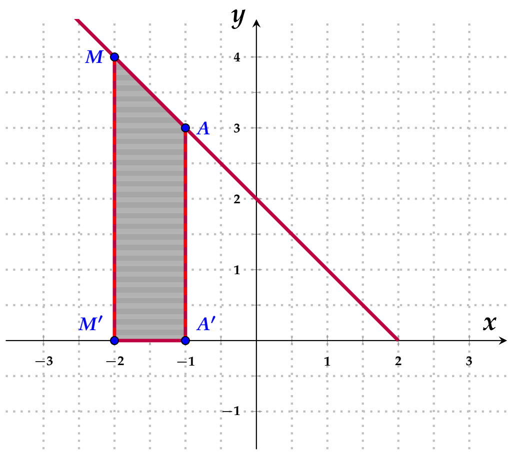
$$G(x) = \frac{(AA' + MM')(A'M')}{2} = \frac{(5-x)(x+1)}{2} = \frac{-x^2+4x+5}{2}$$

لدينا : $G'(x) = \frac{1}{2}(-2x+4) = -x+2 = g(x)$

◁ $G(-1) = \frac{-(-1)^2 + 4(-1) + 5}{2} = 0$

◁ من أجل $x = -1$ مساحة $AA'MM'$ معدومة

3 ◁ $x \leq -1$



◁ حساب $G(x)$

$$G(x) = \frac{(AA' + MM')(A'M')}{2} = \frac{(5-x)(-x-1)}{2} = \frac{x^2-4x-5}{2}$$

نلاحظ أن من أجل $x \leq -1$ فإن : $G'(x) = -g(x)$

لدينا : $G'(x) = \frac{1}{2}(2x-4) = x-2 = -g(x)$

◁ $G(-1) = \frac{(-1)^2 - 4(-1) - 5}{2} = 0$

◁ من أجل $x = -1$ مساحة $AA'MM'$ معدومة

مرحلة بـــــــنـــــــاء معــــــارف

الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحنى

خاصية

أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I ، a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحني f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; A, B)$ و F دالة اصلية لـ f على I

مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\boxed{F(b) - F(a)}$

ملاحظة:

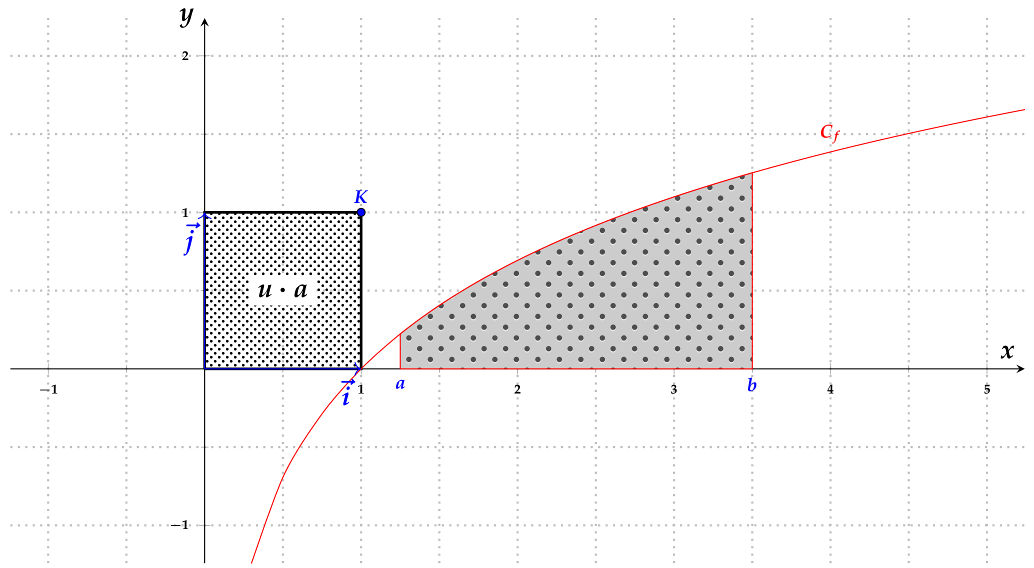
✍ الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و$x = b$

✍ نرمز لوحدة قياس المساحات بـ: $u \cdot a$ وهي مساحة المستطيل $OIKJ$ حيث $K(1;1)$

أي $u \cdot a = OI \times OJ$

◁ إذا كان : $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = 1$ فإن: $1u \cdot a = 1cm^2$

◁ إذا كان : $\|\overrightarrow{i}\| = 2$ و $\|\overrightarrow{j}\| = 3$ فإن: وحدة المساحة هي : $6cm^2$



مثال ❶

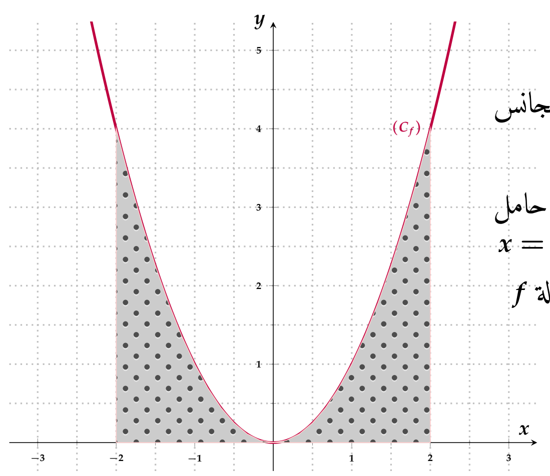
✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2$
(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (الوحدة $1cm$)

✍ لنعين بـ $A\ cm^2$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمن اللذين معادلتيهما $x = -2$ و $x = 2$

✍ نختار دالة F معرفة بـ: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ دالة أصلية للدالة f

إذن : $F(2) - F(-2) = \frac{8}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{16}{3}$

أي $A = \frac{16}{3} cm^2$



مرحلة بناء المعارف

تعريف — أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددان حقيقيان من I .

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على I ، التكامل من a الى b ل f

و نرمز اليه بالرمز $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ نقرأ: التكامل من a الى b ل $f(x)$ تفاضل x

ملاحظة:

◁ عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F على مجال I يشمل العددين a و b

ثم نكتب : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

◁ يمكن استبدال المتغير x باحد الاحرف t ، q ، .. .فيكون لدينا : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$

مثال❷

◁ $\int_{-1}^{1}(2x+3)dx = [x^2+3x]_{-1}^{1} = 4-(-2) = 6$

◁ $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x-1)dx = [-\sin x - x]_{-\pi}^{\pi} = \pi-(-\pi) = 2\pi$

◁ $\int_1^4 \frac{2}{2x+3}dx = [\ln(2x+3)]_1^4 = \ln(11)-\ln(4) = \ln\left(\frac{11}{4}\right)$

التقويم

حل تمرين 10 صفحة 184

◁ $\int_1^{10}\frac{dt}{\sqrt{t}}dt = \left[2\sqrt{t}\right]_1^{10} = 2\sqrt{10}-2$

◁ $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx = [e^x]_{\ln 2}^{\ln 3} = 3-2 = 1$

◁ $\int_1^2 2x(x^2-1)dx = [(x^2-1)^2]_1^2 = 3-0 = 3$

◁ $\int_3^4 \frac{5x}{(x^2-2)^3}dx = \left[-\frac{5}{4}\frac{1}{(x^2-2)^2}\right]_3^4 = -\frac{5}{784}+\frac{5}{196} = -\frac{5}{784}+\frac{20}{784} = \frac{15}{784}$

حل تمرين 11 و14 صفحة 183 و 184

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية عبد الحميد بن باديس -يلل- غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة
الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حساب التكاملي و تطبيق خواصه

المكتسبات القبلية : الدوال الأصلية ، تكامل دالة
الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق / مرحلة بناء معارف	• خواص التكامل علاقة شال خاصية ❶ — أطف إلى مطويتك f دالة مستمرة على مجال I من أجل كل الاعداد الحقيقية a، b، cمن Iلدينا : $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$ البرهان إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)]$$ $$= -F(a) + F(c) = F(c) - F(a)$$ $$= \int_a^c f(x)\,dx$$ ■ نتائج ◁ $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$ ◁ إذا كان $c = a$ نحصل على $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ مثال ❶ لنحسب التكامل التالي : $\int_0^2 \lvert x^2 - 1\rvert dx$ ◁ من أجل كل x من $[0;1]$: $x^2 - 1 \leq 0$ إذن $\lvert x^2 - 1\rvert = -x^2 + 1$ ◁ من أجل كل x من $[1;2]$: $x^2 - 1 \geq 0$ إذن $\lvert x^2 - 1\rvert = x^2 - 1$ بإستعمال علاقة شال لدينا : $\int_0^2 \lvert x^2 - 1\rvert dx = \int_0^1 (-x^2 - 1)dx + \int_1^2 (x^2 + 1)dx$ ومنه $\int_0^2 \lvert x^2 - 1\rvert dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^2 = -\frac{4}{3} + \frac{14}{3} - \frac{4}{3} = 2$	

الخطية

خاصية❷ — أظف إلى مطويتك

f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي من أجل كل عددين حقيقيين a وb من I

لدينا ❶ $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ و ❷ $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

البرهان

❶ نعلم أنه إذا كانت G و f دالتين أصليتين على الترتيب لـ g و f على I فإن : $G+F$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I
ومنه :

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = [F(x)+G(x)]_a^b = [F(b)+G(b)]-[F(a)+G(a)]$$

$$= [F(b)-F(a)]-[G(b)-G(a)] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

❷ نعلم أنه إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I فإن kF دالة أصلية لـ kf حيث k عدد حقيقي

$$\int_a^b kf(x)dx = [kF(x)]_a^b = [kF(a)-kF(b)] = k[F(b)-F(a)] = k\int_a^b f(x)dx$$

■

مــثال ❷

◁ $\int_0^\pi (x+\cos x)dx = \int_0^\pi xdx + \int_0^\pi \cos xdx =$

◁ $\int_1^e \frac{3}{x}dx = 3\int_1^e \frac{1}{x}dx$

المقارنة

خاصية❸ — أظف إلى مطويتك

f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$

1) اذا كان من اجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x)\geqslant 0$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

2) اذا كان من اجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x)\leqslant g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

البرهان

❶ إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن من أجل كل x من I فإن $F'(x)=f(x)$
و بماأن $f(x)\geq 0$ على $[a;b]$ فإن F متزايدة على $[a;b]$ و بالتالي : $F(a)\leq F(b)$ أي $F(b)-F(a)\geq 0$

ومنه $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

❷ f و g دالتين معرفتين على I . إذا كان $f(x)\leq g(x)$ فإن $g(x)-f(x)\geq 0$

ومنه $\int_a^b (g(x)-f(x))dx \geq 0$ ومنه $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$

ومنه $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

■

مثال ③

◁ نعتبر التكامل : $I=\int_{0}^{1}\frac{2}{1+x}dx$

◁ لنبيّن أنه من أجل كل x من $[0;1]$: $\frac{x^2}{2}\le\frac{x^2}{1+x}\le x^2$

لدينا: $1\le 1+x\le 2$ ومنه $\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+x}\le 1$ و بالضرب في x^2 نجد : $\frac{x^2}{2}\le\frac{x^2}{1+x}\le x^2$

◁ ينتج لنا حصرا لـ I : $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{2}dx\le I\le\int_{0}^{1}x^2dx$ إذن : $\frac{1}{6}\le I\le\frac{1}{3}$

نتائج

f دالة تقبل الإشتقاق على مجال $[-a;a]$

◁ إذا كانت f دالة زوجية فإن:

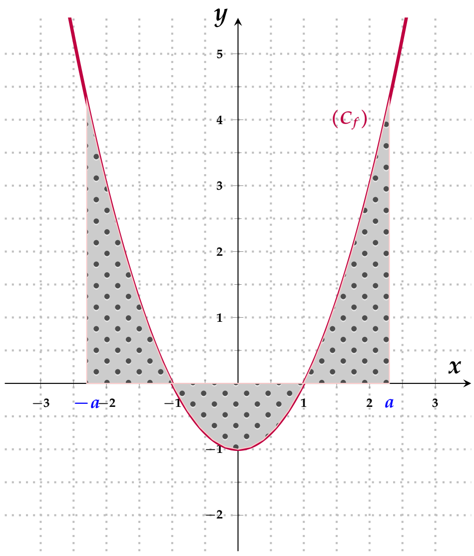
◁ $\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$

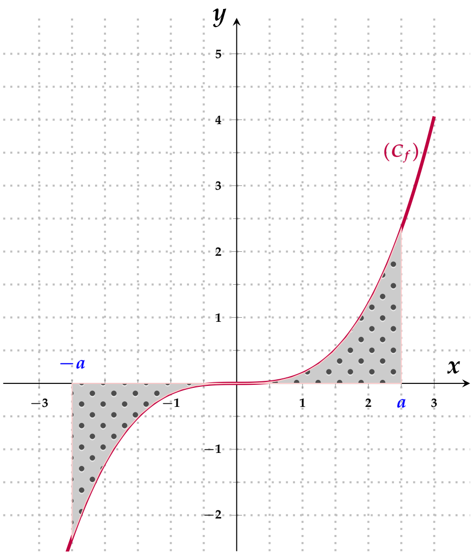
◁ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

◁ إذا كانت f دالة فردية فإن:

◁ $\int_{-a}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{a}f(x)dx$

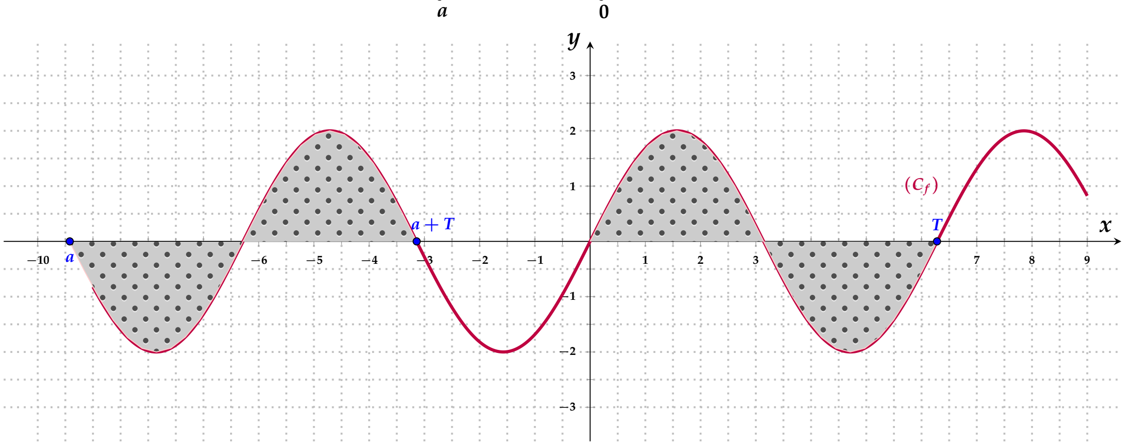
◁ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$





f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ، إذا كانت f دورية و دورها T فإن:

$$\int_{a}^{a+T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx$$



مــثال ❹

$$\int_{-3\pi}^{-\pi} \sin x dx = \int_{0}^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$ ◁

$$\int_{-6}^{6} (x^2+3) dx = 2\int_{0}^{6} (x^2+3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_0^6 = 90$$ ◁

◁ $\int_{-6}^{6} (x^3+3x) dx = 0$ لأن : الدالة $x \to x^3+3x$ دالة فردية

حل تمرين 26صفحة 186

❶ $$I = \int_{1}^{e} \ln t dt + \int_{1}^{e} (t + \ln\frac{1}{t}) dt = \int_{1}^{e} (\ln t - \ln t + t) dt = \int_{1}^{e} t dt = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

❷ $$I = \int_{1}^{e} \ln(1+t^2) dt + \int_{e}^{1} \ln(1+t^2) dt = \int_{1}^{e} \ln(1+t^2) dt - \int_{1}^{e} \ln(1+t^2) dt = 0$$

❷ $$I = \int_{1}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x) dx - \int_{1}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x) dx = \int_{1}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x) dx - \int_{1}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x) dx$$

ومنه $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x) dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\sin(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3})) = 0$$

حل تمرين 30 و 33 صفحة 186

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

التقويم

ثانوية عبد الحميد بن باديس -يلل- غليزان

- **الأستاذ :** بخدة أمين
- **المستوى :** 3ريا+3تر+3ع
- **المدة :** 1 ساعة
- **الوحدة التعلمية:** حساب التكاملي
- **ميدان التعلم:** التحليل
- **موضوع الحصة :** القيمة المتوسطة لدالة على مجال $[a;b]$

- **المكتسبات القبلية :** الدوال الأصلية ، تكامل دالة
- **الكفاءات المستهدفة :** توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى
- **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف ❶ — أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة على مجال I ، a و b عددان حقيقيان من I حيث: $a \leq b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

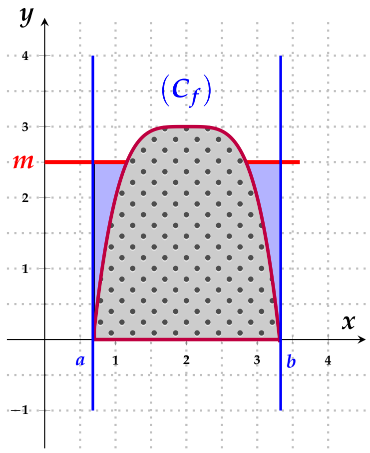
مـــثال

القيمة المتوسطة للدالة f المعرفة بـ $f(x) = 2x+3$ على المجال $[-1;2]$

هي : $m = \dfrac{1}{2-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x+3)dx = \dfrac{1}{3}\left[x^2+3x\right]_{-1}^{2} = 4$

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة بناء المعارف		

التفسير الهندسي في حالة دالة موجبة



إذا كانت f دالة مستمرة وموجبة على مجال $[a;b]$ وكان (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

فإن: $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ يعني $m(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

نعلم أن: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين a و b

و $m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m و هكذافإن: m القيمة المتوسطة لـ f على $[a;b]$ هي أحد بعدي المستطيل الذي بعده الآخر $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحنى (C_f) بين a و b

◁ نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الرمادي نفس المساحة

حصر تكامل- حصر قيمة المتوسطة

خاصية❶ — أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$

فإن : $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

البــرهــان

◁ إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$: $m \leq f(x) \leq M$

فإن: $\int_a^b M dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b m dx$ أي $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ ■

حالة خاصة

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كان a و b عددان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M

بحيث من أجل كل x من I، $|f(x)| \leq M$ فإن: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|$

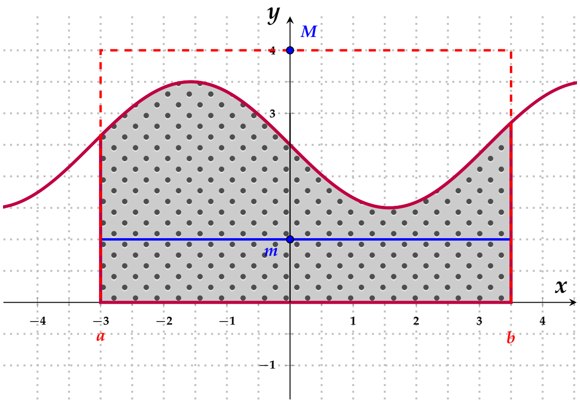
ملاحظة: ◁ القيمة المتوسطة للدالة f كذلك محصورة بين العددين m و M

التفسير الهندسي في حالة دالة موجبة و $m \geq 0$

إذا كانت f دالة مستمرة وموجبة على مجال $[a;b]$ وكان (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

فإن: ◁ مساحة الحيز المستوي تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b محصورة بين مساحتي المستطيلين اللذين إرتفاعهما m و M و قاعدتهما $b-a$

كما أن القيمة المتوسطة محصورة بين m و M



التقويم

حل تمرين 36 صفحة 186

◁ $m = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(2x+3)dx = \frac{1}{2}\left[x^2+3x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(4-(-2)) = 3$

◁ $m = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}|x|dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{0}(-x)dx + \frac{1}{4)}\int_{0}^{2}xdx = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2} = 1$

حل تمرين 51 صفحة 188

1 لدينا: من أجل كل x من $[n;n+1]$ فإن : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$

ومنه $\frac{1}{n}(n+1-n) \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{n+1}(n+1-n)$ أي $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

2 حسب مبرهنة الحصر نجد: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

لأن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ ومنه المتتالية (I_n) متقاربة

حل تمرين 52 و 59 صفحة 188 و 189

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية عبد الحميد بن باديس-يلل-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع ج
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حساب مساحة حيز في حالة دالة سالبة

المكتسبات القبلية : الدوال الأصلية ، تكامل دالة
الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

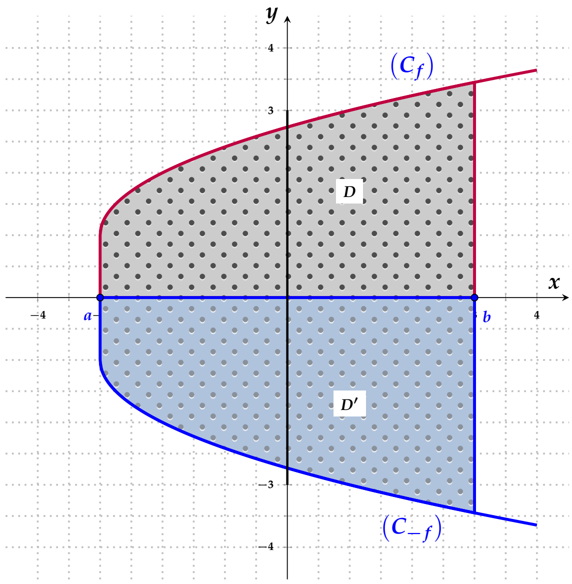
المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	(انظر أدناه)	

تكامل دالة سالبة على مجال

f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

◁ نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$

و بـ A' إلى مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_{-f}) و المستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$



بما أن f سالبة على المجال $[a;b]$ فإن $-f$ موجبة على المجال $[a;b]$

و بالتالي : $A'=\int_a^b -f(x)dx$

الحيزان D و D' متناظران بالنسبة حامل محور الفواصل فمساحتاهما متساويتان أي $A'=A$

و بالتالي : $A=\int_a^b -f(x)dx$

◁ نقول أحيانا أن : $\int_a^b f(x)dx$ هي المساحة الجبرية للحيز D فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$

مثال ❶

◁ لنحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحى الدالة $f:x\to x^2-2x-2$:

و المستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ، $x=0$ و $y=0$

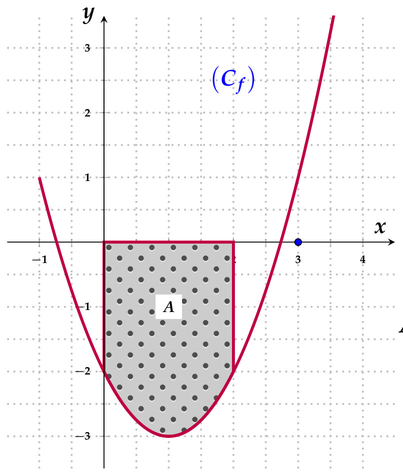
حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

الدالة : $f:x\to x^2-2x-2$ سالبة على المجال $[0;2]$

و بالتالي :

$$A=\int_0^2 -(x^2+2x-2)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-2x\right]_0^2$$

ومنه : $A=\frac{16}{3}cm^2$



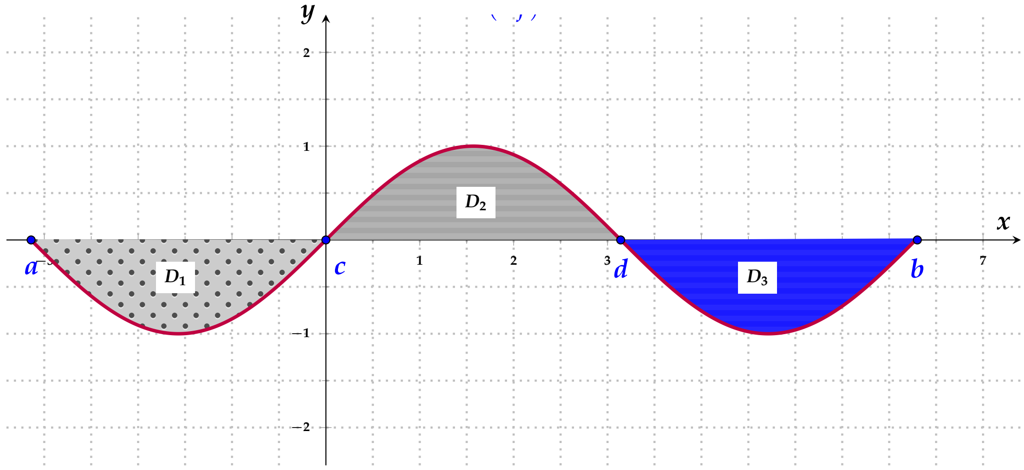
مرحلة بناء معارف

تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

◁ نفرض أن f دالة تغير إشارتها على المجال $[a;b]$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

◁ نرمز بـ A_1 إلى مساحة الحيز D_1 و بـ A_2 إلى مساحة الحيز D_2 و بـ A_3 إلى مساحة الحيز D_3



بما أن : $A = A_1 + A_2 + A_3$ فإن : $A = \int_a^c - f(x)dx \cdot (u.a) + \int_c^d f(x)dx \cdot (u.a) + \int_d^b - f(x)dx \cdot (u.a)$

ملاحظة:

بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بمنحنى ممثل للدالة f تغير إشارتها على $[a;b]$

نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارةثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات

التقويم

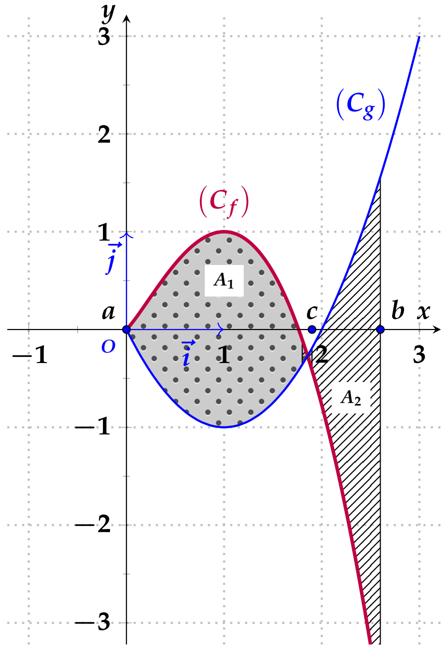
مساحة حيز محدد بمنحنيين

◁ f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$.

◁ (C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانين لهما على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

A مساحة الحيز المحدد بالمنحنين (C_f) و (C_g) و المستقيمين $x=a$ و $x=b$ حيث $A = A_1 + A_2$ كما موضح في الشكل المقابل

x	a	b	c
$f(x)-g(x)$		$+$	$-$



وبذلك المنحنى (C_g) يقع تحت المنحنى (C_f) في المجال $[a;c]$

ويمكن التعبير عن A_1 بمجموعة النقط $M(x;y)$

حيث : $\begin{cases} a \le x \le c \\ g(x) \le y \le g(x) \end{cases}$ و المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (C_g) في المجال $[c;b]$ ويمكن التعبير عن

A_2 بمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$

إذن $A_1 = \int_a^c (f(x)-g(x))\,dx \cdot (u.a)$ و $A_2 = \int_c^b -(f(x)-g(x))\,dx \cdot (u.a)$

ومنه $A = \left(\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx + \int_c^b -(f(x)-g(x)) \cdot dx\right) \cdot (u.a)$

مرحلة بناء التعلمات

التقويم

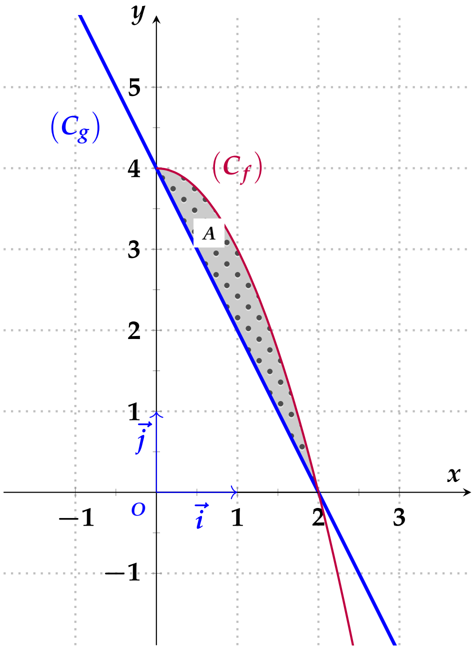
مــثال ❷

◁ f و g دالتين معرفتين على المجال $[0;2]$ بـ: $f(x) = -x^2+4$
و $g(x) = -2x+4$
◁ (C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانين لهما على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ (كما في الشكل)
◁ لنحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنين (C_f) و (C_g) و بالمستقيمين اللذين معدلتاهما $x=0$ و $x=2$
من أجل كل x من المجال $[0;2]$: $f(x) \geq g(x)$

ومنه $A = \int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx$

ومنه $A = \int_0^2 (-x^2+2x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$

أي $A = \frac{4}{3}\cdot(u.a)$



تطبيق:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-1;4]$ بـ: $f(x) = -e^{x-3}+2$
و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$
حيث : $\|\overrightarrow{i}\| = 1cm$ و $\|\overrightarrow{j}\| = 2cm$

1. إنطلاقا من التمثيل البياني للدالة $x \to e^x$ أنشئ (C_f)
2. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$ ، علماأن (C_f) يقع (T)
3. أحسب مساحة الحيز المحصورة بين (C_f) و T و المستقيمين ذي المعادلة $x=0$ و $x=4$

حل

1. نسحب منحنى دالة $x \to e^x$ بالشعاع $3\vec{i} - 2\overrightarrow{j}$ ثم نرسم نظيره بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

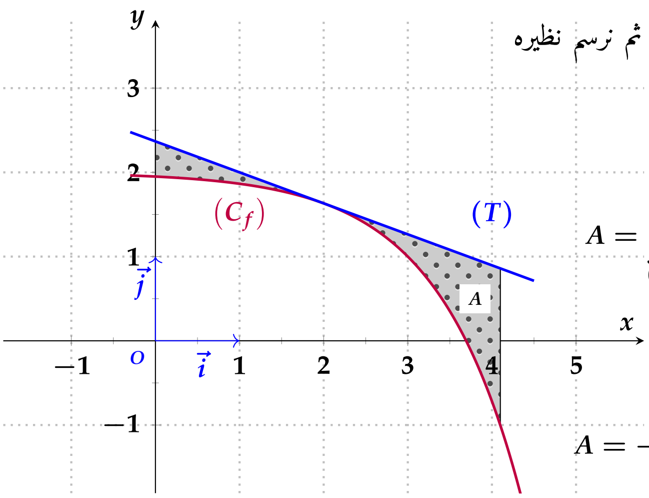
2. $(T): y = -e^{-1}x + e^{-1} + 2$

3. $A = \int_0^4 -[e^{x-3}+2-(-e^{-1}x+e^{-1}+2)]dx$

ومنه $A = \int_0^4 -(e^{x-3}+xe^{-1}-e^{-1})dx$

ومنه $A = -\left[e^{x-3}+\frac{e^{-1}}{2}x - e^{-1}x\right]_0^4 \approx 1,2u\cdot a$

ولدينا: $(u.a) = 2cm^2$ ومنه $A \approx 2.4cm^2$



حل تمرين 59 صفحة 188

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

ثانوية عبد الحميد بن باديس-يلل-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : التكامل بالتجزئة

المكتسبات القبلية : الدوال الأصلية ، تكامل دالة
الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق مرحلة بناء المعارف	(انظر أدناه)	

المكاملة بالتجزئة

مبرهنة ❶

أظف إلى مطويتك

لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I بحيث أن :الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I .

من أجل كل عددين حقيقين a و b من I لدينا : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

البـرهـان

الدالتان u و vقابلتان للإشتقاق على مجال I ومنه uv قابلة للإشتقاق على I

لدينا : $(uv)' = u'v + v'u$ ومنه نستنتج أن : uv دالة أصلية لـ: $u'v + v'u$ على مجال I

ومنه $\int_a^b (u'v + v'u)dx = [uv]_a^b$ ومنه $\int_a^b (u'v)dx + \int_a^b (v'u)dx = [uv]_a^b$

ومنه $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$ ■

مثال❶

◁ لنحسب $\int_0^1 xe^{-x}$. نضع : $v'(x) = e^{-x}$ و $u(x) = x$ ومنه $v(x) = -e^{-x}$ و $u'(x) = 1$

ومنه $\int_0^1 xe^{-x} = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -2e^{-2} + 1$

طريقة

تطبيقيا لحساب التكامل: $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ نعتمد على المخطط التالي :

$u(x) \xrightarrow{\text{الجداء}} v(x)$

ناقص التكامل

$u'(x) \nearrow v'(x)$

$[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)$

مثال❷

لنحسب التكامل $\int_0^1 (x+2)e^x dx$

نضع : $u(x) = x+2$ و $v'(x) = e^x$ ومنه $u'(x) = 1$ و $v(x) = e^x$

إذن $\int_0^1 (x+2)e^x dx = [(x+2)e^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x = 2e-1$

تطبيق:

◁ بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب:

❶ $\int_1^e x\ln x dx$ ❷ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

❸ $\int_2^e \ln(x-1) dx$ ❹ $\int_0^\pi x\cos x dx$

التقويم

حل تطبيق

❶ نضع : $u(x) = \ln x$ و $v'(x) = x$ ومنه $u'(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

إذن $\int_1^e x\ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

❷ نضع : $u(x) = \ln x$ و $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ ومنه $u'(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = -\frac{1}{x}$

إذن $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx = -e^{-1} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = -2e^{-1}+1$

❸ نضع : $u(x) = \ln(x-1)$ و $v'(x) = 1$ ومنه $u'(x) = \frac{1}{x-1}$ و $v(x) = x$

إذن $\int_2^e \ln(x-1) dx = [x\ln(x-1)]_2^e - \int_2^e \frac{x}{x-1} dx = e\ln(e-1) - [x+\ln(x-1)]_2^e$

ومنه $\int_2^e \ln(x-1) dx = \ln(e-1)(e-1) - e + 2$

❸ نضع : $u(x) = x$ و $v'(x) = \cos x$ ومنه $u'(x) = 1$ و $v(x) = \sin x$

إذن $\int_0^\pi x\cos x dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x = [\cos x]_0^\pi = -2$

حل تمرين 62و63و64و65 صفحة 189

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية عبد الحميد بن باديس-يلل-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : توظيف التكامل لحساب الدوال الأصلية

المكتسبات القبلية : الدوال الأصلية ، تكامل دالة
الكفاءات المستهدفة : توظيف التكامل لحساب الدوال الأصلية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق مرحلة بناء المعارف التقويم	**الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة** **مبرهنة ❶** — أظف إلى مطويتك f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I . الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة : $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ **البرهان** نضع : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ومنه إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على المجال I يكون لدينا : ◁ من أجل كل x من I: $F(x) = G(x) - G(a)$ وبالتالي من أجل كل x من I : $F'(x) = G'(x) = f(x)$ ◁ نستنتج أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a ■ **مثال❶** الدالة الأصلية للدالة : $f : x \to \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ و التي تنعدم من أجل 1 هي: $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \frac{(\ln t)^2}{2}$ **تطبيق:** f دالة مستمرة على مجال I يشمل a ◁ عيّن دالة أصلية F للدالة f على I بحيث $F(a) = 0$ ❶ $f(x) = \ln x$ ، $a = 1$ ، $I =]0;+\infty[$ ❷ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ، $a = 0$ ، $I = \mathbb{R}$ ❸ $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ، $a = 0$ ، $I = \mathbb{R}$	

حل تطبيق

❶ نضع : $u(t)=\ln t$ و $v'(t)=1$ ومنه $u'(t)=\frac{1}{t}$ و $v(x)=t$

إذن $F(x)=\int_1^x \ln t\,dt=[t\ln t]_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{1}{t}dt=x\ln x-[t]_1^x=x\ln x-x$

❷ $F(x)=\int_0^x \frac{2t}{2(t^2+1)}dt=\frac{1}{2}\left[t\ln(t^2+1)\right]_0^x=\frac{\ln(x^2+1)}{2}$

❸ نضع : $u(t)=t$ و $v'(t)=e^{-1}$ ومنه $u'(t)=1$ و $v(x)=-e^{-1}$

إذن $F(x)=\int_1^x te^{-t}dt=\left[-te^{-t}\right]_0^x-\int_0^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}-[e^{-t}]_0^x=-xe^{-x}-e^{-x}+1$

حل تمرين 68و69و70 صفحة 189

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي

ميدان التعلم: التحليل

موضوع الحصة : حساب حجوم لمجسمات بسيطة

المستوى : 3ريا+3تر+3ع

المدة : 1 ساعة

المكتسبات القبلية : الدوال الأصلية ، تكامل دالة

الكفاءات المستهدفة : حساب حجوم بعض مجسمات البسيطة

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

مرحلة بناء المعارف

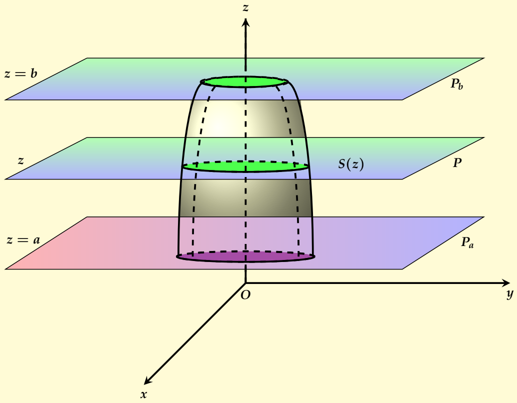
حساب حجوم بعض مجسمات البسيطة

خاصية 1

◁ نعتبر في الفضاء مجسما محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما $z=a$ و $z=b$ حيث $a \leq b$

◁ لتكن $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستوي موازي للمستوي (xOy) راقمه z حيث : $a<z<b$

◁ نقبل أن حجم المجسم بوحدة الحجوم هو العدد الحقيقي v حيث : $V=\int_a^b S(z)dz$



مثال 1

◁ نعتبر الكرة (S) ونصف قطرها R .

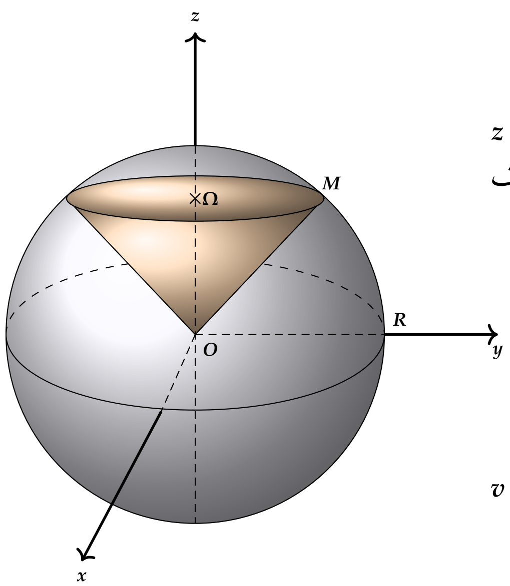
◁ مقطع هذه الكرة بمستوي موازي للمستوي (xOy) وراقمه z حيث $-R<z<R$ هي دائرة مركزها $\Omega(0,0,z)$ و نصف قطرها $r=\Omega M$ مع $OM=r$

لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2=R^2-z^2$

ومنه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطرها r هي : $S(z)=\pi(R^2-z^2)$

◁ إذن $V=\int_{-R}^{R} S(z)dz=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-z^2)dz$

و بالتالي : $V=\left[R^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{+R}$ ومنه $v=\frac{4}{3}\pi R^3(u\cdot v)$



مثال ❷

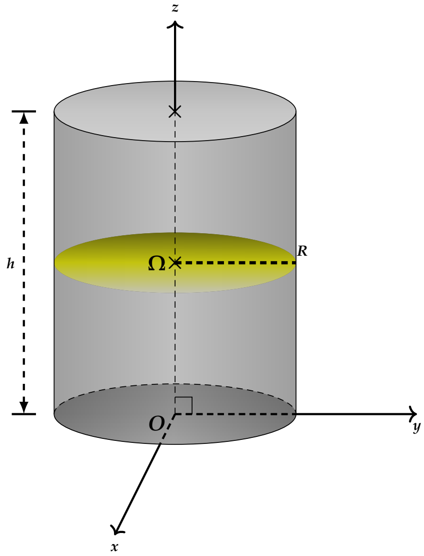
◁ نعتبر الأسطوانة (H) التي محورها (Oz) و نصف قطرها R و إرتفاعها h .

مقطع هذه الأسطوانة بمستوي موازي للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $0 < z < h$ هي دائرة مركزها $\Omega(0,0,z)$ ونصف قطرها R

ومنه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره R هي $S(z) = \pi R^2$

◁ إذن $V = \int_0^h S(z)dz = \int_0^h \pi R^2 dz$

و بالتالي : $V = [\pi R^2 z]_0^h$ ومنه $v = \pi R^2 h(u \cdot v)$



حالة خاصة

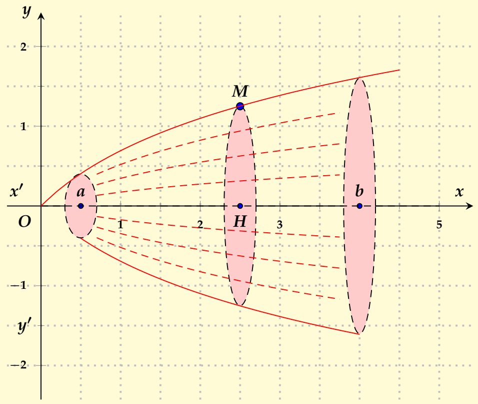
حجم مجسم دوراني محوره (xx')

◁ ليكن (C_f) المنحنى الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a;b]$

◁ دوران المنحنى (C_f) حول المحور xx' يولد مساحة دورانية محورها (xx') التي بدورها تحدد مجسما دورانيا محوره (xx')

◁ لتكن $M(x, f(x))$ نقطة من (C_f)

◁ مقطع المجسم الناتج عن دوران المنحنى (C_f) حول المحور (xx') بمستوي مار من M وعمودي على (xx') هو قرص مساحته $\pi \times HM^2$ أي $\pi \times [f(x)]^2$



خاصية ❷

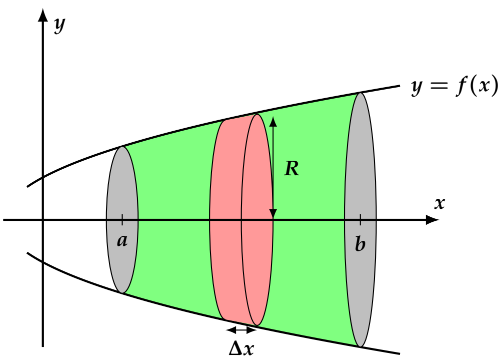
◁ حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور (xx') لمنحنى (C_f) ممثل للدالة f مستمرة و موجبة على مجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي V حيث : $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \times (u \cdot v)$ حيث $(u \cdot v)$ وحدة الحجم

البـرهـان

في الشكل المقابل مجسم باللون الأخضر مولد بتدوير منحنى دالة f حول محور (xx')

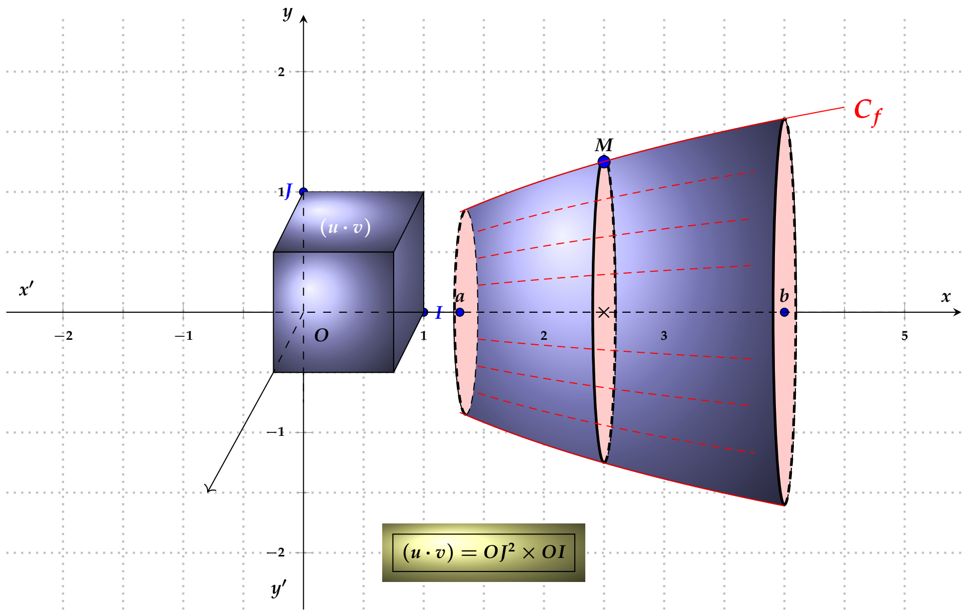
نقسم المجسم إلى عدة أجسام صغيرة متساوية شبه أسطوانية الشكل (كما موضح في الشكل) إرتفاعها Δx و نصف قطر قاعدتها $f(x)$. لما يكون Δx قريب جدا من الصفر يصبح مجسم على شكل اسطوانة ذات إرتفاع dx و نصف قطر قاعدتها $f(x)$ ومنه حجم الأسطوانة كالتالي: $dv = \pi[f(x)]^2dx$

ومنه $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx(u \cdot v)$



مرحلة بناء معارف

وحدة الحجم $(u\cdot v)=OJ^2\times OI$

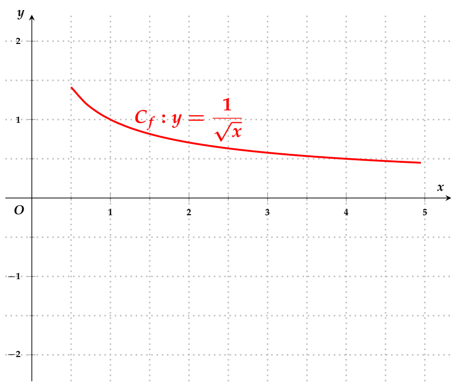


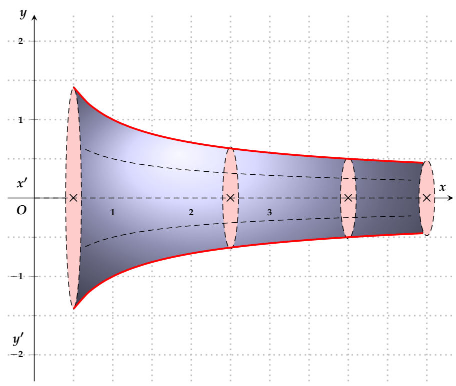
مثال ❸

◁ لنحسب الحجم الناتج عن دوران منحنى دالة : $f:x\to\frac{1}{\sqrt{x}}$ على المجال $\left[\frac{1}{2};5\right]$

◁ الدالة $f:x\to\frac{1}{\sqrt{x}}$ مستمرة و موجبة على المجال $\left[\frac{1}{2};5\right]$ ومنه الحجم هو : $V=\int_{\frac{1}{2}}^{5}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\int_{\frac{1}{2}}^{5}\frac{\pi}{x}dx$

ومنه $V=\left[\pi\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{5}=\pi\left(\ln 5+\ln 2\right)=\pi\ln(10)\,(u\cdot v)$





التقويم

تطبيق:

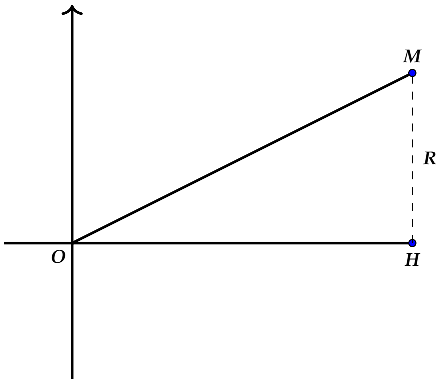
أثبت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة : $V=\frac{1}{3}\pi R^2h(u\cdot v)$ حيث h إرتفاعه و R نصف قطر قاعدته

الحل

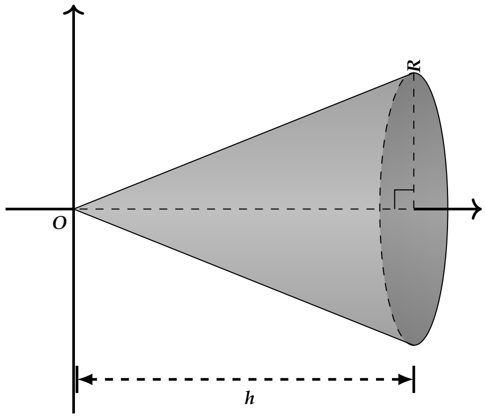
نأخذ الدالة f المعرفة على المجال $[0;h]$ بـ : $f(x)=ax$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $\left(O:\vec{i},\vec{j}\right)$ ، M نقطة من (C_f) و النقطة $H(h,0)$ مسقطها العمودي على حامل محور الفواصل (الشكل 1)

إذن $a=\frac{MH}{OH}=\frac{R}{h}$ ومنه $f(x)=\frac{R}{h}x$

ندير منحنى (C_f) حول حامل محور الفواصل فيولد لنا مخروط دوراني (الشكل 2)



الشكل 1



الشكل 2

ومنه $V=\int_0^h \pi f(x)^2dx=\int_0^h \pi\left(\frac{R}{h}x\right)^2dx=\int_0^h \pi\frac{R^2}{h^2}x^2dx$

ومنه $V=\left[\pi\frac{R^2}{3h^2}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\cdot\pi hR^2(u\cdot v)$

حل تمرين72 و 73 صفحة 189

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

ثانوية عبد الحميد بن باديس -يلل- غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : توظيف حساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة

المكتسبات القبليـة : الدوال الأصلية ، تكامل دالة
الكفاءات المستهدفة : توظيف حساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**السرعة اللحظية و المسافة المقطوعة للمتحرك** **السرعة اللحظية لنقطة متحركة** **خاصية 1** — أظف إلى مطويتك M نقطة متحركة على مستقيم (D) ، $x(t)$ المسافة المقطوعة من النقطة M عند اللحظة t ◁ السرعة اللحظية $v(t)$ للنقطة M عند اللحظة t هي : $v(x) = x'(t)$ أي $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$	
مرحلة بناء المعارف	**المسافة المقطوعة على مستقيم** **خاصية 2** — أظف إلى مطويتك ◁ المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 حيث $t_1 < t_2$ سرعتها اللحظية $v(t)$ هي : $x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ **البـرهـان** نعلم أن $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ أي $dx = v(t)dt$ بمكاملة الطرفين بين اللحظتين t_1 و t_2 حيث $t_1 < t_2$ نجد $x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ ■ **تطبيق:** من أجل $t > 0$ ، سرعة نقطة متحركة هي : $v(t) = e^t + t(m \cdot s^{-1})$ ◁ أحسب المسافة المقطوعة من قبل هذه النقطة المتحركة بين اللحظتين: $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$	
التقويم	**حل تطبيق** ◁ نعلم أن: $x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ ومنه $x = \int_{1}^{2} (e^t + t)dt = \left[e^t + \dfrac{t^2}{2}\right]_1^2 = e^2 - e + \dfrac{3}{2}$ **ملاحظات حول سير الدرس**	