التمرين الأول :

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أحسب $g'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

3) برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0,35 \le \alpha \le 0,36$ 4) استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الآن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

و نسمي (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الرسم $2cm$)

1) احسب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أحسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها على $\mathbb{R}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ) بين أن $f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$ ب) باستعمال حصر العدد α عين حصرا لـ $f(\alpha)$

5) برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له $y=x-1$ هو مستقيم مقارب ما\ل لـ(C) بجوار $+\infty$ ثم حدد وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ)

6) اكتب معادلة للمماس(T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 0 7) أرسم كل من (Δ) ،(T) ثم (C).

التمرين الثاني :

I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x)=x^2-\ln x^2$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم يكون : $g(x)>0$.

II) نعتبر الآن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) أحسب : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}^*$ تكون : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

ج) برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذو المعادلة $y=x$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا .

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,3<\alpha<0,4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصرا له .

4) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة لكليهما .

ب) أنشئ كلا من : (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و المنحني (C_f) .

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالعبارة : $h(x)=\left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}+(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]+2$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.- بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_h) . (الإنشاء غير مطلوب) .

التمرين الثالث:

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فان: $g(x)>0$

II) نعتبر الآن الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فان: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4) بين ان (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث $y=x-1$ معادلة له ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحني (C) .

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y=mx-m$ معادلة له .

أ) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي m فان النقطة $A(1;0)$ تنتمي الى المستقيم (Δ_m) .

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx-m$.

التمرين الرابع:

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-1)e^{2x}-1$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن: المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $1,10\prec\alpha\prec1,11$.

ب) ادرس إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(2x-3)(e^{2x}-2)$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس. $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب كلا من: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بين أن: المستقيم (D) ذا المعادلة المختصرة $y=-4x+6$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

ج) ادرس الوضع النسبي لـ المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D).

2) أ) بين أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=4g(x)$.

ب) استنتج أن: f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة ديكارتية لـ (T) مماس (C) في النقطة ذات الفاصلة 1. (نقبل أن: (C) يقع أعلى من (T))

3) بين أن: $f(\alpha)=-\frac{(2\alpha-3)^2}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

4) أ) عين احداثيات نقط تقاطع (C) مع كل من حاملي محوري الاحداثيات.

ب) انشئ (D) و (T) ثم مثل (C). (نأخذ: $f(\alpha)\simeq-5,6$).

5) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x)=|2x-3|(e^{2x}-2)$ و (Γ) تمثيلها البياني في نفس المستوي السابق.

اشرح كيفية تمثيل (Γ) انطلاقا من (C) ، ثم مثله.

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(x^2)$

دون تعيين عبارة الدالة h ادرس اتجاه تغيرها على $\mathbb{R}$. ثم شكل جدول تغيراتها .

بالتوفيق للجميع

تصحيح التمرين الأول:

I) $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) حساب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1-(x^2-2x+2)e^{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x^2-2x+2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}} = 1$$

2) حساب $g'(x)$ و دراسة إشارتها ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$g'(x) = -\left[(2x-2)e^{-x} - e^{-x}(x^2-2x+2)\right]$$
$$= -\left[2x-2-x^2+2x-2\right]e^{-x} = \left[x^2-4x+4\right]e^{-x} = (x-2)^2e^{-x}$$

نستنتج انه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ فان $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	

3) اثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم التحقق أن $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$:

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ومن خلال جدول التغيرات نستنتج انها رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ ومن اجل كل $x \in \mathbb{R}$ فان $g(x) \in]-\infty;1[$ و $]-\infty;1[\in 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث $g(\alpha) = 0$

التحقق ان $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$: لدينا $g(0,36) \simeq 0,02$ ، $g(0,35) \simeq -0,02$ اي $g(0,35) \times g(0,36) < 0$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج ان $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$.

4) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: من خلال ما سابق نستنتج ان اشارة $g(x)$ تكون حسب ما يلي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

II) $f(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$

1) حساب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x-1+(x^2+2)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{x^2+2}{x}e^{-x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-1+(x^2+2)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{x^2+2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}} = +\infty$$

2) حساب $f'(x)$ ثم دراسة اشارتها على $\mathbb{R}$:

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x) = 1 + 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2+2) = 1 + \left(2x - x^2 - 2\right)e^{-x} = 1 - \left(x^2-2x+2\right)e^{-x} = g(x)$$

نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ اذن:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم تشكل جدول تغيراتها :

نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) أ) تبيين أن $f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$: $f(\alpha)=\alpha-1+(\alpha^2+2)e^{-\alpha}$ .....(1)

ولدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $1-(\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha}=0$ ومنه $e^{\alpha}-(\alpha^2-2\alpha+2)=0$ ومنه $\alpha^2+2=e^{\alpha}+2\alpha$

بالتعويض في (1) نجد : $f(\alpha)=\alpha-1+(e^{\alpha}+2\alpha)e^{-\alpha}=\alpha-1+1+2\alpha e^{-\alpha}=\alpha(1+2e^{-\alpha})$ وهو المطلوب.

ب) تعين حصرا لـ $f(\alpha)$: لدينا $0,35\le\alpha\le0,36$ ومنه $-0,36\le-\alpha\le-0,35$ ومنه $e^{-0,36}\le e^{-\alpha}\le e^{-0,35}$

$0,698\le e^{-\alpha}\le0,705$ ومنه $1,40\le2e^{-\alpha}\le1,41$ومنه $2,40\le1+2e^{-\alpha}\le2,41$ بالضرب مع

$0,35\le\alpha\le0,36$ نجد $0,84\le\alpha(1+2e^{-\alpha})\le0,87$ اي $0,84\le f(\alpha)\le0,87$ وهو المطلوب.

5)اثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له $y=x-1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$ ثم حدد الوضعية :

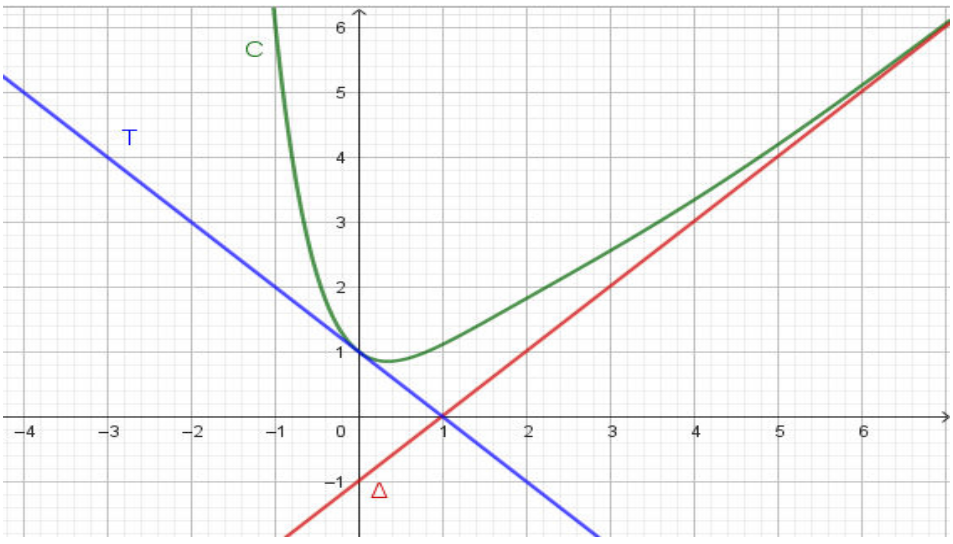
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}}=0$$

اذن (Δ) مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي بين (Δ) و (C) : ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$: $f(x)-y=(x^2+2)e^{-x}$ نستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x فان $f(x)-y>0$ (لان $e^{-x}>0$ و $x^2+2>0$ دوما) ومنه (Δ) يقع تحت (C) .

6) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 0 : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $y=-x+1$

7) رسم كل من (Δ) ،(T) ثم (C):



تصحيح التمرين الثاني:

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x)=x^2-\ln(x^2)$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها :

*) الدالة المشتقة : الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و عبارة دالتها المشتقة هي $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x.(2x^2-2)$ و عليه نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$2x2-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

إذن جدول التغيرات يكون :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	‖	↘	1	↗	$+\infty$

*) النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow[>]{<}0}g(x)=+\infty$.

2) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم تكون : $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$.

1) أ) حساب النهايات :

*) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\frac{2}{x^2}+1+\frac{\ln(x^2)}{x^2}\right)=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2)}{x^2}=0$

فبوضع : $\begin{cases}x^2=t\\ -\infty\to+\infty\end{cases}$ هذه الأخيرة تصبح : $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0}$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x}=0$.

ب) حساب النهايات و تفسير النتائج بيانيا :

*) $\lim\limits_{x\xrightarrow[<]{}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow[<]{}0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow[>]{}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow[>]{}0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=-\infty$

*) التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x=0$.

2) أ) بيان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ يكون : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و دالتها المشتقة هي :

$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+1+\frac{2-\ln(x^2)}{x^2}=\frac{-2+x^2+2-\ln(x^2)}{x^2}=\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}$ ، إذن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f : نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ و عليه جدول تغيراتها يكون :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	‖	↗	$+\infty$

ج) برهان أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) :

أي نحسب : $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\right]=0$ ، إذن : المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

*) دراسة الوضع النسبي : أي ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-x\right]=\left(\frac{2+\ln\left(x^2\right)}{x}\right)$.

نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$-e^{-1}$		0		e^{-1}		$+\infty$
x	$-$		$-$		$+$	0	$+$		
$2+ln(x2)$	$+$	0	$-$	0	$-$		$+$		
$f(x)-x$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$		

و منه الوضعية تكون كما يلي :

*) على كل من المجالين $\left]-\infty;-e^{-1}\right[$ و $\left]0;e^{-1}\right[$ المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

*) على كل من المجالين $\left]-e^{-1};0\right[$ و $\left]e^{-1};+\infty\right[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

*) المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطتين : $\left(-e^{-1};f\left(-e^{-1}\right)\right)$ و $\left(e^{-1};f\left(e^{-1}\right)\right)$.

3) أ) التحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ يكون : $f(x)+f(-x)=0$.

لدينا : $f(x)+f(-x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}-\frac{2}{x}-x-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}=0$.

إذن و بما أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ فإن الدالة f فردية و منحناها البياني (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز التناظر .

ب) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,3<\alpha<0,4$.

و بما أن الدالة f فردية إذن يوجد حل آخر β محصور بين $-0,4$ و $-0,3$ أي يكون : $-0,4<\beta<-0,3$.

4) أ) المنحنى (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) يعني أن : $f'(x)=1$ ، لنحل في $\mathbb{R}^*$ هذه الأخيرة .

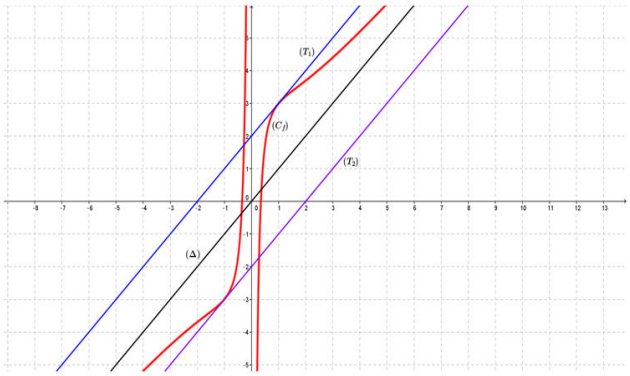
لدينا : $\frac{x^2-\ln\left(x^2\right)}{x^2}=1$ أي : $\frac{x^2-\ln\left(x^2\right)}{x^2}-1=0$ أي تصبح : $-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}=0$ أي : $\begin{cases}-\ln\left(x^2\right)=0\\x^2\neq0\end{cases}$

هذا يكافئ : $x^2=1$ أي : $x=1$ أو $x=-1$ و منه فعلا المنحنى (C_f) يقبل مماسين موازيان للمستقيم (Δ) .

*) كتابة معادلة المماس (T_1) عند $x_0=1$: $(T_1):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه : $(T_1):y=x+2$.

*) كتابة معادلة المماس (T_2) عند $x_0=-1$: $(T_2):y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ و منه : $(T_2):y=x-2$.

ب) الإنشـاء :



5) لدينا : $h(x)=\left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}+(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]+2$ أي

يكون : $h(x)=f(x+1)+2$.

إذن : يوجد تحويل نقطي يحول المنحنى (C_f) إلى (C_h) و هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

تصحيح التمرين الثالث:

$(I \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث : $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$ نستنتج ان اشارة $g'(x)$ من نفس اشارة $2x^2 - 1$

دراسة اشارة $2x^2 - 1 = 0$ على $\mathbb{R}$:

$2x^2 - 1 = 0$ ومنه $x^2 = \frac{1}{2}$ ومنه $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ او $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

جدول اشارة $2x^2 - 1$:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول اشارة $g'(x)$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

اذن نجد ان الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

جدول التغيرات:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g(x)	‖ ↘		$g(\frac{\sqrt{2}}{2})$	↗	

2) حساب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم تبيين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فان: $g(x) > 0$:

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + 1 - (\ln\sqrt{2} - \ln 2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \frac{3 + \ln 2}{2}$$

لدينا $\frac{3 + \ln 2}{2} > 0$ أي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$ وبما ان $g(\frac{\sqrt{2}}{2})$ حسب جدول تغيرات الدالة g هي قيمة حدية صغرى اذن نستنتج انه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فان: $g(x) > 0$.

$(II \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$

1) حساب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2) تبيين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فان: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. ثم تشكيل جدول التغيرات :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ وحسب ما سبق وجدنا انها من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فان: $g(x) > 0$ اذن من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فان: $f'(x) > 0$ والدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

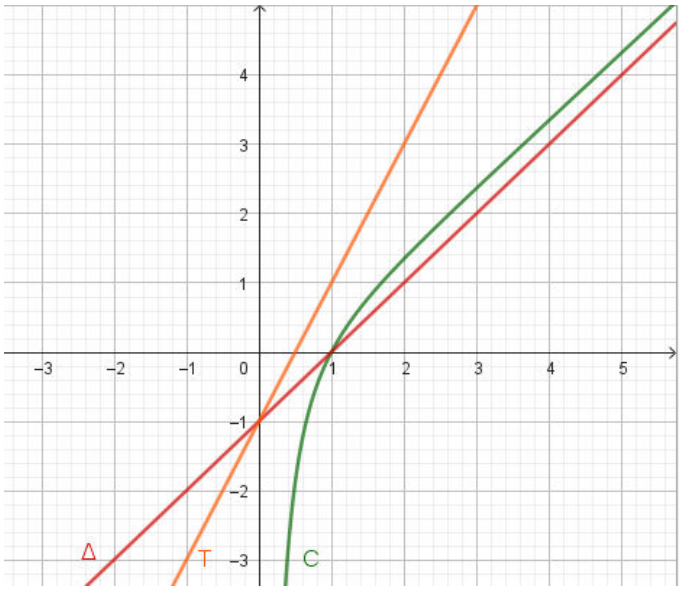
3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحني (C) في النقطة التي فاصلتها 1 : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه نجد $y = 2x-2$

4) تبيين ان (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث $y = x-1$ معادلة له ثم دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ اذن (Δ) مقارب مائل لـ (C) في جوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي: ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$: $f(x)-y = \dfrac{\ln x}{x}$ نستنتج ان اشارة الفرق $f(x)-y$ من نفس اشارة $\ln x$ ونعم ان $\ln x = 0$ عند $x = 1$ و $\ln x > 0$ لما $x > 1$ و $\ln x < 0$ لما $0 < x < 1$ أي ان (Δ) و (C) يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 1 و (C) فوق (Δ) لما $x > 1$ و (C) تحت (Δ) لما $0 < x < 1$.

5) رسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحني (C) :



6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx-m$ معادلة له .

أ) التحقق انه من اجل كل عدد حقيقي m فان النقطة $A(1;0)$ تنتمي الى المستقيم (Δ_m) :

بتعويض احداثيي هذه النقطة في معادلة (Δ_m) نجد $0 = m(1)-m$ أي $0 = 0$ اذن فالمعادلة محققة مهما كانت قيمة الوسيط الحقيقي m ومنه فان النقطة $A(1;0)$ تنتمي الى المستقيم (Δ_m) .

ب) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx-m$:

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد النقط المشتركة بين المستقيم الدوار (Δ_m) حول النقطة $A(1;0)$ والمنحني (C) أي مناقشة دورانية وحسب الشكل نجد:

- لما $m \in]-\infty;1]$ للمعادلة حل وحيد وهو 1 .
- لما $m \in]1;2[$ للمعادلة حلين مختلفين.
- لما $m = 2$ للمعادلة حل وحيد وهو 1 .
- لما $m \in]2;+\infty[$ للمعادلة حلين مختلفين.

تصحيح التمرين الرابع:

$g(x)=(x-1)e^{2x}-1$ (I

1) دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{2x}-1=+\infty$ ،

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{2x}-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{2x}-e^{2x}-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2}(2xe^{2x})-e^{2x}-1\right]=-1$$

(لان $\lim\limits_{x\to-\infty}(2xe^{2x})=\lim\limits_{\alpha\to-\infty}(\alpha e^{\alpha})=0$ حسب التزايد المقارن)

اتجاه التغير:

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x)=e^{2x}+(x-1)(2e^{2x})=(1+2x-2)e^{2x}=(2x-1)e^{2x}$

بما انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فان $e^{2x}>0$ فان اشارة $g'(x)$ من نفس اشارة $2x-1$.

جدول اشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

نستنتج ان الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ ومتزايدة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$g(\frac{1}{2})$	↗	$+\infty$

2) أ) تبيين أن: المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $1,10\prec\alpha\prec1,11$:

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ولدينا $g(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}e-1$ وهو عدد سالب اذن من خلال جدول التغيرات نجد ان مجال الصور الذي يحتوي على 0 هو فقط المجال $\left]g(\frac{1}{2});+\infty\right[$ وهو صورة المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ والدالة رتيبة تماما عليه ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على مجموعة التعريف وبالضبط على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ وليكن α .

لدينا $g(1,10)\simeq-0,1$ ، $g(1,11)\simeq0,01$ اي $g(1,10)\times g(1,11)<0$ ومنه نستنتج ان $1,10\prec\alpha\prec1,11$.

ب) دراسة إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x : مما سابق نستنتج:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

$f(x)=(2x-3)(e^{2x}-2)$ (II

1)أ) حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)(e^{2x}-2)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)(e^{2x}-2)=+\infty$

ب) تبيين أن: المستقيم (D) ذا معادلة $y=-4x+6$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=\lim_{x\to-\infty}(2x-3)(e^{2x}-2)-(-4x+6)=\lim_{x\to-\infty}(2x-3)e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}2xe^{2x}-3e^{2x}=0$$

(لان $\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^{2x}=\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^{X}=0$ حسب التزايد المقارن) اذن نستنتج ان (D) مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

ج) دراسة الوضع النسبي بين (C) و (D) :ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$: $f(x)-y=f(x)-(-4x+6)=(2x-3)e^{2x}$

نستنتج ان اشارة الفرق $f(x)-y$ من نفس اشارة $2x-3$ ومنه $f(x)-y=0$ تعني $x=\frac{3}{2}$ و $f(x)-y>0$ تعني

$x > \frac{3}{2}$ و $f(x) - y < 0$ تعني $x < \frac{3}{2}$ وعليه نستنتج ان (C) يتقاطع مع (D) في النقطة ذات الفاصلة $x = \frac{3}{2}$ و (C) فوق (D) في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و (C) تحت (D) في المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$.

2) أ) تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4g(x)$: الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x) = 2(e^{2x} - 2) + 2e^{2x}(2x - 3) = 2e^{2x} - 4 + 4xe^{2x} - 6e^{2x}$$
$$= e^{2x}(2 + 4x - 6) - 4 = 4\left[(x-1)e^{2x} - 1\right] = 4g(x)$$

ب) الاستنتاج :وجدنا انه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ فان $f'(x) = 4g(x)$ ومنه نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ اذن:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

اي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ج) كتابة معادلة لـ (T) مماس (C) في النقطة ذات الفاصلة 1 : لدينا $f(1) = -e^2 + 2$ ، $f'(1) = -4$ اذن $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه نجد $y = -4x + 6 - e^2$ وهي معادلة المماس (T) .

3) تبيين أن: $f(\alpha) = -\frac{(2\alpha-3)^2}{\alpha-1}$ ، ثم استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا $g(\alpha) = 0$ اي $(\alpha-1)e^{2\alpha} = 1$ ومنه $e^{2\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ .....(1)

ولدينا $f(\alpha) = (2\alpha-3)(e^{2\alpha}-2)$ .....(2)

بتعويض (1) في (2) نجد $f(\alpha) = (2\alpha-3)\left(\frac{1}{\alpha-1} - 2\right) = (2\alpha-3)\left(\frac{3-2\alpha}{\alpha-1}\right) = -\frac{(2\alpha-3)^2}{\alpha-1}$

الحصر: لدينا $1,10 < \alpha < 1,11$ ومنه $0,10 < \alpha - 1 < 0,11$ ومنه $\frac{1}{0,11} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,10}$.....(1)

ايضا لنا $1,10 < \alpha < 1,11$ ومنه $2 \times 1,10 - 3 < 2\alpha - 3 < 2 \times 1,11 - 3$ ومنه $-0,8 < 2\alpha - 3 < -0,78$ ومنه

$0,61 < (2\alpha-3)^2 < 0,64$.....(2)

من (1) و (2) وبالضرب نجد $\frac{0,61}{0,11} < \frac{(2\alpha-3)^2}{\alpha-1} < \frac{0,64}{0,10}$ ومنه $-\frac{0,64}{0,10} < -\frac{(2\alpha-3)^2}{\alpha-1} < -\frac{0,61}{0,11}$ ومنه

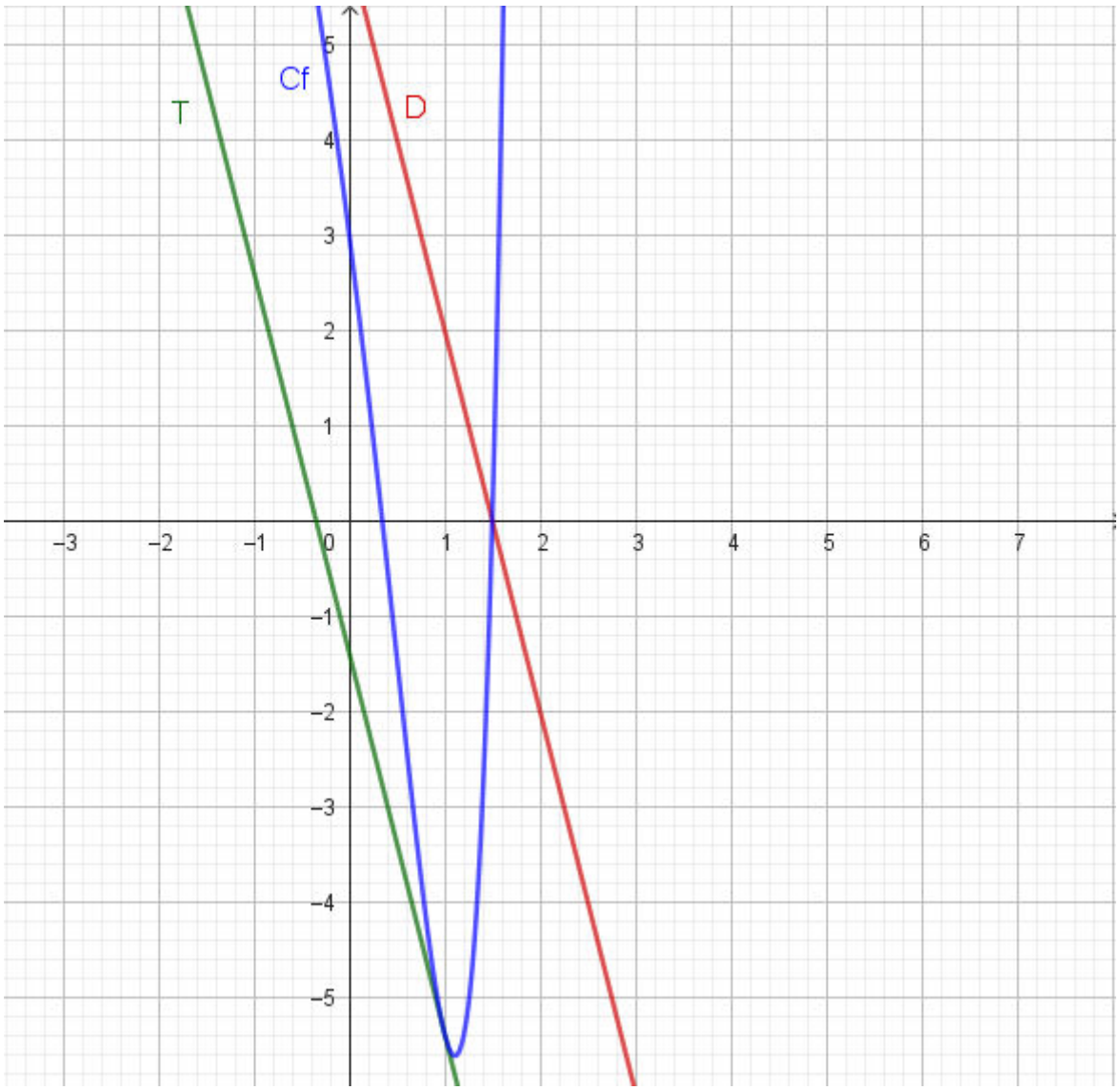
$-6,4 < f(\alpha) < -5,5$.

4) أ) تعيين احداثيات نقط تقاطع (C) مع كل من حاملي محوري الاحداثيات:

ـ مع (yy') : نحسب $f(0)$: لدينا $f(0) = (2\times 0 - 3)(e^{2\times 0} - 2) = 3$ ومنه $(C) \cap (yy') = \{B(0;3)\}$.

ـ مع (xx') : نحل المعادلة $f(x) = 0$: لدينا $f(x) = 0$ معناه $(2x-3)(e^{2x}-2) = 0$ ومنه $2x - 3 = 0$ اي $x = \frac{3}{2}$ او $e^{2x} - 2 = 0$ اي $x = \frac{1}{2}\ln 2$ ، اذن $(C) \cap (xx') = \left\{C\left(\frac{3}{2};0\right), D\left(\frac{1}{2}\ln 2;0\right)\right\}$.

ب) انشاء (D) و (T) ثم (C) :



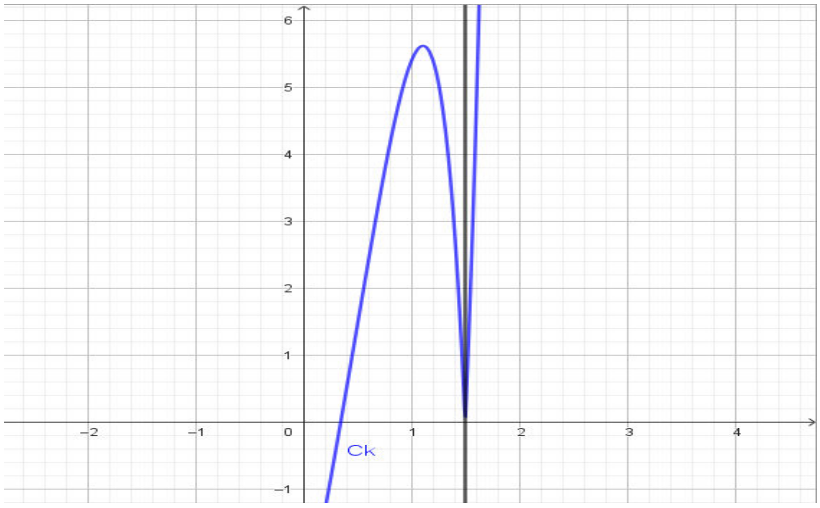
5) $k(x)=|2x-3|\left(e^{2x}-2\right)$ و (Γ) تمثيلها البياني:

شرح كيفية تمثيل (Γ) انطلاقا من (C) ، ثم تمثيله:

لدينا $k(x)=|2x-3|\left(e^{2x}-2\right)=\begin{cases}(2x-3)\left(e^{2x}-2\right) & ; \quad 2x-3\geq 0\\ -(2x-3)\left(e^{2x}-2\right) & ; \quad 2x-3<0\end{cases}$ ومنه $k(x)=\begin{cases}f(x) & ; \quad x\geq \frac{3}{2}\\ -f(x) & ; \quad x<\frac{3}{2}\end{cases}$

اذن نستخلص انه لتمثيل (Γ) نحتفظ بجزء (C) في المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ وعلى المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ ننشيء نظير (C) بالنسبة لحامل محور الفواصل.

رسم (Γ) :



6) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f\left(x^2\right)$

درس اتجاه تغير الدالة h على $\mathbb{R}$. ثم تشكيل جدول تغيراتها :

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لانها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه $h'(x)=2xf'\left(x^2\right)$

نستنتج ان اشارة $h'(x)$ من نفس اشارة الجداء $xf'\left(x^2\right)$

اولا دراسة اشارة $f'\left(x^2\right)$: مما سبق لنا اشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

اذن باستعمال الجدول نجد : $f'\left(x^2\right)=0$ تعني $x^2=\alpha$ ومنه $x=\sqrt{\alpha}$ او $x=-\sqrt{\alpha}$ (لان $\alpha>0$)

$f'\left(x^2\right)>0$ تعني $x^2>\alpha$ ومنه $\sqrt{x^2}>\sqrt{\alpha}$ ومنه $|x|>\sqrt{\alpha}$ ومنه $x>\sqrt{\alpha}$ او $-x>\sqrt{\alpha}$ أي $x<-\sqrt{\alpha}$

$f'\left(x^2\right)<0$ تعني $x^2<\alpha$ ومنه $\sqrt{x^2}<\sqrt{\alpha}$ ومنه $|x|<\sqrt{\alpha}$ ومنه $0\le x<\sqrt{\alpha}$ او $-x<\sqrt{\alpha}$ أي $0\ge x>-\sqrt{\alpha}$

بعبارة اخرى $f'\left(x^2\right)<0$ تعني $-\sqrt{\alpha}\le x<\sqrt{\alpha}$

جدول اشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x^2)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

نستنتج ان الدالة h متناقصة تماما على كل من المجالين $[0;\sqrt{\alpha}]$ و $]-\infty;-\sqrt{\alpha}]$ و متزايدة تماما على كل من المجالين $[\sqrt{\alpha};+\infty[$ و $[-\sqrt{\alpha};0]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	3	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

الأستاذ جمال بورنان