كراس العبقري في الرياضيات

الإحتمالات

- دروس.
- ملخص شامل.
- تمارين محلولة بالتفصيل.
- للشعب: الثانية علوم تجريبية، تقني رياضي.

BACS

الأستاذ بوعزة مصطفى

دروس الإحتمالات// التحضير الجيد للبكالوريا// 2 علوم تجريبية؛ 2 تقني رياضي.

بسم الله الرحمن الرحيم

يوم: .

الموضوع: **محاكاة تجربة عشوائية -مفردات الاحتمالات.**

① نشاط:

نعتبر التجربة التالية: نرمي P مرة زهرة نرد مكعبة غير مزيفة ذات ستة أوجه، مرقمة من 1 إلى 6 ونهتم بثلاثة وسائط.

- التواتر f_n لظهور الرقم 6 على الوجه العلوي من أجل n رمية الأولى.
- الوسط الحسابي m_n لـ n رقما الأولى التي تظهر على الوجه العلوي.
- التباين لهذه الأرقام (n الأولى ظهورا) $(n \leq p)$

المرحلة الأولى: - القيام بالتجربة جماعيا.

❶ كل تلميذ يرمي زهرة النرد 30 مرة ويسجل في كل مرة الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

❷ يحسب التلميذ الوسط الحسابي للأرقام.

❸ توضع كل النتائج (لكل تلاميذ القسم) في جدول واحد مشترك حسب النموذج التالي (n تأخذ القيم 30 ثم 60 وهكذا ... حتى التلميذ الأخير)

N	30	60	90	.....
عدد مرات ظهور الرقم 6				
f_n تواتر الرقم 6				
m_n الوسط الحسابي للأرقام				

ملاحظة: لحساب m_{60} يُمكن استعمال معدلي التلميذين الأولين .....

❹ نمثل بيانيا النقط $(n; f_n)$، ماذا تلاحظ؟

❺ نفس السؤال بالنسبة للنقط $(n; m_n)$

يشير المنحنى في السؤال ❹ إلى أنّ المتتالية (f_n) تؤول إلى عدد قريب من $0,17$ (توازن زهرة النرد يؤكد أنّ للرقم 6 حظا من بين ستة حظوظ للظهور) نقول عندئذ أنّ احتمال ظهور الرقم 6 يساوي $\frac{1}{6}$ $(\frac{1}{6} \simeq 0,17)$

المرحلة الثانية: - استعمال مجدول Excel

❶ أدخل أرقام الرميات من $A1$ إلى $A2500$

❷ باستعمال الطلبية (=ENT(ALEA( )*1+6) في الخلية $B1$

ثم استعمال الزالق إلى $B2500$ نحاكي التجربة السابقة (2500 رمية لزهرة النرد)

❸ نحسب f_n تواتر الرقم 6 (في الخانة $C1$) باستعمال الطلبية **=NB.SI($B$1:B1;6)/A1** ثمّ النسخ إلى $C2500$

❹ نمثل بيانيا النقط $(n; f_n)$ [سحابة نقط]، ماذا تلاحظ؟

❺ في الخانة $D1$ نحسب الوسط الحسابي m_n باستعمال الطلبية **=MOYENNE($B$1:B1)** ثمّ النسخ الى $D2500$

❻ مثّل بيانيا النقط $(n; m_n)$. ماذا تلاحظ؟

❼ نفس السؤال بالنسبة للتباينات في العمود E باستعمال الطلبية **=VAR.P($B$1:B1)** ثمّ النسخ إلى $E2500$

❽ باستعمال اللمسة $F9$ كرر المحاكاة ولاحظ.

② مصطلحات:

■ نسمي **تجربة عشوائية** كل تجربة لا يُمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة.

✍ في تجربة عشوائية، **مجموعة النتائج الممكنة** تسمى **مجموعة الإمكانيات** أو **مجموعة المخارج** ويُرمز لها بالرمز Ω.

✍ ليكن A جزءً من Ω، نقول عندئذٍ أنّ A **حادثة** (أو **حدث**).

■ إذا احتوت المجموعة الجزئية A على **عنصر وحيد** فإنّها تدعى **حادثة أولية** (أو **بسيطة**).

■ Ω هي **الحادثة الأكيدة** و$\varnothing$ هي **الحادثة المستحيلة**. ($\varnothing$ الجزء الخالي)

■ إذا كانت A حادثة ما فإنّ **حادثتها العكسية** يرمز لها بـ $\overline{A}$ وهي التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A.

■ لتكن A وB حادثتين. نرمز بـ$A \cap B$ للحادثة "A وB" وهي التي تحوي العناصر المشتركة بين A وB.

✍ إذا كانت $A \cap B$ خالية، أي: $A \cap B = \varnothing$ نقول عندئذٍ أنّ الحادثتين A وB **غير متلائمتين** (**منفصلتين**).

■ نرمز بـ$A \cup B$ للحادثة "A أوB" وهي التي تحوي عناصر A وعناصر B أيضا.

مثال:

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نرمي زهر نرد غير مزيفة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

■ المجموعة الشاملة هي: $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

■ الحادثة A :"الحصول على رقم فردي"، أي: $A = \{1;3;5\}$.

■ الحادثة العكسية لـA هي الحادثة $\overline{A}$:"الحصول على رقم زوجي"، أي: $\overline{A} = \{2;4;6\}$.

■ الحادثة B :"الحصول على رقم أكبر أو يساوي 3"، أي: $B = \{3;4;5;6\}$.

■ الحادثة العكسية لـB هي الحادثة $\overline{B}$:"الحصول على رقم أصغر تماما من 3"، أي: $\overline{B} = \{1;2\}$.

■ الحادثتان A وB هما مجموعتان جزئيتان من Ω.

■ الحادثة C :"الحصول على الرقم 6"، هي حادثة أولية (بسيطة)، لأنّ $C = \{6\}$.

■ الحادثة D :"الحصول على الرقم 7"، هي حادثة مستحيلة أي: $D = \varnothing$.

■ الحادثتين A وC منفصلتين (غير متلائمتين)، لأنّ $A \cap C = \varnothing$.

■ الحادثة $A \cap B$ هي الحادثة: "الحصول على رقم فردي أكبر أو يساوي 3"، أي: $A \cap B = \{3;5\}$.

■ الحادثة $A \cup B$ هي الحادثة: "الحصول على رقم فردي أو أكبر أو يساوي 3"، أي: $A \cup B = \{1;3;4;5;6\}$.

تم بحمد الله.

بسم الله الرحمن الرحيم

يوم: .

الموضوع: **قانون الاحتمال.**

نشاط مقترح من طرف الأستاذ:

يحتوي كيس على 100 كرية ملونة ومن نفس الشكل، تتوزع ألوان الكريات في الكيس كما يلي:

اللون	أبيض B	أحمر R	أسود N	أخضر V	المجموع
عدد الكريات	35	40	15	10	100

أ/ أنجز جدولا للتوترات f_i.

ب/ نسحب إحدى الكريات بصفة عشوائية.

1- ما هو احتمال أن تكون الكرية حمراء؟

2- ما هو احتمال أن تكون الكرية بيضاء؟
3- ما هو احتمال أن تكون الكرية سوداء؟

الحل:

أ/ إنجاز جدول التوترات:

اللون	أبيض B	أحمر R	أسود N	أخضر V	المجموع
عدد الكريات	35	40	15	10	100
التواتر f_i	$\frac{35}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{10}{100}$	1

ب/ نسحب إحدى الكريات بصفة عشوائية، إذن: $\boxed{\Omega = \{B; R; N; V\}}$.

1- احتمال أن تكون الكرية حمراء هو $\frac{40}{100}$.
2- احتمال أن تكون الكرية بيضاء هو $\frac{35}{100}$.
3- احتمال أن تكون الكرية سوداء هو $\frac{15}{100}$.

توزيع التوترات في الجدول يُمثل **قانون احتمال تجربة عشوائية.**

قانون الاحتمال:

عند القيام بدراسة لمجتمع نتحصل على توزيع التواترات لكل النتائج الممكنة، نقبل أنّه إذا سحبنا بصفة عشوائية أحد أفراد المجتمع فإنّ توزيع التواترات يُمثل **قانون الاحتمال لتجربة عشوائية** وأنّه من أجل كل نتيجة e_i فإنّ: $\boxed{p_i = f_i}$.

تعريف

لتكن Ω مجموعة ذات n إمكانية لتجربة عشوائية: $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; ...; e_n\}$.
يُعرّف قانون احتمال P على Ω، بإرفاق كل إمكانية e_i بعدد موجب p_i حيث مجموع الأعداد p_i يساوي 1.

e_1	e_2	e_3	...	e_n	المجموع
p_1	p_2	p_3	...	p_n	1

مع $0 \leq p_i \leq 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ملاحظات:

- **نمذجة تجربة عشوائية** يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω وقانون احتمال P على Ω.
- يسمى العدد p_i **احتمال** تحقق المخرج e_i (احتمال تحقق الحادثة البسيطة $\{e_i\}$)، نكتب: $\boxed{p_i = P(e_i) = P(\{e_i\})}$.

مثال:

- العدد p_2 هو احتمال وقوع الإمكانية e_2.
- وفي النشاط السابق: العدد $\frac{10}{100}$ هو احتمال وقوع الحادثة "سحب كرية خضراء"، أي: $\boxed{p_4 = \frac{10}{100}}$ هو احتمال وقوع الحادثة البسيطة $\{V\}$.

تمرين تطبيقي رقم 01:

يُمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ ثانوية ما، حسب الجنس وسنة التمدرس.

المستوى / الجنس	1 ثا	2 ثا	3 ثا	المجموع
الذكور %	23	14	11	48
إناث %	19	17	16	52
المجموع	42	31	27	100

1- نختار تلميذا واحدا بصفة عشوائية، ما هو احتمال أن يكون: - ذكرا، - تلميذا في السنة الثالثة، - ذكرا في السنة الثانية.
2- نختار بنتا واحدة بصفة عشوائية، ما هو احتمال أن تكون تلميذة من السنة الأولى.

3- نختار تلميذا واحدا من السنة الأولى بصفة عشوائية، ما هو احتمال أن يكون أنثى؟

الحل:

1- **نختار تلميذا واحدا بصفة عشوائية،**

- احتمال أن يكون التلميذ المختار، ذكرا هو $\boxed{\frac{48}{100}}$.
- احتمال أن يكون التلميذ المختار، تلميذا في السنة الثالثة هو $\boxed{\frac{27}{100}}$.
- احتمال أن يكون التلميذ المختار، ذكرا في السنة الثانية هو $\boxed{\frac{14}{100}}$.

2- **نختار بنتا واحدة بصفة عشوائية،** احتمال أن تكون تلميذة من السنة الأولى هو $\boxed{\frac{19}{52}}$.

3- **نختار تلميذا واحدا من السنة الأولى بصفة عشوائية،** احتمال أن يكون أنثى هو $\boxed{\frac{19}{42}}$.

تمرين 13 ص390: (لا يُكتب على الكراس)

زهرة نرد وجوهها مرقمة من 1 إلى 6، احتمال ظهور الوجوه الست يُحقق العلاقة: $P(1)=P(2)=2P(3)=3P(4)=P(5)=P(6)$
احسب احتمال ظهور كل وجه.

الحل:

حساب احتمال ظهور كل وجه:

نعلم أنّ: $\boxed{P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1}$، ومنه: $P(1)+P(1)+\frac{1}{2}P(1)+\frac{1}{3}P(1)+P(1)+P(1)=1$

وعليه: $\frac{6+6+3+2+6+6}{6}P(1)=1$،

وبالتالي: $\frac{29}{6}P(1)=1$،

إذن: $\boxed{P(1)=\frac{6}{29}}$، $\boxed{P(2)=\frac{6}{29}}$، $\boxed{P(3)=\frac{3}{29}}$، $\boxed{P(4)=\frac{2}{29}}$، $\boxed{P(5)=\frac{6}{29}}$ و $\boxed{P(6)=\frac{6}{29}}$.

تم بحمد الله.

بسم الله الرحمن الرحيم

يوم: .

الموضوع: تساوي الاحتمال.

① تعريف:

لتكن Ω مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية. إذا كان، **لكل الإمكانيات نفس احتمال الظهور (لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال)**، نقول أنّ **قانون الاحتمال متساوي التوزيع أو متساوي الاحتمال.**

بمعنى: إذا كان n عدد عناصر Ω، فإنّ احتمال وقوع كل عنصر e_i من Ω هو: $\boxed{p_i=P(e_i)=P(\{e_i\})=\frac{1}{n}}$.

ملاحظة: بعض التعابير تدل على وضعية متساوية الاحتمال:

- نختار **بصفة عشوائية.**
- نرمي قطعة نقدية **متوازنة.**
- نرمي زهر نرد **غير مزيف.**
- القريصات أو الكريات الموجودة داخل الكيس **لا نفرق بينها عند اللمس.**

أمثلة:

- عند رمي قطعة نقدية **متوازنة**، فإنّ احتمال ظهور الوجه أو الظهر يساوي $\frac{1}{2}$.

■ عند رمي زهر النرد ذي 6 أوجه **غير مزيف**، فإنّ احتمال الحصول على أحد الأوجه هو $\frac{1}{6}$.

② نظرية:

في حالة **قانون متساوي الاحتمال** على مجموعة Ω وَإذا كانت A حادثة من Ω، فإنّ **احتمال** A يساوي حاصل قسمة عدد عناصر A على عدد عناصر Ω.

أي: إذا كان a عدد عناصر A وَn عدد عناصر Ω، فإنّ: $\boxed{P(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}=\frac{a}{n}}$.

ملاحظات:

■ نسمي عناصر الحادثة A **الحالات المواتية** (أو الملائمة) لهذه الحادثة، وعناصر Ω **الحالات الممكنة**.

■ تسمى النظرية السابقة أيضا **قانون لبلاس (Laplace)**.

تمرين 17 ص390: (لا يُكتب على الكراس)

نرمي ثلاث قطع نقدية مرقمة 1، 2، 3. نسجل النتائج على شكل ثلاثية (مثال PFP: القطعة 1 ظهر، القطعة 2 وجه، القطعة 3 ظهر).

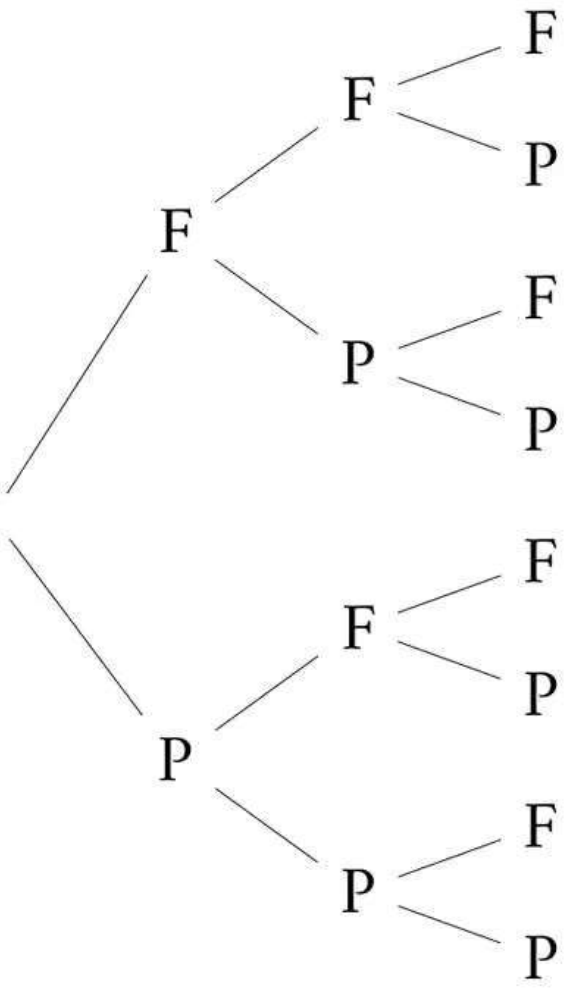
1) مثّل النتائج بمخطط أو شجرة.

2) ما هو عدد كل الإمكانيات؟

3) لماذا كل الإمكانيات متساوية الاحتمال؟ احسب احتمال كل إمكانية.

الحل:

1) تمثيل النتائج بمخطط أو شجرة:



2) عدد كل الإمكانيات هو 8.

3) الإمكانيات متساوية الاحتمال، لأن $p(F)=p(P)=\frac{1}{2}$، واحتمال كل إمكانية هو $\boxed{\frac{1}{8}}$.

تمرين 18 ص390: (لا يُكتب على الكراس)
يحتوي كيس على 3 كرات بيضاء، 4 كرات خضراء و3 كرات صفراء. نسحب عشوائيا كرة من الكيس.
هل يوجد تساوي احتمال إذا كانت مجموعة الإمكانيات Ω هي: 1) $\Omega = \{B; V; J\}$؟ 2) Ω هي الكرات العشر؟

الحل:
1) إذا أخذنا المجموعة الشاملة $\Omega = \{B; V; J\}$، فإنّ المخارج B، V وJ ليس لهم نفس الاحتمال، لأن $p(B) = \frac{3}{10}$، $p(V) = \frac{4}{10}$ و$p(J) = \frac{3}{10}$.
2) لكن لو اعتبرنا المجموعة الشاملة Ω هي الكرات العشر، تُصبح المخارج متساوية الاحتمال.

تم بحمد الله.

بسم الله الرحمن الرحيم

يوم: .

الموضوع: احتمال حادثة -خواص الاحتمالات.

① احتمال حادثة:

تعريف:
لتكن Ω مجموعة نتائج تجربة عشوائية مرفقة بقانون احتمال P وA حادثة. **احتمال الحادثة** A هو مجموع احتمالات إمكانيات هذه الحادثة.

أمثلة:
■ إذا كان $P(\{a\}) = 0,2$ و$P(\{b\}) = 0,1$، فإنّ: $\boxed{P(\{a; b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = 0,2 + 0,1 = 0,3}$.
■ النتائج المحصل عليها بعد رمي زهر نرد مزيف عددا كبيرا من المرات، سمحت باقتراح قانون الاحتمال المعرف كما يلي:

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

احتمال الحصول على رقم زوجي يساوي: $\boxed{P(\{2; 4; 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1+4+3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}}$.

② خواص الاحتمالات:

❶ بما أنّ الاحتمال $P(A)$ لحادثة A هو مجموع جزئي للاحتمالات p_i والمجموع الكلي لهذه الاحتمالات يساوي 1، فإنّ $P(A)$ هو عدد محصور بين 0 و1: $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$.
❷ احتمال الحادثة المستحيلة معدوم: $\boxed{P(\varnothing) = 0}$.
❸ احتمال الحادثة الأكيدة يساوي 1: $\boxed{P(\Omega) = 1}$.
❹ إذا كان A وB حادثين من نفس المجموعة Ω، فإنّ: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.
ملاحظة: إذا كانت الحادثتان A وB غير متلائمتين (منفصلين)، فإنّ: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ (لأنّ: $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$).
❺ A حادثة من المجموعة Ω و$\overline{A}$ الحادثة العكسية لها، في هذه الحالة يكون: $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.
البرهان: بما أنّ $\overline{A}$ عكسية للحادثة A، فإنّ: $\begin{cases} A \cap \overline{A} = \varnothing \\ A \cup \overline{A} = \Omega \end{cases}$،
ومنه: $\begin{cases} P(A \cap \overline{A}) = P(\varnothing) = 0 \\ P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1 \end{cases}$، وعليه: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$، إذن: $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.
❻ إذا كانت الحادثة A جزءا من الحادثة B $(A \subset B)$، فإن: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$.

أمثلة:

■ نعتبر حادثتين A وB حيث: $P(A\cup B)=0,78$، $P(B)=0,54$، $P(A\cap B)=0,235$.

لنحسب $P(A)$:

لدينا: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$، ومنه: $P(A)=P(A\cup B)-P(B)+P(A\cap B)=0,78-0,54+0,235=0,475$.

■ نعتبر حادثتين A وB حيث: $P(A\cup B)=0,257$، $P(A)=0,158$، $P(A\cap B)=0,125$.

لنحسب $P(\overline{B})$: (أولا نحسب $P(B)$)

لدينا: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$، ومنه: $P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=0,257-0,158+0,125=0,224$،

إذن: $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,224=0,776$.

■ ليكن قانون الاحتمال P المعرّف على Ω. نعتبر حادثتين غير متلائمتين A وB حيث: $P(A)=0,23$ و$P(B)=0,38$.

1) لنحسب $P(\overline{A})$ و$P(\overline{B})$: لدينا: $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,23=0,77$، ولدينا: $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,38=0,62$.

2) لنعين $P(A\cap B)$ و$P(A\cup B)$: لدينا: $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$، ولدينا: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,23+0,38=0,61$.

③ الأمل الرياضياتي، التباين والإنحراف المعياري لمتغير عشوائي:

تعاريف:

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية (نعتبر هذه النتائج أعدادا حقيقية)، $\Omega=\{e_1;e_2;e_3;...;e_n\}$. ليكن P احتمالا على Ω، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $P(e_i)$.

✍ **أمل قانون الاحتمال** هو العدد E حيث $\boxed{E=\sum_{i=1}^{n}e_ip_i}$.

✍ **تباين قانون الاحتمال** هو العدد V حيث $\boxed{V=\sum_{i=1}^{n}(e_i-E)^2p_i=\left(\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2p_i\right)-E^2}$.

✍ **الانحراف المعياري لقانون الاحتمال** هو العدد $\boxed{\sigma=\sqrt{V}}$.

ملاحظة: الأمل يُمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا أنّ قيم الطبع هي عناصر Ω والتواترات النظرية هي القيم p_i.

تم بحمد الله.

بسم الله الرحمن الرحيم

يوم: .

الموضوع: **المتغير العشوائي.**

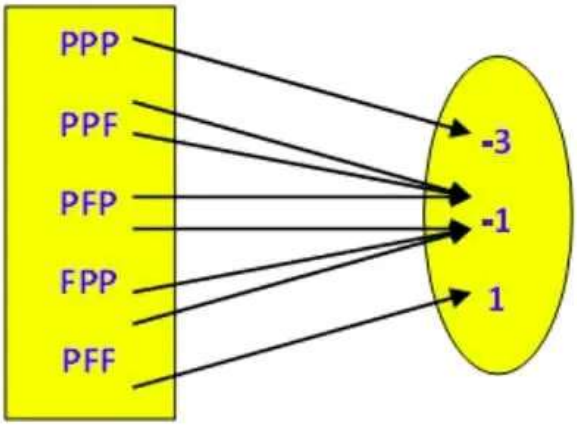
نشاط تمهيدي:

نرمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات متتابعة، ونسجل النتيجة "وجه=F"، "ظهر=P"،

1) مجموعة المخارج هي $\Omega=\{FFF;FFP;FPF;FPP;PFF;PFP;PPF;PPP\}$.

2) نعتبر اللعبة التالية: "يربح اللاعب دينارا واحدا كلما ظهر (وجه F)، ويخسر دينارا واحدا كلما ظهر (ظهر P).

■ نعتبر الدّالة X التي تُرفق بكل نتيجة الربح (أو الخسارة) المناسب لها. يسمى X **المتغير العشوائي** المُعرف على Ω.



❑ "تكون الخسارة 3 دنانير"، مثلا: نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة $(X=-3)$، تحقق هذه الحادثة لما تحقق الحادثة A حيث: $A=\{PPP\}$،
لكن: $P(A)=\frac{1}{8}$، نكتب عندئذ: $\boxed{P(X=-3)=\frac{1}{8}}$.

❑ "تكون الخسارة دينارا واحدا"، مثلا: نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة $(X=-1)$، تحقق هذه الحادثة لما تحقق الحادثة B حيث: $B=\{FPP;PFP;PPF\}$،
لكن: $P(B)=\frac{3}{8}$، نكتب عندئذ: $\boxed{P(X=-1)=\frac{3}{8}}$.

❑ "يكون الربح دينارا واحدا"، مثلا: نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة $(X=+1)$، تحقق هذه الحادثة لما تحقق الحادثة C حيث: $C=\{FPF;FFP;PFF\}$،
لكن: $P(C)=\frac{3}{8}$، نكتب عندئذ: $\boxed{P(X=+1)=\frac{3}{8}}$.

❑ "يكون الربح 3 دنانير"، مثلا: نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة $(X=+3)$، تحقق هذه الحادثة لما تحقق الحادثة D حيث: $D=\{FFF\}$،
لكن: $P(D)=\frac{1}{8}$، نكتب عندئذ: $\boxed{P(X=+3)=\frac{1}{8}}$.

■ القيم -3، -1، $+1$ و$+3$ تسمى قيم المتغير العشوائي X، نكتب: $\boxed{X\in\{-3;-1;+1;+3\}}$.

نُلخص النتائج في جدول (الجدول يُمثل قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X):

القيم x_i	-3	-1	$+1$	$+3$	المجموع
$p_i=P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

3) ✍ **الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X، يُرمز له بـ$E(X)$ حيث:**

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=(-3)\times\frac{1}{8}+(-1)\times\frac{3}{8}+(+1)\times\frac{3}{8}+(+3)\times\frac{1}{8}=\frac{0}{8}=0.$$

✍ **التباين للمتغير العشوائي X، يُرمز له بـ$V(X)$ حيث:**

$$V(X)=\left(\sum_{i=1}^{4}{x_i}^2p_i\right)-[E(X)]^2=\left((-3)^2\times\tfrac{1}{8}+(-1)^2\times\tfrac{3}{8}+(+1)^2\times\tfrac{3}{8}+(+3)^2\times\tfrac{1}{8}\right)-(0)^2=\tfrac{24}{8}=3.$$

✍ **الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X، يُرمز له بـ$\sigma(X)$ حيث:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3}\simeq 1,73$.

① المتغير العشوائي:

تعريف:

Ω المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية . نسمي متغيرا عشوائيا كل دّالة عددية معرّفة على Ω.

② قانون الإحتمال لمتغير عشوائي:

تعريف:

قانون إحتمال لمتغير عشوائي X هو الدّالة المعرّفة على I (مجموعة قيم X) والتي تُرفق بكل قيمة من I العدد $P(X=x_i)$.

ملاحظة: قانون إحتمال متغير عشوائي X، يُعطى على شكل جدول كما يلي:

القيم x_i	x_1	x_2	...	x_n	المجموع
الإحتمال $p_i=P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

مع $0\le p_i\le 1$ و$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

③ الأمل الرياضياتي، التباين والإنحراف المعياري لقانون الاحتمال:

تعاريف:

ليكن X متغير عشوائي، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $P(X=x_i)$.

✍ **الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي** X هو العدد $E(X)$ حيث $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$.

✍ **تباين المتغير العشوائي** X هو العدد $V(X)$ حيث $\boxed{V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x))^2 p_i=\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i\right)-[E(x)]^2}$.

✍ **الانحراف المعياري للمتغير العشوائي** X هو العدد $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$.

تمرين 45 ص390: (لا يُكتب على الكراس)

صندوق يحتوي على كرة حمراء، كرتين بيضاوين وثلاث كرات سوداء. نسحب عشوائياً كرتين على التوالي. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

1) عيّن قانون احتمال المتغير X.

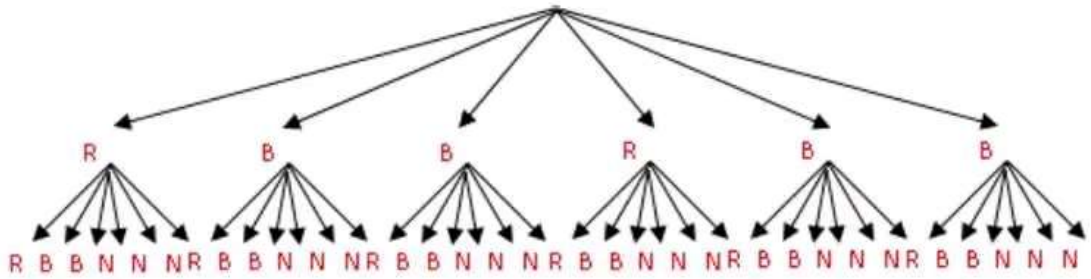
2) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

3) احسب تباين المتغير X.

الحل:

صندوق يحتوي على كرة حمراء، كرتين بيضاوين وثلاث كرات سوداء. نسحب عشوائياً كرتين على التوالي. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة، نُميز حالتين.

الحالة ❶: (بإعادة الكرة) لدينا:



1) تعيين قانون احتمال المتغير X:

لدينا: $\boxed{X\in\{0;1;2\}}$.

2) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

3) احسب تباين المتغير X.

■ الحادثة $(X=0)$، معناه: "عدم ظهور أية كرة بيضاء"، ومنه: $\boxed{P(X=0)=\frac{16}{36}}$.

■ الحادثة $(X=1)$، معناه: "إحدى الكرتين المسحوبتين بيضاء"، ومنه: $\boxed{P(X=1)=\frac{16}{36}}$.

■ الحادثة $(X=2)$، معناه: "الكرتين المسحوبتين بيضاوين"، ومنه: $\boxed{P(X=2)=\frac{4}{36}}$.

وبالتالي:

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{4}{36}$	1

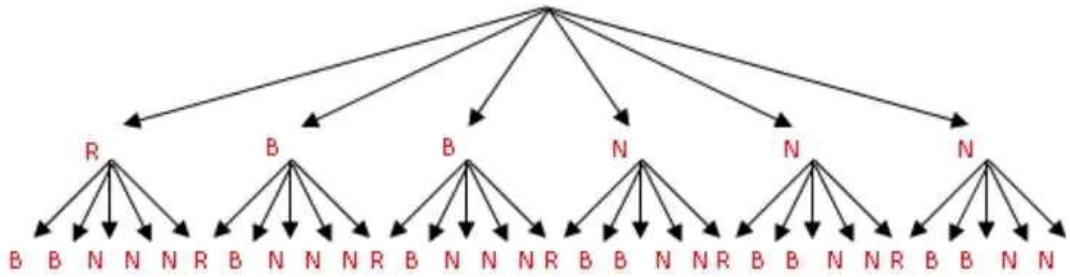
2) حساب الأمل الرياضياتي للمتغير X: لدينا:

$E(X)=$

3) حساب تباين المتغير X: لدينا:

$V(X)=$

الحالة ❷: (بدون إعادة الكرة) لدينا:



1) تعيين قانون احتمال المتغير X:

لدينا: $\boxed{X \in \{0;1;2\}}$.

2) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

3) احسب تباين المتغير X.

■ الحادثة $(X=0)$، معناه: "عدم ظهور أية كرة بيضاء"، ومنه: $\boxed{P(X=0)=\frac{12}{30}}$.

■ الحادثة $(X=1)$، معناه: "إحدى الكرتين المسحوبتين بيضاء"، ومنه: $\boxed{P(X=1)=\frac{16}{30}}$.

■ الحادثة $(X=2)$، معناه: "الكرتين المسحوبتين بيضاوين"، ومنه: $\boxed{P(X=2)=\frac{2}{30}}$.

وبالتالي:

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{12}{30}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{2}{30}$	1

2) حساب الأمل الرياضياتي للمتغير X: لدينا: $E(X)=$

3) حساب تباين المتغير X: لدينا: $V(X)=$

تمرين: (عمل منزلي)

يرمي شخص زهري نرد ويهتم بالمجموع. يحصل خلالها على دينار واحد إذا كان المجموع مضاعفا لـ3، ودينارين إذا كان المجموع مضاعف لـ5 و3 دنانير إذا كان المجموع يساوي 2. X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح المحتمل.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثمّ احسب الانحراف المعياري.

تمرين 42 و43 ص390: (عمل منزلي)

تم بحمد الله.

ملخص الإحتمالات// التحضير الجيد للبكالوريا// 2 علوم تجريبية؛ 2 تقني رياضي.

محاكاة تجربة عشوائية -مفردات الاحتمالات.

مصطلحات:

■ نسمي **تجربة عشوائية** كل تجربة لا يُمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة.

✍ في تجربة عشوائية، **مجموعة النتائج الممكنة** تسمى **مجموعة الإمكانيات** أو **مجموعة المخارج** ويُرمز لها بالرمز Ω.

✍ ليكن A جزءً من Ω، نقول عندئذٍ أنّ A **حادثة** (أو **حدث**).

■ إذا احتوت المجموعة الجزئية A على **عنصر وحيد** فإنّها تدعى **حادثة أولية** (أو **بسيطة**).

■ Ω هي **الحادثة الأكيدة** و$\varnothing$ هي **الحادثة المستحيلة**. ($\varnothing$ الجزء الخالي)

■ إذا كانت A حادثة ما فإنّ **حادثتها العكسية** يرمز لها بـ $\overline{A}$ وهي التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A.

■ لتكن A وB حادثتين. نرمز بـ$A\cap B$ للحادثة "A وB" وهي التي تحوي العناصر المشتركة بين A وB.

✍ إذا كانت $A\cap B$ خالية، أي: $A\cap B=\varnothing$ نقول عندئذٍ أنّ الحادثتين A وB **غير متلائمتين** (**منفصلتين**).

■ نرمز بـ$A\cup B$ للحادثة "A أوB" وهي التي تحوي عناصر A وعناصر B أيضا.

قانون الاحتمال.

قانون الاحتمال:

عند القيام بدراسة لمجتمع نتحصل على توزيع التواترات لكل النتائج الممكنة، نقبل أنّه إذا سحبنا بصفة عشوائية أحد أفراد المجتمع فإنّ توزيع التواترات يُمثل **قانون الاحتمال لتجربة عشوائية** وأنّه من أجل كل نتيجة e_i فإنّ: $\boxed{p_i = f_i}$.

تعريف

لتكن Ω مجموعة ذات n إمكانية لتجربة عشوائية: $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; ...; e_n\}$.
يُعرّف قانون احتمال P على Ω، بإرفاق كل إمكانية e_i بعدد موجب p_i حيث مجموع الأعداد p_i يساوي 1.

e_1	e_2	e_3	...	e_n	المجموع
p_1	p_2	p_3	...	p_n	1

مع $0 \leq p_i \leq 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ملاحظات:

- نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω وقانون احتمال P على Ω.
- يسمى العدد p_i **احتمال** تحقق المخرج e_i (احتمال تحقق الحادثة البسيطة $\{e_i\}$)، نكتب: $\boxed{p_i = P(e_i) = P(\{e_i\})}$.

مثال:

- العدد p_2 هو احتمال وقوع الإمكانية e_2.

تساوي الاحتمال.

① تعريف:

لتكن Ω مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية. إذا كان، **لكل الإمكانيات نفس احتمال الظهور (لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال)**، نقول أنّ **قانون الاحتمال متساوي التوزيع أو متساوي الاحتمال.**

بمعنى: إذا كان n عدد عناصر Ω، فإنّ احتمال وقوع كل عنصر e_i من Ω هو: $\boxed{p_i = P(e_i) = P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}}$.

ملاحظة: بعض التعابير تدل على وضعية متساوية الاحتمال:

- نختار **بصفة عشوائية.**
- نرمي قطعة نقدية **متوازنة.**
- نرمي زهر نرد **غير مزيف.**
- القريصات أو الكريات الموجودة داخل الكيس **لا نفرق بينها عند اللمس.**

أمثلة:

- عند رمي قطعة نقدية **متوازنة**، فإنّ احتمال ظهور الوجه أو الظهر يساوي $\frac{1}{2}$.
- عند رمي زهر النرد ذي 6 أوجه **غير مزيف**، فإنّ احتمال الحصول على أحد الأوجه هو $\frac{1}{6}$.

② نظرية:

في حالة **قانون متساوي الاحتمال** على مجموعة Ω وإذا كانت A حادثة من Ω، فإنّ **احتمال** A يساوي حاصل قسمة عدد عناصر A على عدد عناصر Ω.

أي: إذا كان a عدد عناصر A و n عدد عناصر Ω، فإنّ: $\boxed{P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{a}{n}}$.

ملاحظات:

■ نسمي عناصر الحادثة A **الحالات المواتية** (أو الملائمة) لهذه الحادثة، وعناصر Ω **الحالات الممكنة**.

■ تسمى النظرية السابقة أيضا **قانون لبلاس (Laplace)**.

احتمال حادثة - خواص الاحتمالات.

① احتمال حادثة:

تعريف:

لتكن Ω مجموعة نتائج تجربة عشوائية مرفقة بقانون احتمال P وA حادثة. **احتمال الحادثة** A هو مجموع احتمالات إمكانيات هذه الحادثة.

مثال:

■ إذا كان $P(\{a\}) = 0,2$ و$P(\{b\}) = 0,1$، فإنّ: $\boxed{P(\{a;b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = 0,2 + 0,1 = 0,3}$.

② خواص الاحتمالات:

❶ $P(A)$ هو عدد محصور بين 0 و1: $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$.

❷ احتمال الحادثة المستحيلة معدوم: $\boxed{P(\varnothing) = 0}$.

❸ احتمال الحادثة الأكيدة يساوي 1: $\boxed{P(\Omega) = 1}$.

❹ إذا كان A وB حادثتين من نفس المجموعة Ω، فإنّ: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

ملاحظة: إذا كانت الحادثتان A وB غير متلائمتين (منفصلين)، فإنّ: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ (لأنّ: $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$).

❺ A حادثة من المجموعة Ω و$\overline{A}$ الحادثة العكسية لها، في هذه الحالة يكون: $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

❻ إذا كانت الحادثة A جزءا من الحادثة B $(A \subset B)$، فإن: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$.

③ الأمل الرياضياتي، التباين والإنحراف المعياري لقانون الاحتمال:

تعاريف:

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية (نعتبر هذه النتائج أعدادا حقيقية)، $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; ...; e_n\}$. ليكن P احتمالا على Ω، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $P(e_i)$.

✍ **أمل قانون الاحتمال** هو العدد E حيث $\boxed{E = \sum_{i=1}^{n} e_i p_i}$.

✍ **تباين قانون الاحتمال** هو العدد V حيث $\boxed{V = \sum_{i=1}^{n} (e_i - E)^2 p_i = \left(\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 p_i\right) - E^2}$.

✍ **الانحراف المعياري لقانون الاحتمال** هو العدد $\boxed{\sigma = \sqrt{V}}$.

ملاحظة: الأمل يُمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا أنّ قيم الطبع هي عناصر Ω والتواترات النظرية هي القيم p_i.

المتغير العشوائي.

① المتغير العشوائي:

تعريف:

Ω المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية . نسمي متغيرا عشوائيا كل دّالة عددية معرّفة على Ω.

② قانون الإحتمال لمتغير عشوائي:

تعريف:

قانون إحتمال لمتغير عشوائي X هو الدّالة المعرّفة على I (مجموعة قيم X) والتي تُرفق بكل قيمة من I العدد $P(X = x_i)$.

ملاحظة: قانون إحتمال متغير عشوائي X، يُعطى على شكل جدول كما يلي:

القيم x_i	x_1	x_2	...	x_n	المجموع
الإحتمال $p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

مع $0 \leq p_i \leq 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

③ الأمل الرياضياتي، التباين والإنحراف المعياري لمتغير عشوائي:

تعاريف:

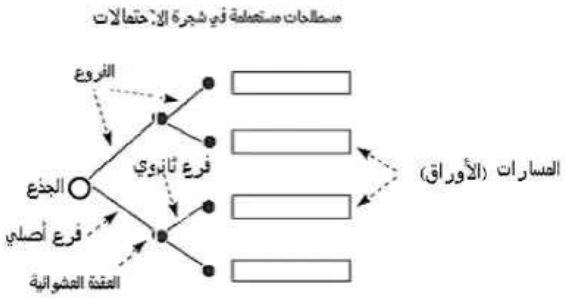
ليكن X متغير عشوائي، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $P(X = x_i)$.

✍ **الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي** X هو العدد $E(X)$ حيث $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$.

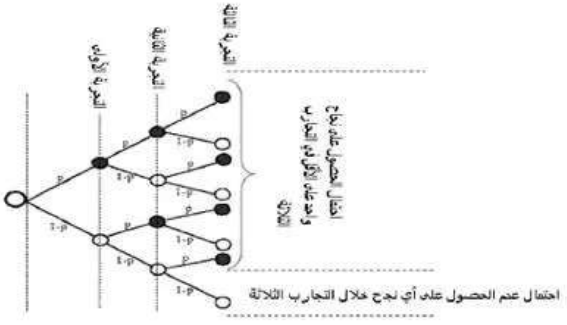
✍ **تباين المتغير العشوائي** X هو العدد $V(X)$ حيث $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 p_i = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i\right) - [E(x)]^2}$.

✍ **الانحراف المعياري للمتغير العشوائي** X هو العدد $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

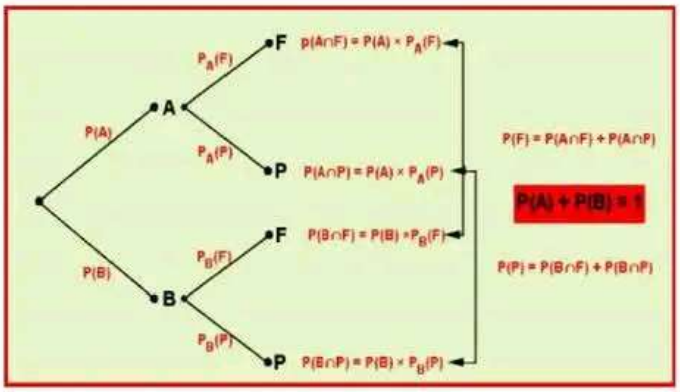
شجرة الإحتمالات.



✍ مبدأ الشجرة أو جدعها هي العقدة الابتدائية التي ينطلق منها المسار أي مبدأ المسار.
✍ غصن ابتدائي هو خط واصل بين الجدع وعقدة ما.
✍ غصن ثانوي هو خط واصل بين عقدتين.
✍ المسار الطريق الواصل بين الجذع وعقدة الوصول.
✍ وزن غصن ابتدائي هو احتمال الحادثة المتواجد عند عقدة هذا الغصن.



✍ وزن غصن ثانوي هو الاحتمال الشرطي للحدث المتواجد عند عقدة النهاية لهذا الغصن، علما أن الطريق الذي يصل هذه العقدة بالجذع (عقدة البداية) قد تحقق.
✍ مجموع أوزان الأغصان المنبثقة من نفس العقدة يساوي الواحد.
✍ احتمال مسار ما يساوي حاصل ضرب أوزان كل الأغصان المؤلفة له.
✍ احتمال حادثة مؤلف من عدة مسارات يساوي مجموع الاحتمالات لكل منها. فيكون احتمال الفشل هو p لدينا تجربة مؤلفة من مخرجين إحداهما نجاح والأخرى فشل. نفرض أن احتمال النجاح هو وعدد p . من شجرة الاحتمالات الممثلة لهذه التجربة يمكن حساب أي حادثة متعلق بالتجربة وذلك عند معرفة $(1 - p)$ مرات تكرار التجربة.



تمارين الإحتمالات// التحضير الجيد للبكالوريا// 2 علوم تجريبية؛ 2 تقني رياضي.

التمرين 01: (بكالوريا 2018/ الموضوع الأوّل/ شعبة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

صندوق به 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس مرقمة من 11 إلى 20، نسحب عشوائيا كرية واحدة.

احتمال الحصول على كرية تحمل عددا مضاعفا لـ3 هو: أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{7}{10}$.

احتمال الحصول على كرية تحمل عددا فرديا ومضاعفا لـ3 هو: أ) $\frac{9}{10}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{1}{10}$.

التمرين 02: (بكالوريا 2020// الموضوع 01// الشعبة: علوم تجريبية)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

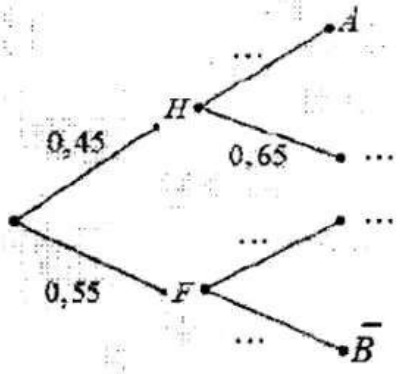
1) قانون احتمال المتغيّر العشوائي X معرّف بالجدول المُقابل:

x_i	-2	0	1	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X هو: أ) $\frac{1}{20}$ ب) $\frac{-1}{10}$ ج) $\frac{-3}{20}$.

التمرين 03: (بكالوريا 2011/ الموضوع الأوّل/ شعبة تسيير وإقتصاد)

يتكوّن مجتمع من 55% نساء و45% رجال، 25% من النساء يتحدثن لغة أجنبية و35% من الرجال يتحدثون أيضا لغة أجنبية.



نختار عشوائيا شخصا من هذا المجتمع ونعتبر الحوادث التالية:

H "رجل"

F "امرأة"

A "رجل يتحدث لغة أجنبية"

B "امرأة تتحدث لغة أجنبية"

1) أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها:

2) احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

أ. "رجلا يتحدث لغة أجنبية"

ب. "امرأة لا تتحدث لغة أجنبية"

ج. "شخصا يتحدث لغة أجنبية"

التمرين 04: (بكالوريا 2011/ الموضوع الثاني/ شعبة تسيير وإقتصاد)

عدد تلاميذ هو 900، يتوزعون حسب المستوى والصنف (داخلي أو خارجي) كما يلي:

المستوى / الصنف	السنة الأولى	السنة الثانية	السنة الثالثة	المجموع
خارجيون	250	200	150	600
داخليون	100	120	80	300

نختار تلميذا بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

1) احتمال أن يكون التلميذ خارجيا.

2) احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى.

3) احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى وخارجيا.