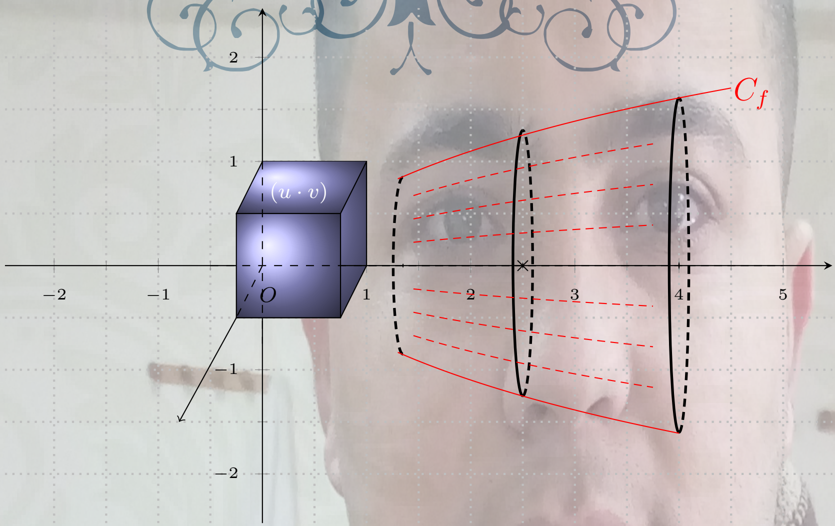
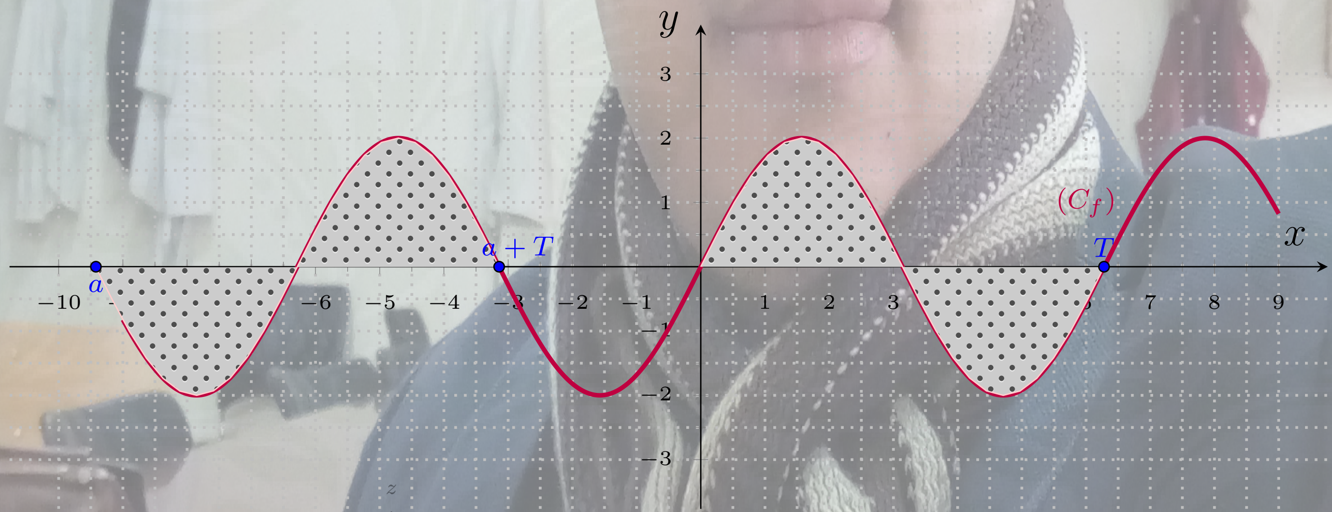
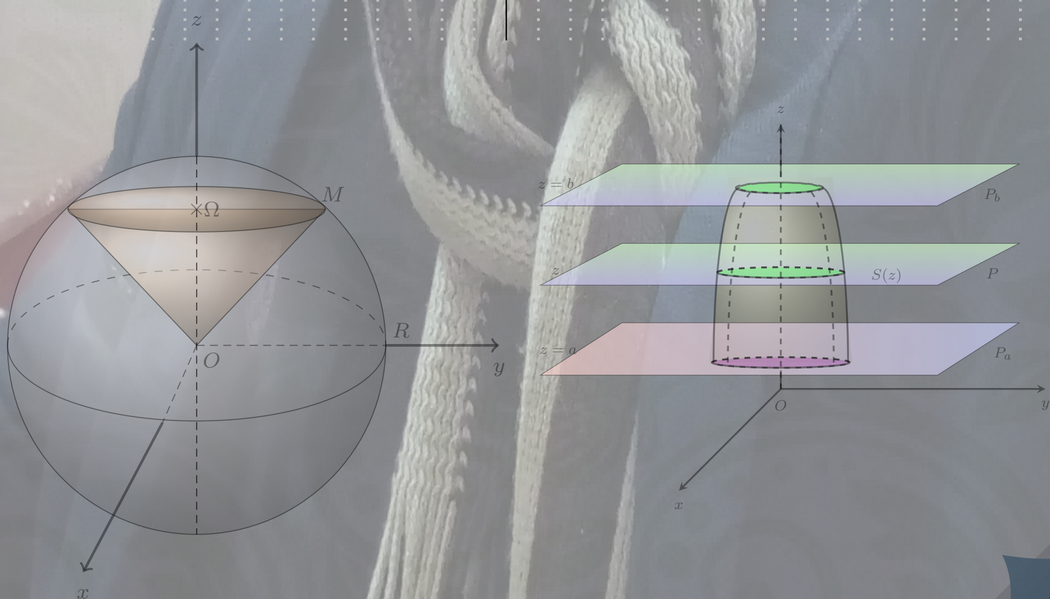
محور حساب التكاملي (9)







الكفاءات المستهدفة

1 توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى

2 إستعمال التكامل بالتجزئة

3 توظيف خواص التكامل لحساب الدوال الأصلية

4 حساب الحجوم لمجسمات بسيطة

5 توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة

ثابت بن قرة .. إقليدس العرب

ولد ثابت بن قرة (سنة 221 هـ = 834 م) في حران من أرض الجزيرة شمال العراق، بتركيا الآن. برع ثابت في علم الهندسة حتى قيل عنه إنه أعظم هندسي عربي على الإطلاق، وقال عنه "يورانت ول": إنه أعظم علماء الهندسة المسلمين؛ فقد ساهم بنصيب وافر في تقدم الهندسة، وهو الذي مهد لإيجاد علم التكامل والتفاضل، كما استطاع أن يحل المعادلات الجبرية بالطرق الهندسية وتمكن من تطوير وتجديد نظرية فيثاغورث، وكانت له بحوث عظيمة وابتكارات رائدة في مجال الهندسة التحليلية؛ فقد ألف كتابا في الجبر، شرح فيه العلاقة بين الجبر والهندسة وكيفية التوفيق بينهما، واستطاع أن يعطي حلولا هندسية لبعض المعادلات التكعيبية وهو ما أفاد علماء الغرب فيما بعد في تطبيقاتهم وأبحاثهم الرياضية في القرن السادس عشر. و يجدر بنا أن نذكر أن ثابت بن قرة مهد لحساب التكامل وذلك عندما وجد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره و حين حل معادلة من الدرجة الثالثة بطريقة هندسية و ذلك في كتابه مدخل إلى كتاب إقليدس.

ومن مؤلفات ثابت الرياضية والهندسية:

- كتاب في الشكل الملقب بالقطاع.
- كتاب في مساحة الأشكال المسطحة والمجسمة.
- كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها.
- مساحة المجسمات المكافية.
- قول في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

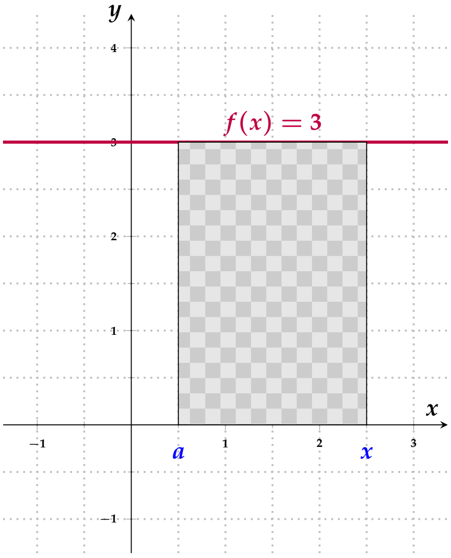
الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : مدخل إلى التكامل

المكتسبات القبليـة : حساب الدوال الأصلية
الكفاءات المستهدفة : حساب مساحات بإستعمال التكامل.
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت
العرض : بجهاز داتاشو

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مـرحلة الإنطلاق		

لنأخذ دالة حقيقية ثابتة منحانها البياني كما في الشكل المقابل



نلاحظ أن مساحة المستطيل الملون في الصورة تساوي الطول في العرض ، نرمز إلى مساحة الشكل بـ $S_a(x)$

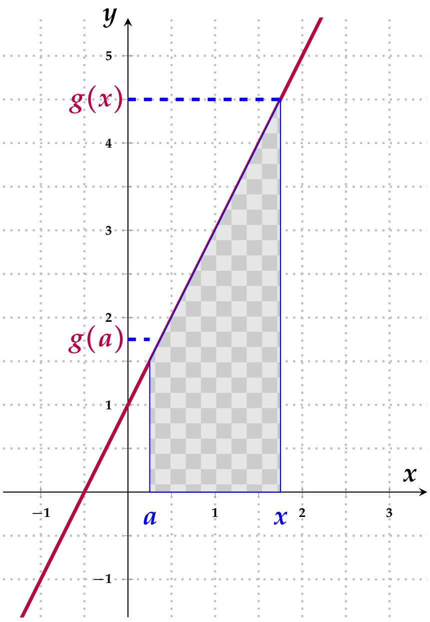
إذن $S_a(x) = 3 \times (x-a) = 3x - 3a$

ولو إشتقنا عبارة المساحة فسنجد :

$S'_a(x) = 3 = f(x)$

لو تأملنا دالة أخرى خطية مثلا كما في المنحى الثاني $g(x) = 2x + 1$

فالمساحة هي مساحة شبه منحرف و تساوي طول الإرتفاع في نصف مجموع طول الضلعين المتوازيين



$$\begin{aligned}
S_a(x) &= (a-x) \times \frac{g(x)+g(a)}{2} \\
&= (a-x) \times \frac{(2x+1+2a+1)}{2} \\
&= (a-x) \times \frac{2x+2a+2}{2} \\
&= (x-a)((x+a)+1) \\
&= x^2 - a^2 + x - a \\
&= x^2 + x - a^2 - a \\
&= x^2 + x - (a^2 + a)
\end{aligned}$$

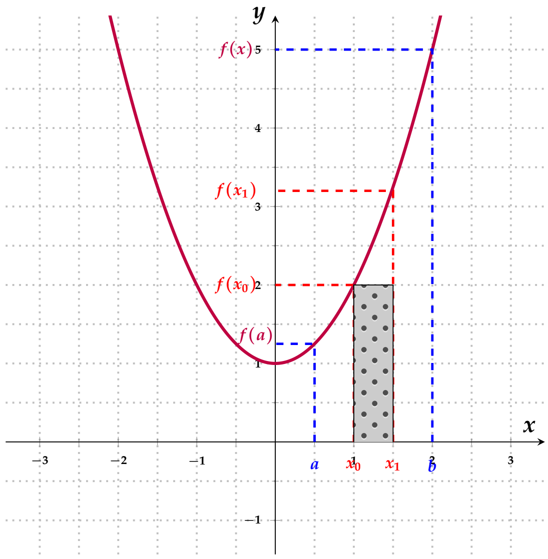
ولو إشتقنا عبارة المساحة فسنجد :

$S'_a(x) = 2x + 1 = g(x)$

نلاحظ أنه يوجد رابط بين المساحة تحت منحنى الدالة و الدالة فكأن مشتقة تساوي الدالة ، لو إعتبرنا دالة F بحيث $F'(x) = f(x)$ فكأن المساحة تكتب العلاقة $S_a(x) = F(x) - F(a)$

وهذا ملاحظ من شكل عبارة المساحة السابقة $S_a(x) = (x^2 + x) - (a^2 + a)$

سنسمي الدالة الدالة F التي مشتقتها f بالدالة الأصلية للدالة f ، في الحقيقة هي مجموعة دوال فنلاحظ الدوال الأصلية للدالة التي عبارتها $f(x) = 3$ هي كل دالة عبارتها من الشكل $F(x) = 3x + c$ حيث C عدد حقيقي ثابت



✍ لنأخذ دالة حقيقية f التي منحناها البياني كما في الصورة
عبارى العدد المشتق عند x_0 تعطى بالعلاقة

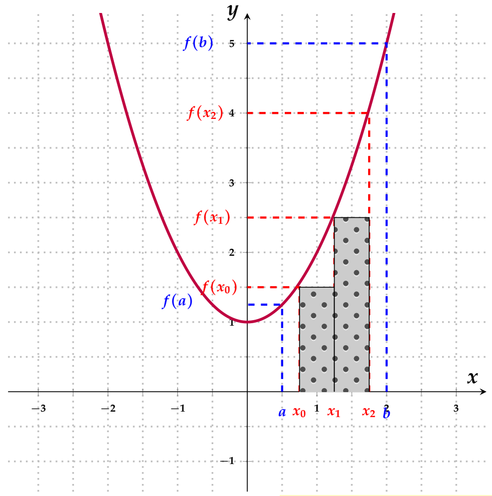
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لو إخترنا نقطة x_1 قريبة جدا من x_0يمكننا أن نكتب

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0)$$

ومنه $f(x_1) - f(x_0) \approx (x_1 - x_0) f'(x_0)$

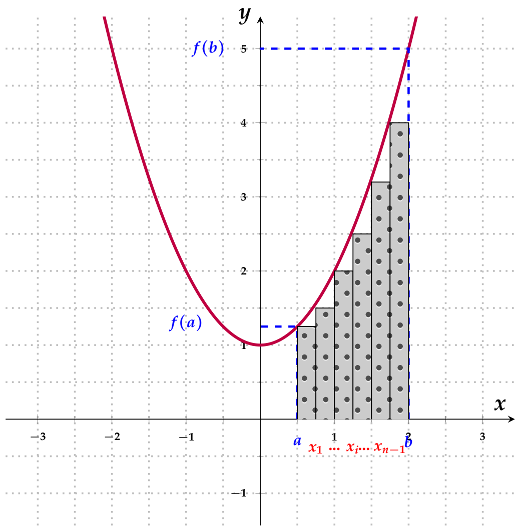
فيمكننا تقريب الدالة بمشتقتها و هذا نسميه التقريب التألفي
لكن ماذا يحدث لو قمنا بالعملية العكسية ؟
لننطلق من الإشتقاق ،فلنعتبر الدالة f
كمشتقة لدالة أخرى F أي $F'(x) = f(x)$
ومنه $F(x_1) - F(x_0) \approx (x_1 - x_0) f(x_0)$



✍ لو تأملنا القيمة اليمنى لهذا التقريب نجدها مساحة المستطيل الملون في المنحنى
و الذي هو محصور بين منحنى الدالة و حامل محور الفواصل
✍ لو أخذنا نقطة أخرى x_2 قريبة جدا من x_1 و كررنا العملية فنجد $F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x_1)$
وهي مساحة مستطيل مجاورة كما في الصورة الثانية
لو جمعنا المساحتين نجد مساحة أكبر محصورة بين منحنى الدالة و حامل محور الفواصل و هي توافق الجمع بين العلاقتين السابقتين

$$F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \approx (x_2 - x_1) f'(x_1) + (x_1 - x_0) f'(x_0)$$

ومنه $F(x_2) - F(x_0) \approx (x_2 - x_1) f'(x_1) + (x_1 - x_0) f'(x_0)$



✍ ماذا يحدث لو قسمنا المجال $[a;b]$ على n جزء و كررنا هذه العملية عند كل نقطة من هذا المجال ؟
a ، x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_{n-1} ، b
لو قسمنا المجال $[a;b]$ على n جزء و كررنا هذه العملية عند كل نقطة من هذا المجال فسنجد المساحة الدرجية الملونة و التي تكاد تكون المساحة المحصورة بين المنحنى و حامل محور الفواصل و التي نجد تقريبا لها بجمع جميع التقريبات التألفية كما فعلنا سابقا
سنسمي هذه المساحة بـ $S_{a;b}$

إذن

$$F(b) - F(a) \approx (b - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) f'(x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - a) f'(a) \approx S_{a;b}$$

بما أننا قسمنا المجال على n جزء فسنحصل على أجزائها طولها متساوي و نرمز له بـ Δx

$$\begin{aligned} F(b) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_1) - F(x_a) \\ \approx \Delta x f'(x_{n-1}) + \Delta x f'(x_{n-2}) + \cdots + \Delta x f'(a) \\ \approx S_{a;b} \end{aligned}$$

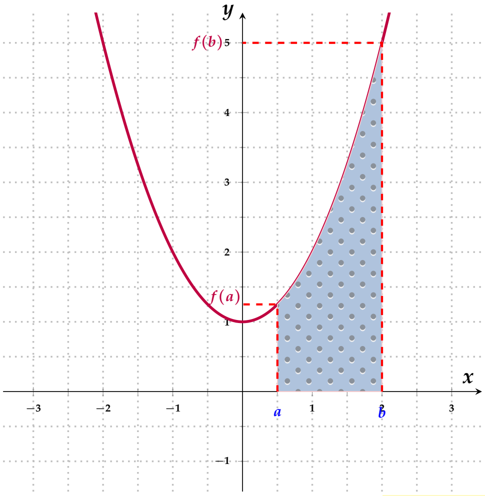
سنستعمل رمز المجموع للتعبير عن هذا المجموع $F(b) - F(a) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x f(x_i) \approx \sum_{i=}^{n-1} f(x_i) \Delta x \approx S_{a;b}$

✍ في الحقيقة لو جعلنا n كبيرا جدا سنقترب إلى المساحة المحصورة بين المنحنى و حامل محور الفواصل بمعنى أخر المسافة بين النقاط أي كل جزء Δx تقترب من الصفر

$$F(b)-F(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{a}^{b} f(x_i)\Delta x = S_{a;b}$$

نسمي هذا المجموع تكامل الدالة f

أول من وضع قواعد هذه الحسابات هو الرياضي ليبنيز **1682** و قدر رمز للمجموع بالرمز $\int$ و هو S كبير رمزا للمجموع بالاتينية $SOMME$ ، بما أن Δ يؤول إلى الصفر فسنرمز له بـ dx



ونعيد كتابة العلاقة السابقة كالتالي : $F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)dx = S_{a;b}$

نلاحظ أن تكامل الدالة f على المجال $[a;b]$ يعبر عن المساحة بين المنحنى و حامل محور الفواصل

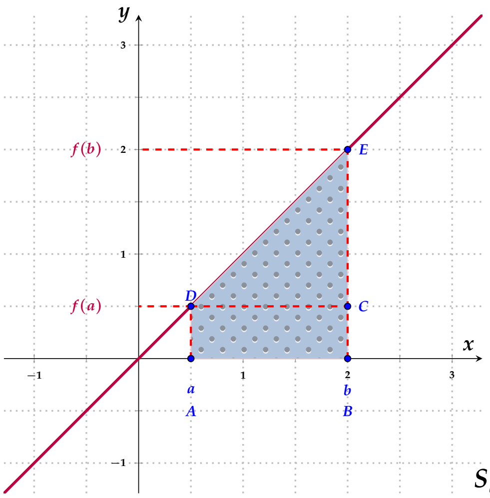
الدالة F تسمى الدالة الأصلية للدالة f أي $F'(x)=f(x)$

إذن تكامل الدالة f على المجال $[a;b]$ يساوي الفارق بين قيمتي الدالة الأصلية F عند a ، b

مثال 1

نأخذ المستقيم المعرف بالدالة $f(x)=x$ لنحاول حساب المساحة المحصورة بين المنحنى و حامل محور الفواصل في المجال $[a;b]$ بطريقتين بالقواعد الهندسية و بالتكامل

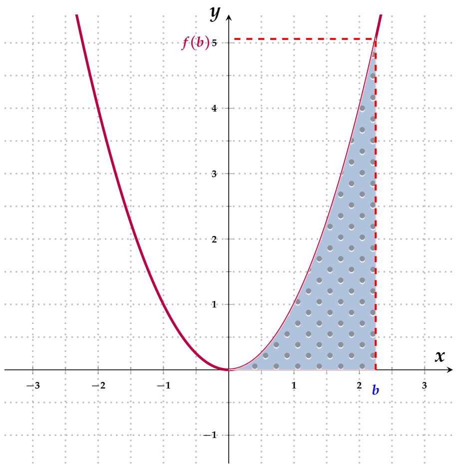
$$\begin{aligned}
S_{a,b} &= \text{مساحة DCE} + \text{مساحة ABCD}\\
&=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot CE + AB\cdot BC\\
&=\frac{1}{2}(b-a)(f(b)-f(a))+(b-a)f(a)\\
&=\frac{1}{2}(b-a)(b-a)+(b-a)a\\
&=\frac{1}{2}(b-a)((b-a)+2a)\\
&=\frac{1}{2}(b-a)(b+a)
\end{aligned}$$



بالتكامل :

نختار الدالة الأصلية : $F(x)=\frac{1}{2}x^2$

إذن $S_{a,b}=\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{b} xdx = F(b)-F(a) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(b-a)(b+a)$



مثال 2

$f(x)=x^2$

لنحاول حساب المساحة المحصورة بين المنحنى و حامل محور الفواصل

نختار الدالة الأصلية $F(x)=\frac{1}{3}x^3$

$$S_{0,b}=\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{0}^{b} x^2dx = F(b)-F(0)=\frac{1}{3}b^2$$

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حساب التكاملي

المكتسبات القبليـة : الدوال الأصلية
الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		

نشاط أول صفحة 166

الجزء الأول

نزود المستوي في كل ما سيأتي بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ حيث وحدة الأطوال هي $1cm$

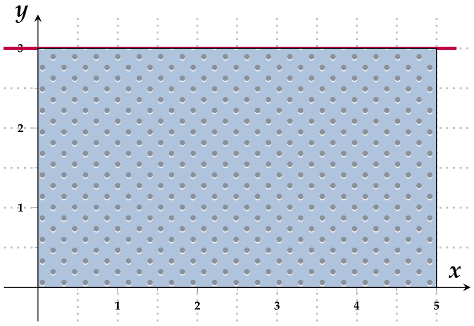
1 نعتبر الدالة f_1المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f_1(x) = 3$ و ليكن (C_1) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$

نرمز بـِ A_1 إلى مساحة الحيز الملون تحت المنحني (C_1) بين العددين0و5

◁ أحسب بـ cm^2 المساحة A_1

◁عين دالة أصلية F_1 للدالة f_1 على $\mathbb{R}$

◁أحسب $F_1(5) - F_1(0)$



2 نعتبر الدالة f_2 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_2(x) = -x + 3$

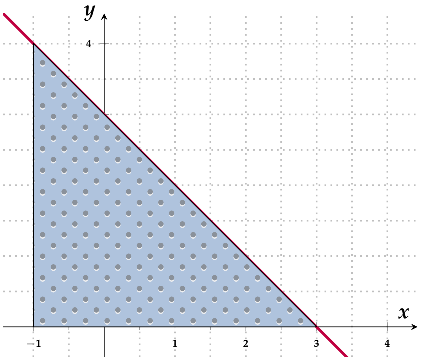
و ليكن (C_2) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$

نرمز بـِ A_2 إلى مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_2)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 3$

◁أحسب بـ cm^2 المساحة A_2

•عين دالة أصلية F_2 للدالة f_2 على $\mathbb{R}$

◁أحسب $F_2(3) - F_2(-1)$



3 نعتبر الدالة f_3 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(_3(x) = \frac{3}{2}x$.

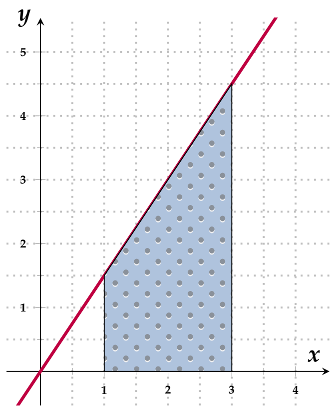
و ليكن (C_3) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$

نرمز بـ A_3 إلى مساحة الحيز مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث $1 \leq x \leq 3$ و $0 \leq y \leq f_3(x)$

◁أحسب بـ cm^2 المساحة A_3

◁ عيّن دالة أصلية F_3 للدالة f_3 على $\mathbb{R}$

◁ أحسب $F_3(1) - F_3(3)$



4 ماذا تلاحظ في حالتين؟ ضع تخمينا

مرحلة بـنـاء المعارف

حـل الجزء الأول

1 ◁ $A_1 = 3 \times 5 = 15cm^2$

◁ نختار دالة أصلية المعرفة بـ $F_1(x) = 3x$

◁ $F_1(5) - F_2(0) = 15 - 0 = 15$

2 ◁ $A_2 = (4 \times 4)\dfrac{1}{2} = 8cm^2$

◁ نختار دالة أصلية المعرفة بـ $F_2(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$

◁ $F_2(3) - F_1(-1) = \dfrac{9}{2} - \dfrac{-7}{2} = \dfrac{9+7}{2} = 8$

3 ◁ $A_3 = [(4.5 + 1.5) \times 2]\dfrac{1}{2} = 6cm^2$

◁ نختار دالة أصلية المعرفة بـ $F_3(x) = \dfrac{3}{4} \cdot x^2$

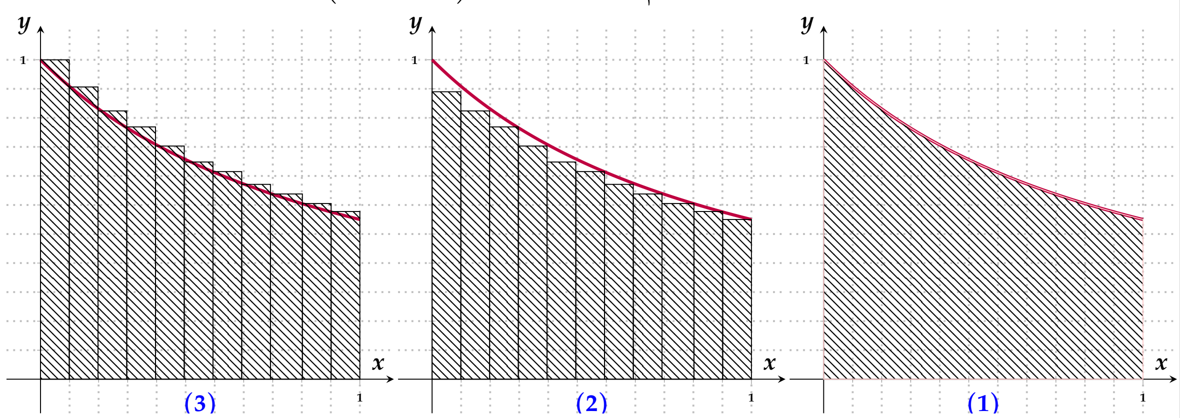
◁ $F_3(1) - F_1(3) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{27}{4} = \dfrac{3-27}{4} = 6$

4 مما سبق نخمن أن: $A = |F(a) - F(b)|$ حيث A مساحة الحيز المحصور بالمنحنى دالة f وحامل محور الفواصل و المستقمين ذي المعادلة $x = a$ و$x = b$ و F دالة أصلية لها

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$



1 هل يمكن، بإستعمال قاعدة في الهندسة ،حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل (1) .

2 أحسب A مساحة الحيز الملون في الشكل (2) و A مساحة الحيز الملون في الشكل (3).

يمكنك إستعمال الجدول التالي :

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	.	.	.	.	.	.	.
$f(x)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
المساحة	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

3 إستنتج حصرا للمساحة A.

4 تحقق ما إن كانت النتيجة المحصل عليها متلائمة مع تخمينك الذي وضعته في السؤال 4 من الجزء الأول.

حل الجزء الثاني

1 لايمكن

2

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	0.90	0.83	0.77	0.71	0.67	0.625	0.59	0.55	0.52	0.5
المساحة	0.09	0.083	0.077	0.071	0.067	0.625	0.059	0.055	0.052	0.05

◁ حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل (2)

$$\begin{aligned} S &= 0.1 \times f(0.1) + 0.1 \times f(0.2) + 0.1 \times f(0.3) + 0.1 \times f(0.4) + 0.1 \times f(0.5) \\ &+ 0.1 \times f(0.6) + 0.1 \times f(0.7) + 0.1 \times f(0.8) + 0.1 \times f(0.9) + 0.1 \times f(1) \\ &\approx 0.09 + 0.083 + 0.077 + 0.071 + 0.067 + 0.0625 + 0.059 + 0.055 + 0.052 + 0.05 \\ &\approx 0.60 \end{aligned}$$

◁ حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل (1)

$$\begin{aligned} S &= 0.1 \times f(0) + 0.1 \times f(0.1) + 0.1 \times f(0.2) + 0.1 \times f(0.3) + 0.1 \times f(0.4) + 0.1 \times f(0.5) \\ &+ 0.1 \times f(0.6) + 0.1 \times f(0.7) + 0.1 \times f(0.8) + 0.1 \times f(0.9) \\ &\approx 0.1 + 0.09 + 0.083 + 0.077 + 0.071 + 0.067 + 0.0625 + 0.059 + 0.055 + 0.052 \\ &\approx 0.71 \end{aligned}$$

3 إستنتاج حصرا لـ A

$0.60 \leq A \leq 0.71$

4 التحقق :

نختار دالة أصلية لـ f المعرفة بـ: $F(x) = \ln(x+1)$

لدينا: $F(1) - F(1) = \ln(2) - 0 = \ln(2) \approx 0.69$ إذن $0.60 \leq F(1) - F(0) \leq 0.71$

النتيجة متلائمة مع التخمين

نشاط ثانٍ صفحة 167

نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;2]$ بـ: $g(x) = -x + 2$.

و ليكن (d) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

لتكن النقطة $A(-1;3)$ ولتكن النقطة A' مسقطها العمودي على حامل محور الفواصل .

نعتبر نقطة M من المنحنى (d) فاصلتها x ونرمز بـ M' إلى مسقطها العمودي على حامل محور الفواصل .

نرمز بـ: $G(x)$ إلى مساحة شبه المنحرف $AA'MM'$

1 أنجز شكلا مناسبا .

2 نفرض أن: $-1 \leq x \leq 2$

◁ أحسب $G(x)$ بدلالة x. ثم تحقق أن $G'(x) = g(x)$

◁ أحسب $G(-1)$. ماذا تستنتج ؟

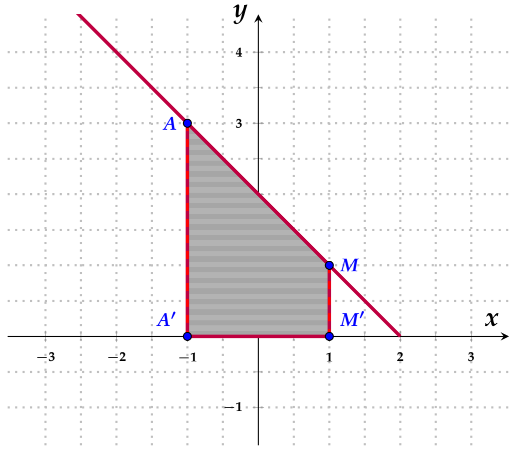
3 نفرض أن: $x \leq -1$

◁ أحسب $G(x)$ بدلالة x. ماذا تلاحظ؟

◁ أحسب $G(-1)$. ماذا تستنتج؟

حـل نشاط ثانٍ

1 إنشاء : $-1 \leq x \leq 2$



2 ◁ حساب $G(x)$

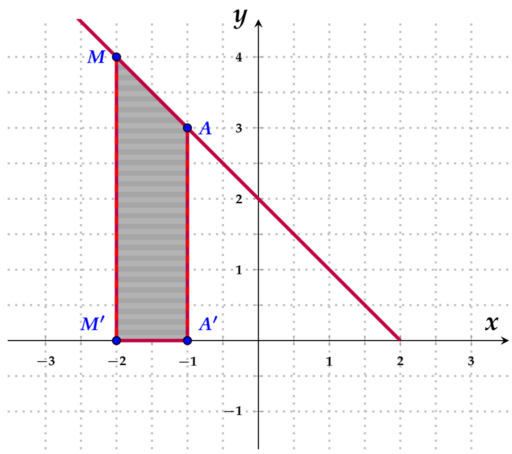
$$G(x) = \frac{(AA' + MM')(A'M')}{2} = \frac{(5-x)(x+1)}{2} = \frac{-x^2+4x+5}{2}$$

لدينا : $G'(x) = \frac{1}{2}(-2x+4) = -x+2 = g(x)$

◁ $G(-1) = \frac{-(-1)^2+4(-1)+5}{2} = 0$

◁ من أجل $x = -1$ مساحة $AA'MM'$ معدومة

3 ◁ $x \leq -1$



◁ حساب $G(x)$

$$G(x) = \frac{(AA' + MM')(A'M')}{2} = \frac{(5-x)(-x-1)}{2} = \frac{x^2-4x-5}{2}$$

نلاحظ أن من أجل $x \leq -1$ فإن : $G'(x) = -g(x)$

لدينا : $G'(x) = \frac{1}{2}(2x-4) = x-2 = -g(x)$

◁ $G(-1) = \frac{(-1)^2-4(-1)-5}{2} = 0$

◁ من أجل $x = -1$ مساحة $AA'MM'$ معدومة

الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحنى

خاصية — أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I ، a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحني f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; A, B)$ و F دالة اصلية لـ f على I

مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\boxed{F(b) - F(a)}$

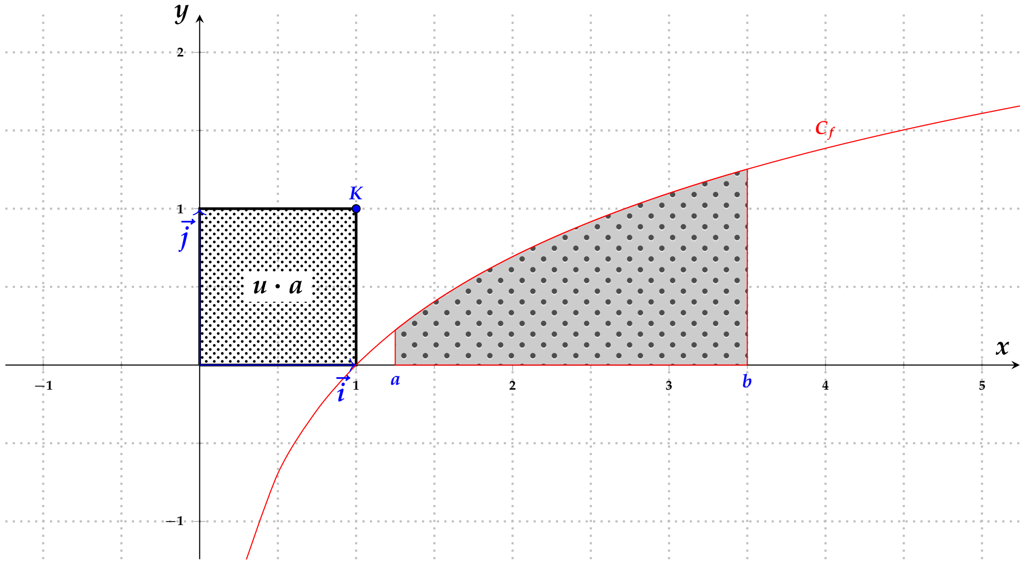
ملاحظة:

- الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$
- نرمز لوحدة قياس المساحات بـ: $u \cdot a$ وهي مساحة المستطيل $OIKJ$ حيث $K(1;1)$

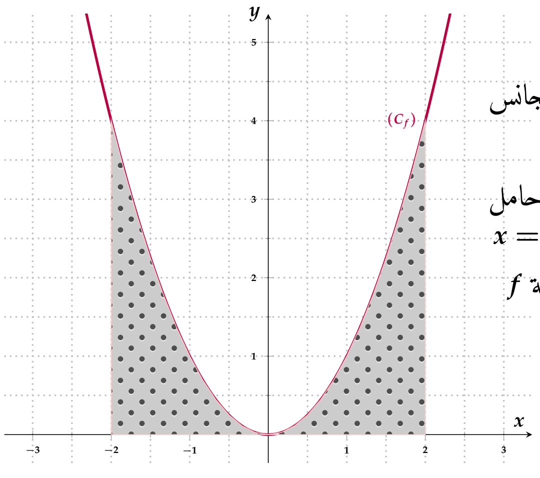
أي $u \cdot a = OI \times OJ$

◁ إذا كان : $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 1$ فإن: $1u \cdot a = 1cm^2$

◁ إذا كان : $\| \overrightarrow{i} \| = 2$ و $\| \overrightarrow{j} \| = 3$ فإن: وحدة المساحة هي : $6cm^2$



مثال ❶



- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (الوحدة $1cm$)

- لنعين بـ $A\ cm^2$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمن اللذين معادلتيهما $x = -2$ و $x = 2$
- نختار دالة F معرفة بـ: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ دالة أصلية للدالة f

إذن : $F(2) - F(-2) = \frac{8}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{16}{3}$

أي $A = \frac{16}{3} cm^2$

تعريف

أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددان حقيقيان من I .

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على I ، التكامل من a الى b ل f

و نرمز اليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ نقرأ: التكامل من a الى b ل $f(x)$ تفاضل x

ملاحظة:

- عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F على مجال I يشمل العددين a و b

ثم نكتب : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

- يمكن استبدال المتغير x باحد الاحروف t ، q ، .. .فيكون لدينا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

مثال❷

- $\int_{-1}^{1}(2x+3)dx = [x^2+3x]_{-1}^{1} = 4-(-2) = 6$
- $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x-1)dx = [-\sin x - x]_{-\pi}^{\pi} = \pi-(-\pi) = 2\pi$
- $\int_1^4 \frac{2}{2x+3}dx = [\ln(2x+3)]_1^4 = \ln(11)-\ln(4) = \ln\left(\frac{11}{4}\right)$

التقويم

حل تمرين 10 صفحة 184

- $\int_1^{10}\frac{dt}{\sqrt{t}}dt = \left[2\sqrt{t}\right]_1^{10} = 2\sqrt{10}-2$
- $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx = [e^x]_{\ln 2}^{\ln 3} = 3-2 = 1$
- $\int_1^2 2x(x^2-1)dx = [(x^2-1)^2]_1^2 = 3-0 = 3$
- $\int_3^4 \frac{5x}{(x^2-2)^3}dx = \left[-\frac{5}{4}\frac{1}{(x^2-2)^2}\right]_3^4 = -\frac{5}{784}+\frac{5}{196} = -\frac{5}{784}+\frac{20}{784} = \frac{15}{784}$

حل تمرين 11 و14 صفحة 183 و 184

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : 3ريا+3تر+3ع

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي

ميدان التعلم : التحليل

موضوع الحصة : حساب التكاملي و تطبيق خواصه

المكتسبات القبليـة : الدوال الأصلية ، تكامل دالة

الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق / مرحلة بناء المعارف	(see below)	

مرحلة الإنطلاق

- خواص التكامل

علاقة شال

خاصية ❶ — أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة على مجال I من أجل كل الاعداد الحقيقية a ،b ،c من I لدينا :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

البـرهـان

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)]$$

$$= -F(a) + F(c) = F(c) - F(a)$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx$$

■

مرحلة بناء المعارف

نتائج

◁ $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

◁ إذا كان $c = a$ نحصل على $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

مثال ❶

لنحسب التكامل التالي : $\int_0^2 |x^2 - 1|dx$

◁ من أجل كل x من $[0;1]$: $x^2 - 1 \leq 0$ إذن $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$

◁ من أجل كل x من $[1;2]$: $x^2 - 1 \geq 0$ إذن $|x^2 - 1| = x^2 - 1$

بإستعمال علاقة شال لدينا : $\int_0^2 |x^2 - 1|dx = \int_0^1 (-x^2 - 1)dx + \int_1^2 (x^2 + 1)dx$

ومنه $\int_0^2 |x^2 - 1|dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^2 = -\frac{4}{3} + \frac{14}{3} - \frac{4}{3} = 2$

مرحلة بنـــاء المعـــارف

الخطية

خاصية❷ أظف إلى مطويتك

f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي من أجل كل عددين حقيقيين a وb من I

لدينا ❶ $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ و ❷ $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

البرهان

❶ نعلم أنه إذا كانت G و F دالتين أصليتين على الترتيب لـ g و f على I فإن : $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I

ومنه :

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = [F(x)+G(x)]_a^b = [F(b)+G(b)]-[F(a)+G(a)]$$

$$= [F(b)-F(a)]-[G(b)-G(a)] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

❷ نعلم أنه إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I فإن kF دالة أصلية لـ: kf حيث k عدد حقيقي

$$\int_a^b kf(x)dx = [kF(x)]_a^b = [kF(a)-kF(b)] = k\,[F(b)-F(a)] = k\int_a^b f(x)dx$$

■

مـــثال ❷

◁ $\int_0^\pi (x+\cos x)dx = \int_0^\pi xdx + \int_0^\pi \cos xdx =$

◁ $\int_1^e \frac{3}{x}dx = 3\int_1^e \frac{1}{x}dx$

المقارنة

خاصية❸ أظف إلى مطويتك

f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$

1) اذا كان من اجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x)\geqslant 0$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

2) اذا كان من اجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x)\leqslant g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

البرهان

❶ إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن من أجل كل من x من I فإن $F'(x)=f(x)$

و بماأن $f(x)\geq 0$ على $[a;b]$ فإن F متزايدة على $[a;b]$ و بالتالي : $F(a)\leq F(b)$ أي $F(b)-F(a)\geq 0$

ومنه $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

❷ f و g دالتين معرفتين على I . إذا كان $f(x)\leq g(x)$ فإن $g(x)-f(x)\geq 0$

ومنه $\int_a^b (g(x)-f(x))dx \geq 0$ ومنه $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$

ومنه $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

■

مثال 3

◁ نعتبر التكامل : $I = \int_0^1 \frac{2}{1+x}dx$

◁ لنبيّن أنه من أجل كل x من $[0;1]$: $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$

لدينا: $1 \leq 1+x \leq 2$ ومنه $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ و بالضرب في x^2 نجد : $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$

◁ ينتج لنا حصرا لـ I : $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \leq I \leq \int_0^1 x^2dx$ إذن : $\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$

نتائج

f دالة تقبل الإشتقاق على مجال $[-a;a]$

◁ إذا كانت f دالة زوجية فإن:

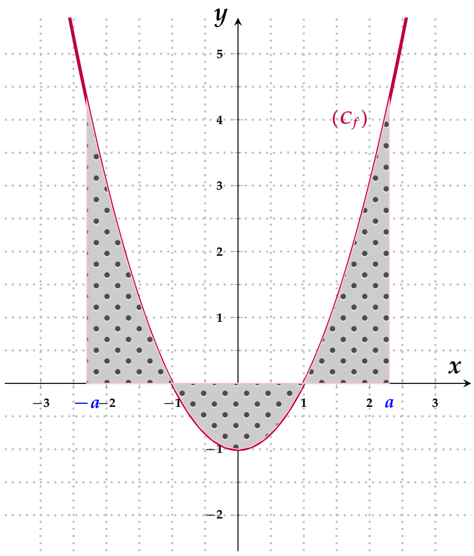
◁ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$

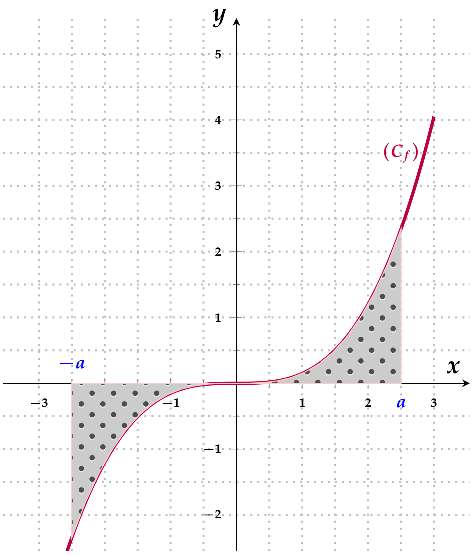
◁ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

◁ إذا كانت f دالة فردية فإن:

◁ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$

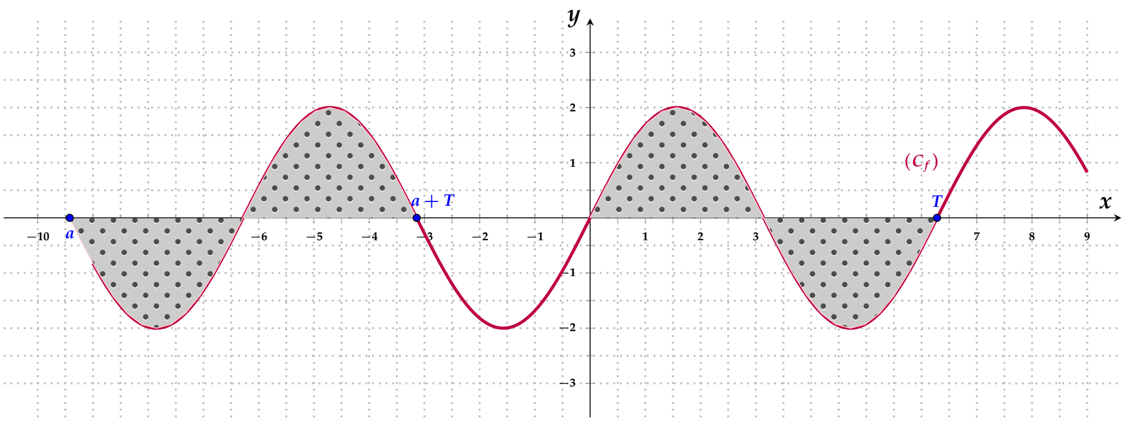
◁ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$





f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ، إذا كانت f دورية و دورها T فإن:

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$



مـثال ❹

◃ $\int_{-3\pi}^{-\pi} \sin x dx = \int_{0}^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$

◃ $\int_{-6}^{6} (x^2+3)dx = 2\int_{0}^{6} (x^2+3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^6 = 90$

◃ $\int_{-6}^{6} (x^3+3x)dx = 0$ لأن : الدالة $x \to x^3+3x$ دالة فردية

حل تمرين 26صفحة 186

❶ $I = \int_{1}^{e} \ln t dt + \int_{1}^{e} (t+\ln\frac{1}{t})dt = \int_{1}^{e} (\ln t - \ln t + t)dt = \int_{1}^{e} t dt = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$

❷ $I = \int_{1}^{e} \ln(1+t^2)dt + \int_{e}^{1} \ln(1+t^2)dt = \int_{1}^{e} \ln(1+t^2)dt - \int_{1}^{e} \ln(1+t^2)dt = 0$

التقويم

❷ $I = \int_{1}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx - \int_{1}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx = \int_{1}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx - \int_{1}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx$

ومنه $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos 2x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\sin(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3})) = 0$

حل تمرين 30 و 33 صفحة 186

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : القيمة المتوسطة لدالة على مجال $[a;b]$

المكتسبات القبلية : الدوال الأصلية ، تكامل دالة
الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى
المراجع : الكتاب المدرسي،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف ❶

أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة على مجال I ، a و b عددان حقيقيان من I حيث: $a \leq b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

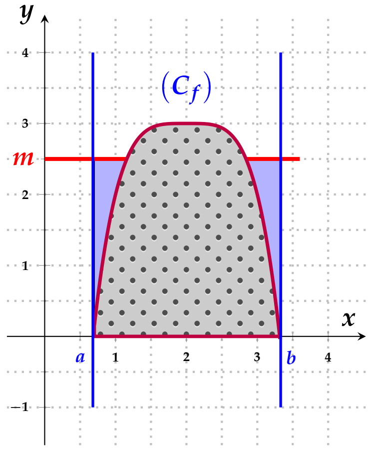
مـــثال

القيمة المتوسطة للدالة f المعرفة بـ $f(x) = 2x+3$ على المجال $[-1;2]$

هي : $m = \dfrac{1}{2-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x+3)dx = \dfrac{1}{3}\left[x^2+3x\right]_{-1}^{2} = 4$

مرحلة بناء المعارف

التفسير الهندسي في حالة دالة موجبة



إذا كانت f دالة مستمرة وموجبة على مجال $[a;b]$ وكان (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

فإن: $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ يعني $m(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

نعلم أن: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين a و b

و $m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m و هكذافإن: m القيمة المتوسطة لـ f على $[a;b]$ هي أحد بعدي المستطيل الذي بعده الآخر $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحنى (C_f) بين a و b

◁ نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الرمادي نفس المساحة

حصر تكامل- حصر قيمة المتوسطة

خـاصية❶

أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$

فإن : $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

مرحلة بناء معارف

البــرهــان

◁ إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$: $m \leq f(x) \leq M$

فإن: $\int_a^b M dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b m dx$ أي $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ ■

حالة خاصة

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كان a و b عددان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M

بحيث من أجل كل x من I، $|f(x)| \leq M$ فإن: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|$

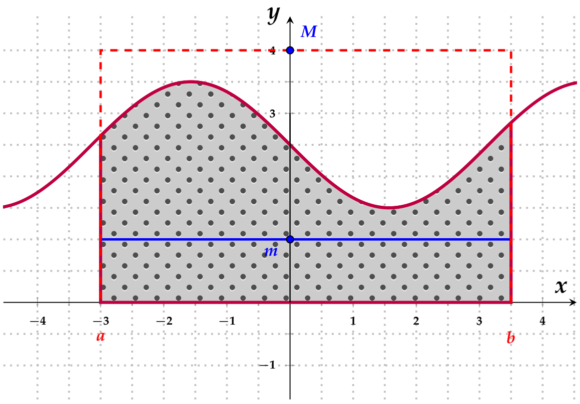
ملاحظة: ◁ القيمة المتوسطة للدالة f كذلك محصورة بين العددين m و M

التفسير الهندسي في حالة دالة موجبة و $m \geq 0$

إذا كانت f دالة مستمرة وموجبة على مجال $[a;b]$ وكان (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

فإن: ◁ مساحة الحيز المستوي تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b محصورة بين مساحتي المستطيلين اللذين إرتفاعهما m و M و قاعدتهما $b-a$

كما أن القيمة المتوسطة محصورة بين m و M



حل تمرين 36 صفحة 186

◁ $m = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(2x+3)dx = \frac{1}{2}\left[x^2+3x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(4-(-2)) = 3$

◁ $m = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}|x|dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{0}(-x)dx + \frac{1}{4)}\int_{0}^{2}xdx = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2} = 1$

حل تمرين 51 صفحة 188

1 لدينا: من أجل كل x من $[n;n+1]$ فإن : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$

ومنه $\frac{1}{n}(n+1-n) \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{n+1}(n+1-n)$ أي $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

2 حسب مبرهنة الحصر نجد: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

لأن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ ومنه المتتالية (I_n) متقاربة

حل تمرين 52 و 59 صفحة 188 و 189

التقويم

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

مــذكــرة رقـــم 04

الأستاذ :بــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار–غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : 3ريا+3تر+3ع

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكامل

ميدان التعلم: التحليل

موضوع الحصة : حساب مساحة حيز في حالة دالة سالبة

المكتسبات القبليــة : الدوال الأصلية ، تكامل دالة

الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	(see below)	

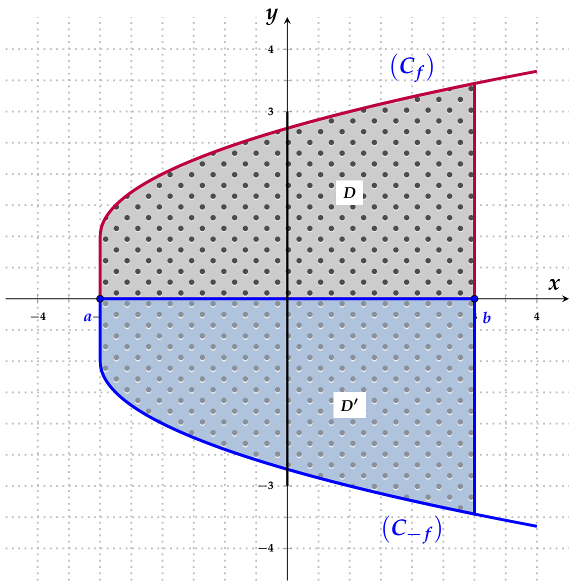
مرحلة الإنطلاق

تكامل دالة سالبة على مجال

f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

◁ نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$

و بـ A' إلى مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_{-f}) و المستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$



بما أن f سالبة على المجال $[a;b]$ فإن $-f$ موجبة على المجال $[a;b]$

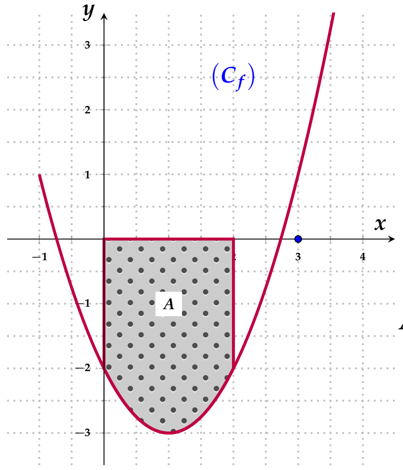
و بالتالي : $A'=\int_a^b -f(x)dx$

الحيزان D و D' متناظران بالنسبة حامل محور الفواصل فمساحتاهما متساويتان أي $A'=A$

و بالتالي : $A=\int_a^b -f(x)dx$

◁ نقول أحيانا أن : $\int_a^b f(x)dx$ هي المساحة الجبرية للحيز D فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$

مثال ❶



◁ لنحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحى الدالة $f:x\to x^2-2x-2:$

و المستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ، $x=0$ و $y=0$

حيث $\|\overrightarrow{i}\|=\|\overrightarrow{j}\|=1cm$

الدالة : $f:x\to x^2-2x-2$ سالبة على المجال $[0;2]$

و بالتالي :

$$A=\int_0^2 -(x^2+2x-2)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-2x\right]_0^2$$

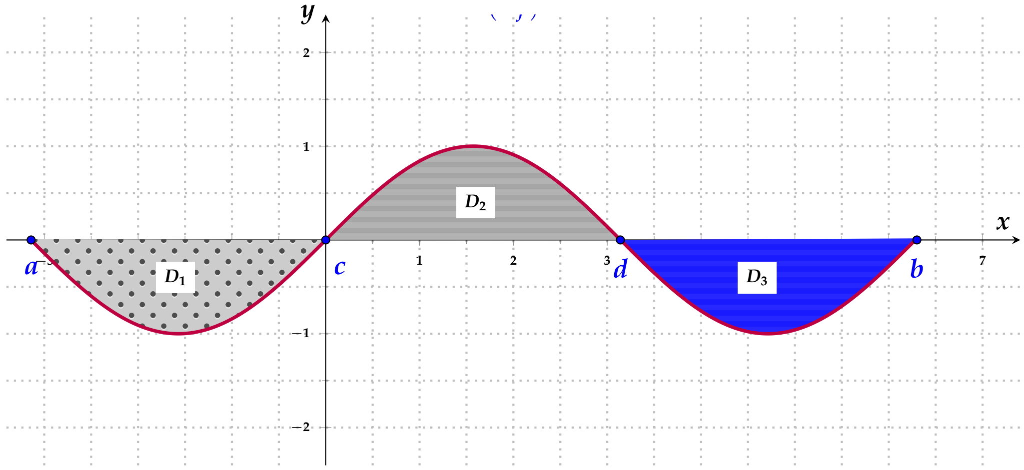
ومنه : $A=\frac{16}{3}cm^2$

تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

◁ نفرض أن f دالة تغير إشارتها على المجال $[a;b]$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

◁ نرمز بـ A_1 إلى مساحة الحيز D_1 و بـ A_2 إلى مساحة الحيز D_2 و بـ A_3 إلى مساحة الحيز D_3



بما أن : $A = A_1 + A_2 + A_3$ فإن : $A = \int_a^c -f(x)dx \cdot (u.a) + \int_c^d f(x)dx \cdot (u.a) + \int_d^b -f(x)dx \cdot (u.a)$

ملاحظة:

بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و 0 $y=$ و بمنحنى ممثل للدالة f تغير إشارتها على $[a;b]$

نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارةثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على مجال من هذه المجالات

مساحة حيز محدد بمنحنيين

◁ f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$.

◁ (C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانين لهما على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

A مساحة الحيز المحدد بالمنحنين (C_f) و (C_g) و المستقيمين $x=a$ و $x=b$ حيث $A = A_1 + A_2$ كما موضح في الشكل المقابل

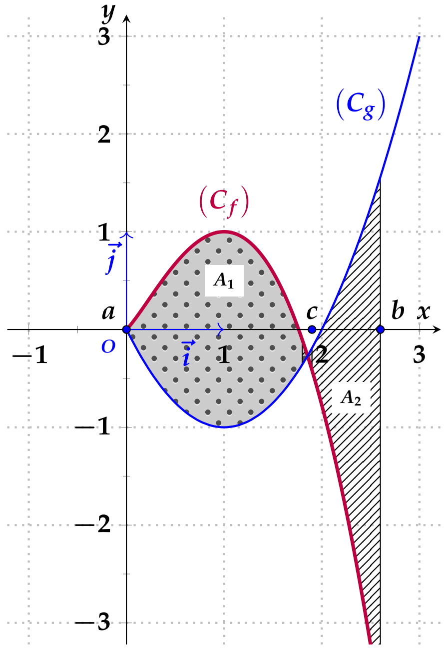
x	a	b	c
$f(x)-g(x)$		$+$	$-$

وبذلك المنحنى (C_g) يقع تحت المنحنى (C_f) في المجال $[a;c]$

ويمكن التعبير عن A_1 بمجموعة النقط $M(x;y)$

حيث : $\begin{cases} a \le x \le c \\ g(x) \le y \le g(x) \end{cases}$ و المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (C_g) في المجال $[c;b]$ ويمكن التعبير عن

A_2 بمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$



إذن $A_1 = \int_a^c (f(x)-g(x))\, dx \cdot (u.a)$ و $A_2 = \int_c^b -(f(x)-g(x))\, dx \cdot (u.a)$

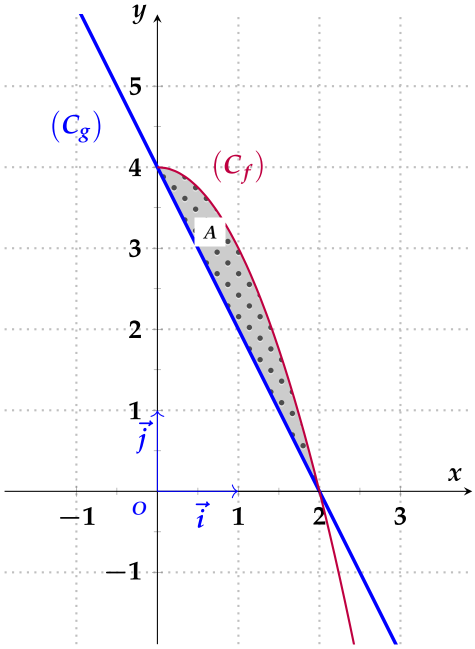
ومنه $A = \left(\int_a^c (f(x)-g(x))\, dx + \int_c^b -(f(x)-g(x)) \cdot dx\right) \cdot (u.a)$

مرحلة بناء معارف

التقويم

مرحلة بناء المعارف

مـثال ❷



◁ f و g دالتين معرفتين على المجال $[0;2]$ بـ: $f(x) = -x^2 + 4$
و $g(x) = -2x + 4$

◁ (C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانين لهما على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ (كما في الشكل)

◁ لنحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنين (C_f) و (C_g) و بالمستقيمين اللذين معدلتاهما $x = 0$ و $x = 2$

من أجل كل x من المجال $[0;2]$: $f(x) \geq g(x)$

ومنه $A = \int_0^2 (f(x) - g(x))\, dx$

ومنه $A = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2$

أي $A = \frac{4}{3} \cdot (u.a)$

التقويم

تطبيق:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-1;4]$ بـ: $f(x) = -e^{x-3} + 2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

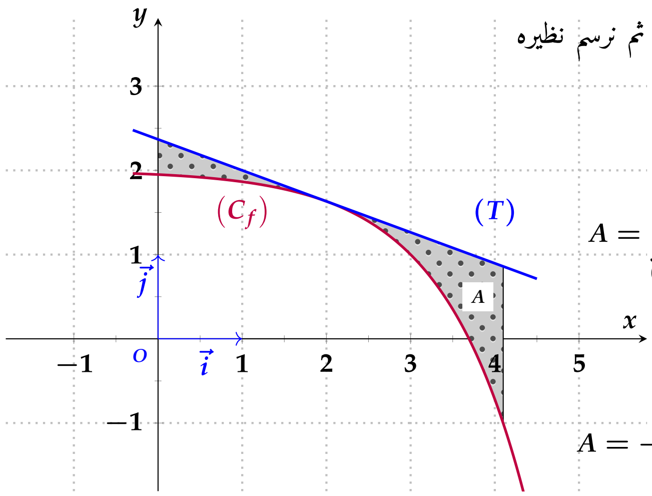
حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$

1 إنطلاقا من التمثيل البياني للدالة $x \to e^x$ أنشئ (C_f)

2 أكتب معادلة المماس (T) للمنحى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$ ، علماأن (C_f) يقع (T)

3 أحسب مساحة الحيز المحصورة بين (C_f) و T و المستقيمين ذي المعادلة $x = 0$ و $x = 4$

حل



1 نسحب منحنى دالة $x \to e^x$ بالشعاع $3\vec{i} - 2\vec{j}$ ثم نرسم نظيره بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

2 $(T) : y = -e^{-1}x + e^{-1} + 2$

3 $A = \int_0^4 -\left[e^{x-3} + 2 - (-e^{-1}x + e^{-1} + 2)\right] dx$

ومنه $A = \int_0^4 -\left(e^{x-3} + xe^{-1} - e^{-1}\right) dx$

ومنه $A = -\left[e^{x-3} + \frac{e^{-1}}{2}x - e^{-1}x\right]_0^4 \approx 1,2u \cdot a$

ولدينا: $(u.a) = 2cm^2$ ومنه $A \approx 2.4cm^2$

حل تمرين 59 صفحة 188

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : 3ريا+3تر+3ع
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : التكامل بالتجزئة

- **المكتسبات القبلية :** الدوال الأصلية ، تكامل دالة
- **الكفاءات المستهدفة :** توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى
- **المراجع :** الكتاب المدرسي،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

المكاملة بالتجزئة

مبرهنة ❶

أظف إلى مطويتك

لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I بحيث أن :الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I .

من أجل كل عددين حقيقين a و b من I لدينا : $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ $-$ $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

مرحلة بناء المعارف

البـرهـان

الدالتان u و vقابلتان للإشتقاق على مجال I ومنه uv قابلة للإشتقاق على I

لدينا : $(uv)' = u'v + v'u$ ومنه نستنتج أن : uv دالة أصلية لـ: $u'v + v'u$ على مجال I

ومنه $\int_a^b (u'v + v'u)dx = [uv]_a^b$ ومنه $\int_a^b (u'v)dx + \int_a^b (v'u)dx = [uv]_a^b$

ومنه $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$ ∎

مثال❶

◁ لنحسب $\int_0^1 xe^{-x}$. نضع : $v'(x) = e^{-x}$ و $u(x) = x$ ومنه $v(x) = -e^{-x}$ و $u'(x) = 1$

ومنه $\int_0^1 xe^{-x} = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -2e^{-2} + 1$

طـريقة

تطبيقيا لحساب التكامل: $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ نعتمد على المخطط التالي :

$u(x) \xrightarrow{\text{الجداء}} v(x)$

$u'(x) \xrightarrow{\text{ناقص التكامل}} v'(x)$

$[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)$

مثال❷

لنحسب التكامل $\int_0^1 (x+2)e^x dx$

نضع : $u(x) = x+2$ و $v'(x) = e^x$ ومنه $u'(x) = 1$ و $v(x) = e^x$

إذن $\int_0^1 (x+2)e^x dx = [(x+2)e^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x = 2e-1$

تطبيق:

◁ بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب:

❶ $\int_1^e x\ln x dx$ ❷ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

❸ $\int_2^e \ln(x-1) dx$ ❹ $\int_0^\pi x\cos x dx$

التقويم

حل تطبيق

❶ نضع : $u(x) = \ln x$ و $v'(x) = x$ ومنه $u'(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

إذن $\int_1^e x\ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

❷ نضع : $u(x) = \ln x$ و $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ ومنه $u'(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = -\frac{1}{x}$

إذن $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx = -e^{-1} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = -2e^{-1}+1$

❸ نضع : $u(x) = \ln(x-1)$ و $v'(x) = 1$ ومنه $u'(x) = \frac{1}{x-1}$ و $v(x) = x$

إذن $\int_2^e \ln(x-1) dx = [x\ln(x-1)]_2^e - \int_2^e \frac{x}{x-1} dx = e\ln(e-1) - [x+\ln(x-1)]_2^e$

ومنه $\int_2^e \ln(x-1) dx = \ln(e-1)(e-1) - e + 2$

❸ نضع : $u(x) = x$ و $v'(x) = \cos x$ ومنه $u'(x) = 1$ و $v(x) = \sin x$

إذن $\int_0^\pi x\cos x dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x = [\cos x]_0^\pi = -2$

حل تمرين 62و63و64و65 صفحة 189

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3رياضيات+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : توظيف التكامل لحساب الدوال الأصلية

المكتسبات القبلية : الدوال الأصلية ، تكامل دالة
الكفاءات المستهدفة : توظيف التكامل لحساب الدوال الأصلية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الانطلاق

الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة

مبرهنة ❶

أظف إلى مطويتك

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I .

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة : $F : x \to \int_a^x f(t)dt$

مرحلة بناء المعارف

البــرهـان

نضع : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

ومنه إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على المجال I يكون لدينا :

◁ من أجل كل x من I: $F(x) = G(x) - G(a)$

وبالتالي من أجل كل x من I : $F'(x) = G'(x) = f(x)$

◁ نستنتج أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a ■

مثال❶

الدالة الأصلية للدالة : $f : x \to \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ و التي تنعدم من أجل 1

هي: $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \frac{(\ln t)^2}{2}$

التقويم

تطبيق:

f دالة مستمرة على مجال I يشمل a

◁ عيّن دالة أصلية F للدالة f على I بحيث $F(a) = 0$

❶ $f(x) = \ln x$ ، $a = 1$ ، $I =]0;+\infty[$

❷ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ، $a = 0$ ، $I = \mathbb{R}$

❸ $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ، $a = 0$ ، $I = \mathbb{R}$

حل تطبيق

❶ نضع : $u(t)=\ln t$ و $v'(t)=1$ ومنه $u'(t)=\frac{1}{t}$ و $v(x)=t$

إذن $F(x)=\int_{1}^{x}\ln t\,dt=[t\ln t]_1^x-\int_{1}^{x}t\cdot\frac{1}{t}dt=x\ln x-[t]_1^x=x\ln x-x$

❷ $F(x)=\int_{0}^{x}\frac{2t}{2(t^2+1)}dt=\frac{1}{2}\left[t\ln(t^2+1)\right]_0^x=\frac{\ln(x^2+1)}{2}$

❸ نضع : $u(t)=t$ و $v'(t)=e^{-1}$ ومنه $u'(t)=1$ و $v(x)=-e^{-1}$

إذن $F(x)=\int_{1}^{x}te^{-t}dt=\left[-te^{-t}\right]_0^x-\int_{0}^{x}-e^{-t}dt=-xe^{-x}-[e^{-t}]_0^x=-xe^{-x}-e^{-x}+1$

حل تمرين 68و69و70 صفحة 189

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

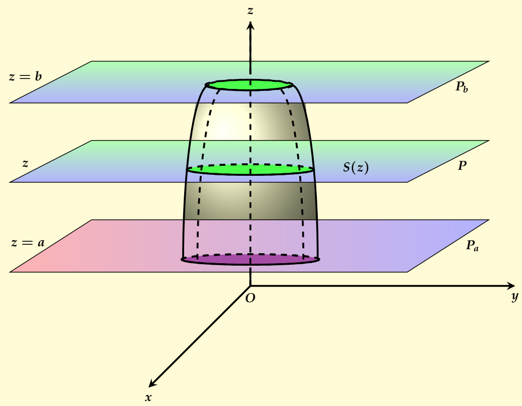
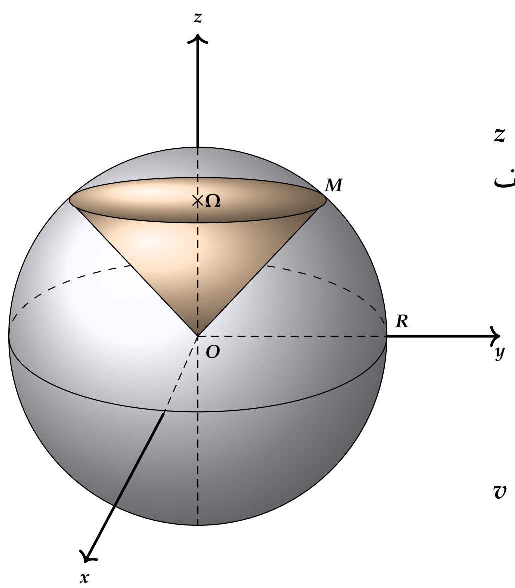
ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين	الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
المستوى : 3ريا+3تر+3ع	ميدان التعلم: التحليل
المدة : 1 ساعة	موضوع الحصة : حساب حجوم لمجسمات بسيطة

المكتسبات القبلية : الدوال الأصلية ، تكامل دالة

الكفاءات المستهدفة : حساب حجوم بعض مجسمات البسيطة

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

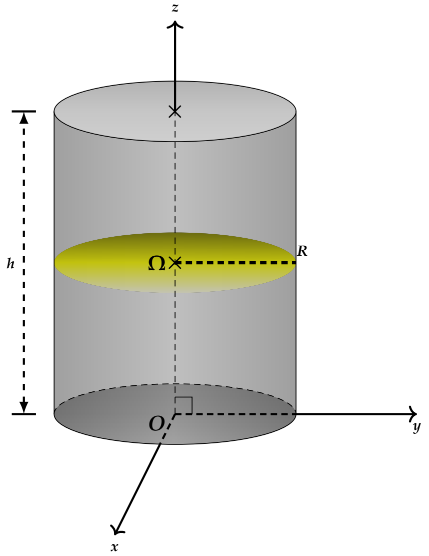
المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق مرحلة بناء المعارف	**حساب حجوم بعض مجسمات البسيطة** **خاصية 1** ◁ نعتبر في الفضاء مجسما محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما $z=a$ و $z=b$ حيث $a \leq b$ ◁ لتكن $S(z)$ مساحة مقطع الجسم بمستوي موازي للمستوي (xOy) راقمه z حيث : $a < z < b$ ◁ نقبل أن حجم المجسم بوحدة الحجوم هو العدد الحقيقي v حيث : $V = \int_a^b S(z)dz$  **مثال 1** ◁ نعتبر الكرة (S) ونصف قطرها R . ◁ مقطع هذه الكرة بمستوي موازي للمستوي (xOy) وراقمه z حيث $-R < z < R$ هي دائرة مركزها $\Omega(0,0,z)$ و نصف قطرها $r = \Omega M$ مع $OM = r$ لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2 = R^2 - z^2$ ومنه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطرها r هي : $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$ ◁ إذن $V = \int_{-R}^{R} S(z)dz = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)dz$ و بالتالي : $V = \left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{+R}$ ومنه $v = \frac{4}{3}\pi R^3 (u \cdot v)$  	

مـثـال ❷

◁ نعتبر الأسطوانة (H) التي محورها (Oz) و نصف قطرها R و إرتفاعها h .
مقطع هذه الأسطوانة بمستوي موازي للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $0 < z < h$ هي دائرة مركزها $\Omega(0,0,z)$ ونصف قطرها R
ومنه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره R هي $S(z) = \pi R^2$

◁ إذن $V = \int_0^h S(z)dz = \int_0^h \pi R^2 dz$

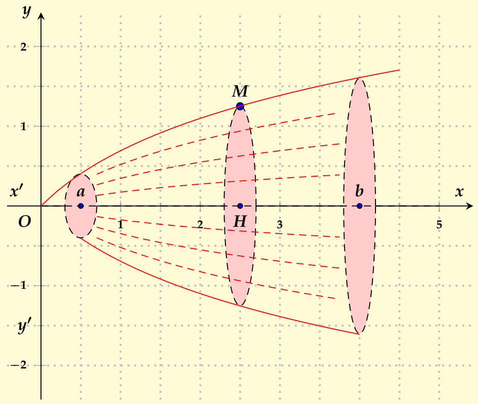
و بالتالي : $V = \left[\pi R^2 z\right]_0^h$ ومنه $v = \pi R^2 h (u \cdot v)$



حالة خاصة

حجم مجسم دوراني محوره (xx')

◁ ليكن (C_f) المنحنى الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a;b]$
◁ دوران المنحنى (C_f) حور المحور xx' يولد مساحة دورانية محورها (xx') التي بدورها تحدد مجسما دورانيا محوره (xx')
◁ لتكن $M(x, f(x))$ نقطة من (C_f)
◁ مقطع المجسم الناتج عن دوران المنحنى (C_f) حول المحور (xx') بمستوي مار من M وعمودي على (xx') هو قرص مساحته $\pi \times HM^2$ أي $\pi \times [f(x)]^2$



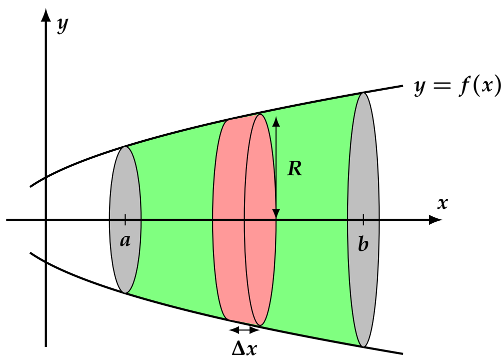
خــاصية ❷

◁ حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور (xx') لمنحنى (C_f) ممثل للدالة f مستمرة و موجبة على مجال $[a;b]$
هو العدد الحقيقي V حيث : $V = \int_a^b \pi\, [f(x)]^2\, dx \times (u \cdot v)$ حيث $(u \cdot v)$ وحدة الحجم

البــرهـان

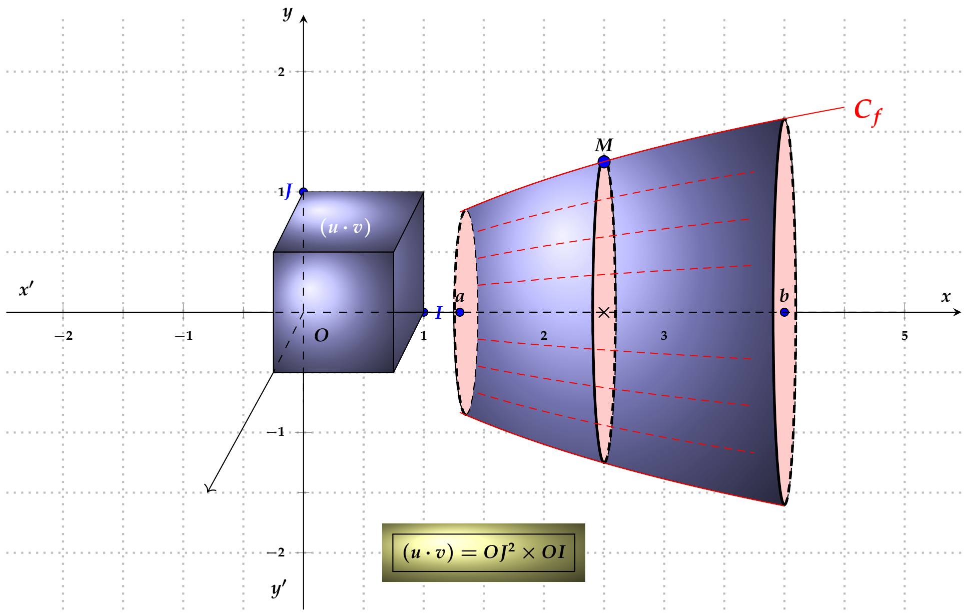
في الشكل المقابل مجسم باللون الأخضر مولد بتدوير منحنى دالة f حول محور (xx')
نقسم المجسم إلى عدة أجسام صغيرة متساوية شبه أسطوانية الشكل (كما موضح في الشكل) إرتفاعها Δx و نصف قطر قاعدتها $f(x)$. لما يكون Δx قريب جدا من الصفر يصبح مجسم على شكل اسطوانة ذات إرتفاع dx و نصف قطر قاعدتها $f(x)$ ومنه حجم الأسطوانة كالتالي: $dv = \pi[f(x)]^2 dx$

ومنه $V = \int_a^b \pi\, [f(x)]^2\, dx (u \cdot v)$



رحلة بناء معارف

وحدة الحجم $(u \cdot v) = OJ^2 \times OI$

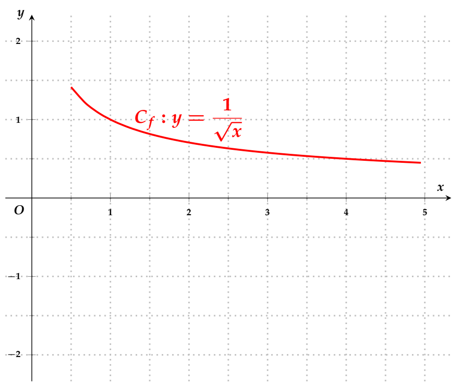


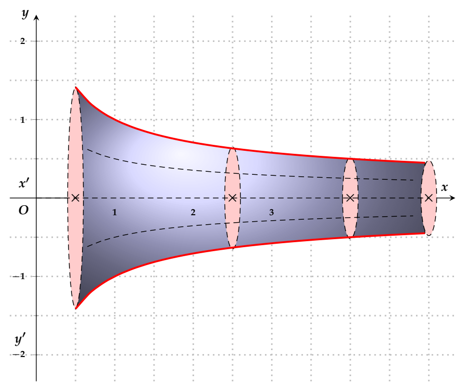
مــثال ❸

◁ لنحسب الحجم الناتج عن دوران منحنى دالة : $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ على المجال $\left[\frac{1}{2};5\right]$

◁ الدالة $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ مستمرة و موجبة على المجال $\left[\frac{1}{2};5\right]$ ومنه الحجم هو : $V = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{5} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int_{\frac{1}{2}}^{5} \frac{\pi}{x} dx$

ومنه $V = [\pi \ln x]_{\frac{1}{2}}^{5} = \pi(\ln 5 + \ln 2) = \pi \ln(10)(u \cdot v)$





التقويم

تطبيق:

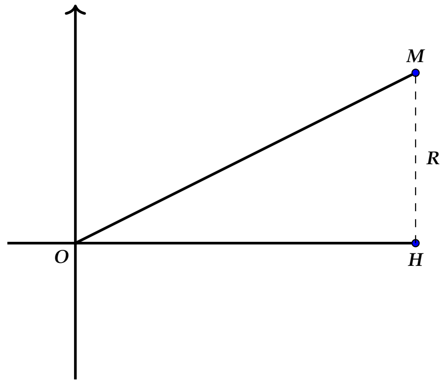
أثبت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h(u \cdot v)$ حيث h إرتفاعه و R نصف قطر قاعدته

الحل

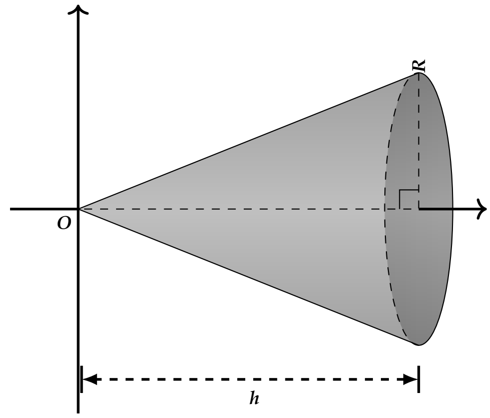
نأخذ الدالة f المعرفة على المجال $[0;h]$ بـ : $f(x) = ax$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ ، M نقطة من (C_f) والنقطة $H(h,0)$ مسقطها العمودي على حامل محور الفواصل (الشكل 1)

إذن $a = \dfrac{MH}{OH} = \dfrac{R}{h}$ ومنه $f(x) = \dfrac{R}{h}x$

ندير منحنى (C_f) حول حامل محور الفواصل فيولد لنا مخروط دوراني (الشكل 2)



الشكل 1



الشكل 2

ومنه $V=\int_0^h \pi f(x)^2dx=\int_0^h \pi\left(\frac{R}{h}x\right)^2dx=\int_0^h \pi\frac{R^2}{h^2}x^2dx$

ومنه $V=\left[\pi\frac{R^2}{3h^2}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\cdot\pi hR^2(u\cdot v)$

حل تمرين72 و 73 صفحة 189

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا+3تر+3ع
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: حساب التكاملي
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : توظيف حساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة

المكتسبات القبليــة : الدوال الأصلية ، تكامل دالة
الكفاءات المستهدفة : توظيف حساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**السرعة اللحظية و المسافة المقطوعة للمتحرك** **السرعة اللحظية لنقطة متحركة** **خاصية ❶** — أظف إلى مطويتك M نقطة متحركة على مستقيم (D) ، $x(t)$ المسافة المقطوعة من النقطة M عند اللحظة t ◁ السرعة اللحظية $v(t)$ للنقطة M عند اللحظة t هي : $v(x) = x'(t)$ أي $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$	
مرحلة بناء المعارف	**المسافة المقطوعة على مستقيم** **خاصية ❷** — أظف إلى مطويتك ◁ المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 حيث $t_1 < t_2$ سرعتها اللحظية $v(t)$ هي : $x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ **البــرهــان** نعلم أن $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ أي $dx = v(t)dt$ بمكاملة الطرفين بين اللحظتين t_1 و t_2 حيث $t_1 < t_2$ نجد $x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ ■ **تطبيق:** من أجل $t > 0$ ، سرعة نقطة متحركة هي : $v(t) = e^t + t(m \cdot s^{-1})$ ◁ أحسب المسافة المقطوعة من قبل هذه النقطة المتحركة بين اللحظتين: $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$	
التقويم	**حل تطبيق** ◁ نعلم أن: $x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ ومنه $x = \int_{1}^{2} (e^t + t)dt = \left[e^t + \dfrac{t^2}{2}\right]_1^2 = e^2 - e + \dfrac{3}{2}$ ملاحظات حول سير الدرس	