الواجب المنزلي الرابع في مادة الرياضيات — ثانوية الشهيد بلعروسي بن يحيى
المستوى :سنة 2 علوم تجريبية — الأستاذ : سي محمد لوط

سلم يوم: 2024/01/21 — يعاد يوم : 2024/01/24

التمرين الأول ليكن ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث : $AB = AC = BC = 4$.

1. عيّن و أنشئ H مرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1 ، 1 ، -3 على الترتيب .

2. لتكن N مجموعة النقط من المستوي التي تحقق مايلي : $||\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}|| = ||\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}||$

أ) بيّن أن $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

ب) باستخدام المتطابقة $||\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}||^2 = ||\overrightarrow{BA}||^2+||\overrightarrow{BC}||^2+2||\overrightarrow{BA}||\cdot||\overrightarrow{BC}||\cdot\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

*) بيّن أن $HN = 4\sqrt{3}$ ، ثم استنتج مجموعة النقط N محددا عناصرها المميزة .

التمرين الثاني $ABCD$ متوازي أضلاع ، I منتصف القطعة $[AD]$ ، E مركز ثقل المثلث ACD ، K منتصف القطعة $[EB]$ و F النقطة المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{BF}$.

1. برهن أنّ K مرجّح النقط المثقلة $(A,1)$ ، $(B,3)$ ، $(C,1)$ و $(D,1)$.

2. برهن أن النقط I ، F و K في استقامية .

3. ليكن L مرجّح النقط المثقلة $(A,1)$ ، $(B,3)$ و M منتصف القطعة $[CD]$.

*) برهن أن النقط L ، K و M في استقامية .

التمرين الثالث :

لتكن A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامية، وليكن G مرجّح الجملة المثقلة $\{(A,2)\ (B,-1)\ (C,3)\}$

1. عين مجموعة النقط في كل حالة مما يلي :

أ) $||2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}||$.

ب) $||2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| \leq 4$

جـ) $8 < ||2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| < 16$

2. لتكن النقطتين D و E إحداثياتها على الترتيب $(1,0)$ و $(-1,0)$ ، $M(x,y)$ نقطة كيفية من المستوي تحقق :

$DM = EM \quad (E_1)$ $\qquad$ $DM^2 + EM^2 = 4 \quad (E_2)$

أ) مثّل النقطتين D و E في معلم متعامد ومتجانس $(\overrightarrow{O},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$

ب) عيّن و أنشئ كلا من (E_1) و (E_2) في المعلم نفسه .

الإقبال على التعب راحة الهروب من التعب تعب

حل الواجب المنزلي

التمرين الأول:

(*) ABC مثلث متقايس الأضلاع بحيث:

$AB = AC = BC = 4$

H مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,1),(C,-3)\}$

معناه H تحقق: $\vec{HA} + \vec{HB} - 3\vec{HC} = \vec{0}$

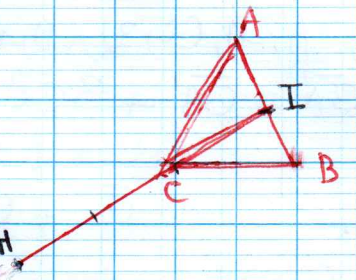
1) تعيين وإنشاء H:

(x) لتكن I مرجح النقطتين A و B المرفوقتين بالمعاملين 1 و 1 على الترتيب. أي I تحقق: $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ ؛ بتطبيق علاقة شال

$\vec{IA} + \vec{IA} + \vec{AB} = \vec{0}$ نجد:

$2\vec{IA} = -\vec{AB}$ ؛ $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

(I منتصف القطعة [AB])



بتطبيق خاصية التجميع نجد أن H مرجح الجملة المثقلة $\{(I,1+1),(C,-3)\}$

معناه: $\{(I,2),(C,-3)\}$

أي H تحقق: $2\vec{HI} - 3\vec{HC} = \vec{0}$

بتطبيق علاقة شال نجد:

$2\vec{HI} - 3\vec{HI} - 3\vec{IC} = \vec{0}$

أي: $-\vec{HI} = 3\vec{IC}$ ؛ $\vec{IH} = 3\vec{IC}$

ب) لدينا N مجموعة النقط من المستوى تحقق:

$\|\vec{NA} + \vec{NB} - 3\vec{NC}\| = \|\vec{NA} - 2\vec{NB} + \vec{NC}\|$

أ) تبيان أن: $\vec{NA} - 2\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{BA} + \vec{BC}$

$\vec{NA} - 2\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{NA} - \vec{NB} + \vec{NC} - \vec{NB}$

$\vec{NA} - 2\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{BN} + \vec{NA} + \vec{BN} + \vec{NC}$

بتطبيق علاقة شال نجد أن:

$\vec{NA} - 2\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{BA} + \vec{BC}$ و.ه.م

ب) نعلم بأن ABC مثلث متقايس الأضلاع وجميع زواياه متقايسة وقيس كل واحدة منها هو

$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$

من مجموعة النقط N نجد أن:

$\|\vec{NA} + \vec{NB} - 3\vec{NC}\| = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$

ولدينا H مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,1),(C,-3)\}$

إذن:

$\|\vec{NH} + \vec{HA} + \vec{NH} + \vec{HB} - 3\vec{NH} - 3\vec{HC}\| = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$

$\|-\vec{NH} + \vec{HA} + \vec{HB} - 3\vec{HC}\| = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$ ∴

ومنه: $\|-\vec{NH}\| = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$ معناه: $HN = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$

ولدينا من الطريقة المختارة:

$\|\vec{BA} + \vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + 2\|\vec{BA}\|.\|\vec{BC}\|\cos(\alpha)$

$\|\vec{BA} + \vec{BC}\|^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB.BC\cos(\alpha)$

$\|\vec{BA} + \vec{BC}\|^2 = 4^2 + 4^2 + 2.4.4.\cos(\frac{\pi}{3})$

$\|\vec{BA} + \vec{BC}\|^2 = 32 + 2.16.\frac{1}{2}$

$\|\vec{BA} + \vec{BC}\|^2 = 48$

إذن: $\|\vec{BA} + \vec{BC}\| = \sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = 4\sqrt{3}$

$HN = 4\sqrt{3}$

وفي الأخير نجد أن: و.ه.م

ومنه مجموعة النقط هي دائرة مركزها H ونصف قطرها $r = 4\sqrt{3}$ أي $\mathcal{C}(H, r = 4\sqrt{3})$.

التمرين الثاني:

(x) I منتصف القطعة [AD] معناه I تحقق:

$\vec{IA} + \vec{ID} = \vec{0}$ ... (1)

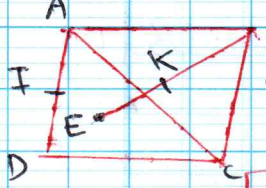
(x) E مركز ثقل المثلث ACD معناه E تحقق:

$\vec{EA} + \vec{EC} + \vec{ED} = \vec{0}$ ... (2)

(x) K منتصف القطعة [EB] معناه K تحقق:

$\vec{KE} + \vec{KB} = \vec{0}$ ... (3)

(x) F معرفة بالعلاقة: $\vec{AD} = 4\vec{BF}$ ... (4)



في متوازي أضلاع لدينا:

$\vec{AD} = \vec{BC}$ ... (5)

1) برهان أن K مرجح النقط المثقلة:
$\{(A,1),(B,3),(C,1),(D,1)\}$ أي
$\vec{EA}+\vec{EC}+\vec{EB}=\vec{0}$
لدينا العلاقة (2):
بتطبيق علاقة شال نجد:
$\vec{EK}+\vec{KA}+\vec{EK}+\vec{KC}+\vec{EK}+\vec{KB}=\vec{0}$
$3\vec{EK}+\vec{KA}+\vec{KC}+\vec{KB}=\vec{0}$ ... (*)
ولدينا من العلاقة (3): $\vec{KE}+\vec{KB}=\vec{0}$
$\vec{KB}=\vec{EK}$ أي $\vec{KB}=-\vec{KE}$ ومنه:
إذن بتعويض العلاقة (*) من الشكل:
$\vec{KA}+3\vec{KB}+\vec{KC}+\vec{KD}=\vec{0}$ ... (6)
ومنه K مرجح النقط المثقلة $(A,1)$ $(B,1)$ $(C,3)$ و $(D,1)$.

2) برهان أن النقط I، F و K في استقامية:
بتطبيق علاقة شال في العلاقة 6 نجد:
$\vec{KI}+\vec{IA}+\vec{KI}+\vec{ID}+3\vec{KB}+\vec{KC}=\vec{0}$
$2\vec{KI}+\vec{IA}+\vec{ID}+3\vec{KB}+\vec{KB}+\vec{BC}=\vec{0}$
$2\vec{KI}+4\vec{KB}+\vec{BC}=\vec{0}$
ولدينا من العلاقة (5): $\vec{AD}=\vec{BC}$
ومنه: $2\vec{KI}+4\vec{KB}+\vec{AD}=\vec{0}$
ولدينا من العلاقة (4): $\vec{AD}=4\vec{BF}$
إذن: $2\vec{KI}+4\vec{KB}+4\vec{BF}=\vec{0}$
$2\vec{KI}+4(\vec{KB}+\vec{BF})=\vec{0}$ ∴
$2\vec{KI}+4\vec{KF}=\vec{0}$ ∴
$\vec{KI}=-2\vec{KF}$ ∴
ومنه الشعاعين $\vec{KF}$ و $\vec{KI}$ مرتبطين خطيا
وبينهما نقطة مشتركة هي K. إذن النقط
I، F و K في استقامية.

3) برهان أن L، K و M في استقامية:
L مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,3)\}$ معناه يحقق:
$\vec{LA}+3\vec{LB}=\vec{0}$
M منتصف القطعة $[CD]$ معناه M يحقق:
$\vec{MC}+\vec{MD}=\vec{0}$
ولدينا من العلاقة (6): $\vec{KA}+\vec{KD}+3\vec{KB}+\vec{KC}=\vec{0}$
بتطبيق علاقة شال نجد:
$\vec{KL}+\vec{LA}+3\vec{KL}+3\vec{LB}+\vec{KM}+\vec{MC}+\vec{KM}+\vec{MD}=\vec{0}$
$4\vec{KL}+2\vec{KM}=\vec{0}$
$\vec{KM}=-2\vec{KL}$ ∴

وهذه الشعاعين $\vec{KL}$ و $\vec{KM}$ مرتبطين خطيا وبينهما
نقطة مشتركة هي K. إذن النقط L، K و M على
استقامة واحدة.

التمرين الثالث:

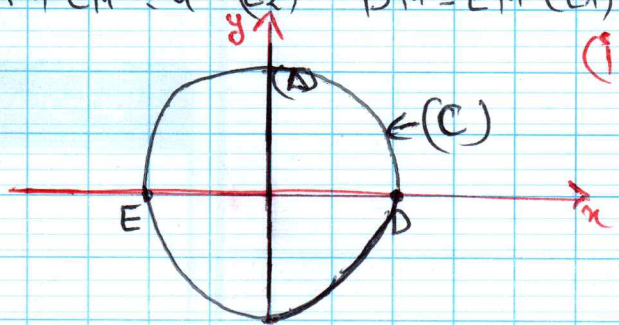
G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2),(B,-1),(C,3)\}$
معناه G يحقق: $2\vec{GA}-\vec{GB}+3\vec{GC}=\vec{0}$

1- تعيين مجموعة النقط:
أ) $\|2\vec{MA}-\vec{MB}+3\vec{MC}\|=\|\vec{MA}-\vec{MB}\|$
بتطبيق علاقة شال نجد:
$\|4\vec{MG}\|=\|\vec{BM}+\vec{MA}\|$
$4MG=BA$
ومنه $MG=\frac{BA}{4}$ مجموعة النقط هي دائرة
مركزها G ونصف قطرها $r=\frac{BA}{4}$

ب) بعد تطبيق علاقة شال نجد أن:
$MG\leq 1$ أي $4MG\leq 4$ مجموعة النقط هي
القرص المغلق مركزه G ونصف قطره $r=1$

ج) بعد تطبيق علاقة شال نجد: $8<4MG<16$
أي: $2<MG<4$ مجموعة النقط هي
الحلقة المفتوحة والمعرفة بـ: $A(G,r=2,R=4)$:

2) $M(x,y)$ ، $E(-1,0)$ ، $D(1,0)$
$DM=EM$ (E_1) $DM^2+EM^2=4$ (E_2)



أ) تعيين وإنشاء كل من (E_1) و (E_2)

$DM=EM$	$DM^2+EM^2=4$
معناه: $\sqrt{(x-x_D)^2+(y-y_D)^2}=\sqrt{(x-x_E)^2+(y-y_E)^2}$	$(x-x_D)^2+y^2+(x-x_E)^2+y^2=4$
$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$	$(x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4$
ومنه $(x-1)^2+y^2=(x+1)^2+y^2$	$x^2-2x+1+y^2+x^2+2x+1+y^2=4$
$x^2-2x+1-x^2-1-2x=0$	$2x^2+2y^2+2=4$
$-4x=0$	$2x^2+2y^2=2$
$x=0$	$x^2+y^2=1$
ومنه مجموعة النقط المستقيم محور القطعة $[ED]$ معادلته $x=0$	$(x-0)^2+(y-0)^2=1$
	$OM^2=1$ ؛ $OM=1$ ونصف قطر مجموعة النقط هي دائرة مركزها O ونصف قطرها $r=1$