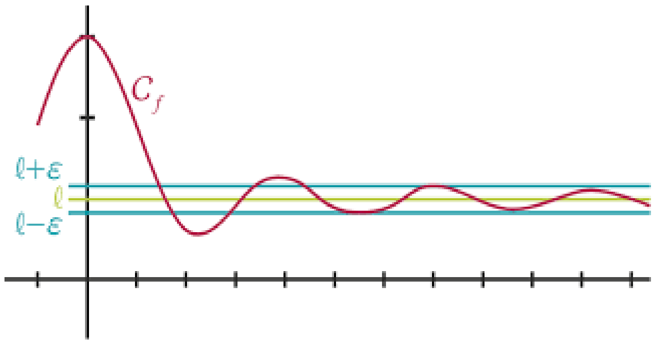
الرياضيات في الثانوية

تمارين في النهايات

و مسائل في دراسة الدوال العددية



للسنوات الثانية ثانوي

كتابة الأستاذ :

حنـــاش نبيـــل

Avril 2022

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

تذكير بحساب النهايات + دراسة دالة ناطقة

التمرين رقم 01 : أحسب النهايات التالية مع التفصيل في طريقة الحساب في كل حالة :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3+2x^2+1$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4+|x|^3-5x^2+2$

3) $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}3} -4-\dfrac{x+2}{x-3}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+3x^3+5x-2}{(x-3)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x}$

6) $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} 3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{2-x}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x-2}-x$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+2x-1}$

التمرين رقم 02 : أحسب النهايات التالية مع التفصيل في طريقة الحساب في كل حالة :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{(x+3)^2}$

2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-2x+1}$

3) $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-3} \dfrac{x+2}{x^2+3x}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{5x^2+x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$

6) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+4x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

10) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x-5}$

التمرين رقم 03 : أحسب النهايات التالية مع التفصيل في طريقة الحساب في كل حالة :

1) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+3}-3}$

4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x+1}+3x$

6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(\lambda x)}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{3x}$

8) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$

9) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 5x}{2x}$

11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{3x-\pi}$

12) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+4x}{x^2+\sin x}$

13) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x-1}{\tan^2 x}$

14) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$

15) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2\theta}{4\theta-\pi}$

16) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\theta-\pi}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos(x^2+1)}{x^2+1}$ (بالحصر)

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

حلول تمارين حساب النهايات

حل التمرين رقم 01 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3+2x^2+1=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3=-\infty$ (نهاية دالة كثير حدود عند ∞ تساوي إلى نهاية حدها الأعلى درجة)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4+|x|^3-5x^2+2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4-x^3-5x^2+2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$ لأن $|x|=-x$ لما $x<0$

3) لما $x\xrightarrow{<}3$ فإن $x+2\to5$ و $x-3\to0^-$ و منه نجد : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3} -4-\dfrac{x+2}{x-3}=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+3x^3+5x-2}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ (نهاية دالة ناطقة عند ∞ تساوي إلى نهاية حدها الأكبر درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام)

5) بما أن $\dfrac{1}{x^3}\to0$ و $\dfrac{2}{x}\to0$ لما $x\to+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x}=2+0+0=2$

6) بما أن $\dfrac{1}{x^3}\to\dfrac{1}{8}$ و $2-x\to0^-$ لما $x\xrightarrow{>}2$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} 3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{2-x}=-\infty$

7) بما أن $x^2+3x-2\to+\infty$ لما $x\to-\infty$ فإن $\sqrt{x^2+3x-2}\to+\infty$ و كذلك $-x\to+\infty$ لما $x\to-\infty$ و منه نجد $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x-2}-x=+\infty$

8) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ (نهاية دالة ناطقة) فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}=+\infty$

9) لإزالة حالة عدم التعيين نستعمل طريقة المرافق كما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+2x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+2x-1}\right)}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+2x-1}}$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+2-\left(x^2+2x-1\right)}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+2x-1}}$ أي

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+3}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+2x-1}}$ و منه

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}$$ و منه نجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+2x-1}=\frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=-\frac{1}{2}$$

حل التمرين رقم 02 :

1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-\infty}=\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ (نهاية دالة ناطقة حيث $\left((x+3)^2=x^2+6x+9\right)$

2) 1 جذر لكثيري الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ حيث : $P(x)=x^3+2x^2-3x$ و $Q(x)=x^2-2x+1$

لإزالة حالة عدم التعيين نستعمل القسمة الإقليدية لـ $P(x)$ و $Q(x)$ فنتحصل على :

$P(x)=(x-1)(x^2+3x)$ و $Q(x)=(x-1)^2$ و منه ينتج :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x}{x-1}$$ ؛ و بما أن $x^2+3x\to4$ لما $x\to1$

نميز حالتين :

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-2x+1}=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-2x+1}=+\infty$$

3) لما $x\xrightarrow{>}-3$ فإن $x+2\to-1$ و $x^2+3x\to0^-$ (شكل جدول إشارة ثنائي الحدود من الدرجة الثانية $(x^2+3x$ و منه نجد :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-3}\frac{x+2}{x^2+3x}=+\infty$$

4) لإزالة حالة عدم التعيين نستخرج العامل المشترك :

$$\lim_{x\to+\infty}2x-\sqrt{5x^2+x-2}=\lim_{x\to+\infty}2x-x\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

أي $$\lim_{x\to+\infty}2x-\sqrt{5x^2+x-2}=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$ أي :

$2-\sqrt{5}<0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{5x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\sqrt{5}\right)=-\infty$

5) لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل طريقة التحليل : نضع $P(x)=x^2+2x-15$ و بالقسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على $x-3$ نتحصل على : $P(x)=(x-3)(x+5)$ و منه $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x+5)}{x-3}$ أي

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim_{x\to3}x+5=8$$

6) لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل طريقة التحليل : نضع $P(x)=4x^2+3x-7$ و $Q(x)=x^2+2x-3$

بما أن 1 جذر لكثيري الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ و بالقسمة الإقليدية على $x-1$ نتحصل على :

$P(x)=(x-1)(4x+7)$ و $Q(x)=(x-1)(x+3)$ ؛ إذن :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)}$ أي $\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{4x+7}{x+3}=\frac{4\times1+7}{1+3}=\frac{11}{4}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+4x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$ أي

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+4x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2+0-0}-\sqrt{1+0+0}\right)$ و منه

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+4x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)x=+\infty$ لأن $\sqrt{2}-1>0$

8) -2 جذر لكثيري الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ حيث : $P(x)=x^2-4$ و $Q(x)=x^3+8$

لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل التحليل : $P(x)=(x-2)(x+2)$ (متطابقة شهيرة) و بالقسمة الإقليدية لـ $Q(x)$ على $x+2$ نجد $Q(x)=(x+2)(x^2-2x+4)$ ؛ إذن :

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}$ أي $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-2x+4}{x-2}$ ؛ إذن

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}=\frac{(-2)^2-2(-2)+4}{-2-2}=-3$$

9) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{(x-5)(x+5)}}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-5}\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-5}\sqrt{x-5}}$ ؛ إذن

$\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-5}}$ ؛ و بما أن $\sqrt{x+5}\to\sqrt{10}$ و $\sqrt{x-5}\to0^+$ لما $x\xrightarrow{>}5$ فإن

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-5}}=+\infty$$

حل التمرين رقم 03 :

1) لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل إحدى الطريقتين :

طريقة 01 : المرافق :

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

أي $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ ؛ إذن :

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\frac{1}{\sqrt{2-1}+1}=\frac{1}{2}$$

طريقة 02 : تعريف العدد المشتق :

$\lim\limits_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ حيث $g(x)=\sqrt{x-1}$

الدالة g معرفة على المغلق $[1,+\infty[$ و تقبل الإشتقاق على المفتوح $]1,+\infty[$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1,+\infty[$: $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ ؛ إذن :

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2-1}}=\frac{1}{2}$$

2) لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل المرافق للبسط و المقام معا كما يلي :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}$$ ؛ أي

أي $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to1}\frac{(5-x-4)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x+8-9)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}$$ $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}$$

أي $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to1}\frac{-\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\sqrt{5-x}+2}$$ ؛ إذن $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to1}\frac{-\sqrt{1+8}-3}{\sqrt{5-1}+2}=-\frac{3}{2}$$

3) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$ نستخرج العامل المشترك كما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+3}-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}-2}{\sqrt{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{1-\frac{3}{\sqrt{x}}}$$

و منه ينتج : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+3}-3}=\frac{1}{1}=1$$

4) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نكتب :

$$\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{1+2}\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$$ ؛ و باستعمال تعريف العدد المشتق عند 1

للدالة $g:x\mapsto x\sqrt{x}$ التي تقبل الإشتقاق بجوار 1 نتحصل على : $\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}g'(1)$ ؛ إذن :

$$\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}g'(1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{2}$$

5) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$ نستخرج العامل المشترك :

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+1}+3x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+3x=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+3x$ حيث $|x|=-x$

لأن $x<0$ ؛ إذن : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+1}+3x=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right)$ ؛ و بما أن $\frac{4}{x}\to0$ و

$\frac{1}{x^2}\to0$ لما $x\to-\infty$ نجد $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+1}+3x=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$

6) نستعمل النهاية الشهيرة $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$ (يمكن البرهان عليها بتعريف العدد المشتق للدالة $t\mapsto\sin t$ عند 0)

و بكتابة : $\lim_{x\to0}\frac{\sin\lambda x}{x}=\lim_{x\to0}\lambda\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\right)$ ؛ و بوضع $\lambda x=t\to0$ لما $x\to0$ نجد :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\lambda x}{x}=\lim_{t\to0}\lambda.\frac{\sin t}{t}=\lambda$$

7) نكتب $\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{4}{3}.\frac{\sin4x}{4x}$ ؛ و بوضع $4x=t\to0$ لما $x\to0$ ينتج :

$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\frac{4}{3}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\frac{4}{3}$ لأن $\frac{\sin t}{t}\to1$ لما $t\to0$.

8) نكتب $\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{4x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{4x}{\frac{3x.\sin3x}{3x}}$ ؛ إذن كما في المثال السابق نجد :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{4\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\frac{4}{3}$$

9) نعلم أنه إذا كان $\cos x\neq0$ فإن $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ؛ إذن ينتج :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\frac{1}{\cos 0}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{\cos 0}=1$ لأن $\cos 0=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

10) نكتب $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 5x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5}{2}\frac{\tan 5x}{5x}=\frac{5}{2}\lim\limits_{y\to0}\frac{\tan y}{y}=\frac{5}{2}$ بوضع $5x=y\to0$ لما $x\to0$ و باستعمال

نتيجة المثال السابق $\frac{\tan y}{y}\to1$ لما $y\to0$.

11) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نستعمل تعريف العدد المشتق :

نكتب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{3x-\pi}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$ ؛ و بوضع $g(x)=\cos x$ تقبل الإشتقاق بجوار $\frac{\pi}{3}$

و منه ينتج : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{3x-\pi}=\frac{1}{3}g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$ حيث $g':x\mapsto-\sin x$

12) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نكتب ما يلي :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+4x}{x^2+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(x+4)}{x\left(x+\frac{\sin x}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+4}{x+\frac{\sin x}{x}}$ حيث نعلم أن $\frac{\sin x}{x}\to1$ لما $x\to0$

إذن : $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+4x}{x^2+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+4}{x+1}=\frac{4}{1}=4$

13) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نكتب :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos x-1}{x^2}}{\frac{\tan^2 x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos x-1}{x^2}}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2}$ حيث نعلم أن $\frac{\tan x}{x}\to1$ لما

$x \to 0$ ؛ و من جهة أخرى : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}=-\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{\cos x+1}$

(ضرب البسط و المقام في $\cos x+1$) ؛ و بما أن :

$\frac{\sin x}{x}\to1$ لما $x\to0$ و منه $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{\cos 0+1}=-\frac{1}{2}$ ؛ إذن : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\tan^2 x}=-\frac{1}{2}$.

14) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نتبع ما يلي :

1 جذر لكثير الحدود $P(x)$ حيث $P(x)=x^4-1$ ؛ إذن بالقسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على $x-1$ نتحصل على :

$P(x)=(x-1)(1+x+x^2+x^3)$ ؛ و منه نجد :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(1+x+x^2+x^3)}{x-1}=\lim_{x\to1}1+x+x^2+x^3=1+1+1^2+1^3=4$$

15) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نستعمل تعريف العدد المشتق :

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta}{4\theta-\pi}=\frac{1}{4}\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta-\cos{\pi/2}}{\theta-{\pi/4}}=g'\left({\pi/4}\right)$ حيث $g:\theta\mapsto\cos 2\theta$ تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و

من أجل كل عدد حقيقي θ : $g'(\theta)=-2\sin 2\theta$ (مشتقة مركب دالتين) ؛ إذن :

$g'\left({\pi/4}\right)=-2\sin{\pi/2}=-2$ ؛ و منه ينتج : $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta}{4\theta-\pi}=-\frac{1}{2}$

16) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نستعمل تعريف العدد المشتق :

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{2}\cos{\theta/2}}{2\theta-\pi}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sqrt{2}\cos{\theta/2}-(-1)}{\theta-{\pi/2}}=\frac{1}{2}g'\left({\pi/2}\right)$ حيث $g(\theta)=-\sqrt{2}\cos{\theta/2}$ تقبل

الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا : $g'(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta/2$ (مشتقة مركب دالتين) ؛ إذن :

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{2}\cos\theta/2}{2\theta-\pi}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\pi/4=\frac{1}{4}$$ لأن $\sin\pi/4=\frac{\sqrt{2}}{2}$

17) لحساب النهاية يمكن مثلا إستعمال مبرهنة المقارنة (تدرس في برنامج السنة الثالثة) :

ليكن $x>0$: $-1\le\cos\left(x^2+1\right)\le 1$ ؛ و منه $-x\le x\cos\left(x^2+1\right)\le x$ ؛ إذن ينتج الحصر :

$-\frac{x}{x^2+1}\le\frac{x\cos\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\le\frac{x}{x^2+1}$ ؛ و بالمرور إلى النهاية لما $x\to+\infty$ علما أن :

$\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$ فإنه حسب مبرهنة الحصر نستنتج أن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=0}$

إنتهى حل التمارين ...

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+3}{x-2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين العددين α و β حتى يشمل المنحنى (C_f) النقطة $A(3;3)$ و يقبل عندها مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

- نعتبر فيما يلي : $\alpha=1$ ، $\beta=-3$.

2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف ؛ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلته

3) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x-1+\dfrac{a}{x-2}$ حيث a ثابت يطلب تعيينه .

4) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{2\}$: $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

5) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

6) بين أن المستقيم (Δ) الذي $y=x-1$ معادلة له مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

7) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

8) أوجد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f) .

9) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ فإن : $4-x\in D_f$ و $f(4-x)+f(x)=2$ ؛

ماذا تستنتج ؟

10) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الإحداثيات $\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$.

11) أرسم (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) .

12) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)-x=m$.

13) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{|x-2|}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

✓ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) إعتمادا على (C_f) ثم أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق .

حل مقترح :

1- تعيين العددين α و β حتى يشمل المنحنى $\left(C_f\right)$ النقطة $A(3;3)$ و يقبل عندها مماسا يوازي حامل محور الفواصل :

معناه $\begin{cases} f(3)=3 \\ f'(3)=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 9\alpha+3\beta+3=3 \\ -3\alpha-2\beta-3=0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 3\alpha+\beta=0 \\ -3\alpha-2\beta=3 \end{cases}$ و بالجمع نجد $-\beta=3$ أي $\beta=-3$ ؛ و بالتالي $\alpha={-\beta}/{3}=1$.

2- حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف ؛ ثم إستنتاج أن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلته :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty \end{cases} \Leftarrow$$ ***التفسير الهندسي :***

المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=2$.

3- نبين انه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x-1+\dfrac{a}{x-2}$ حيث a ثابت يطلب تعيينه :

بتوحيد المقامات نتحصل على $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2+a}{x-2}$ ثم بالمطابقة مع العبارة $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ نجد :

$2+a=3$ و منه

$a=1$ ؛ إذن : $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$

4- نبين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{2\}$: $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$:

f تقبل الإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$ حيث : $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-2)^2}$ أي

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+4-1}{(x-2)^2}$ و منه $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ و هو المطلوب .

5- دراسة تغيرات الدالة f :

$f'(x)=0$ تكافئ $x^2-4x+3=0$ و $x\neq 2$

$\Delta=4$ و منه : $x=3$ أو $x=1$

x	$-\infty$ 1 3 $+\infty$
x^2-4x+3	+ 0 − 0 +

على المجالين $]-\infty,1]$ و $[3,+\infty[$: $f'(x)\geq 0$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,1]$ و على المجال $[3,+\infty[$.

على المجالين $]1,2[$ و $]2,3]$: $f'(x)\leq 0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]1,2[$ و $]2,3]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

6- نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

و منه نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$.

7- دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :

على المجال $]-\infty,2[$: لدينا $\dfrac{1}{x-2}\prec 0$ و منه فالمنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

على المجال $]2,+\infty[$: لدينا $\dfrac{1}{x-2}\succ 0$ و منه فالمنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

المعادلة $\frac{1}{x-2}=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}-\{2\}$ و منه المنحنى (C_f) لا يقطع المستقيم (Δ) .

8- إيجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f) :

من أجل $x=2$ نجد : $y=2-1$ أي $y=1$

و منه نجد : $\omega(2;1)$.

9- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ فإن : $4-x\in D_f$ و $f(4-x)+f(x)=2$:

$x\in D_f$ معناه $x\neq 2$ و منه $-x\neq -2$ و منه $4-x\neq 2$ أي $4-x\in D_f$

$f(4-x)+f(x)=2$ (بالحساب)

الاستنتاج : النقطة $\omega(2;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

10- كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الإحداثيات $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ حيث :

$f'(0)=3/4$ و منه نجد :

$$(T): y=3/4\,x-3/2$$

11- رسم (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) :

12- **المناقشة البيانية :**

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات المائلة (Δ_m) التي معادلتها من الشكل : $y=x+m$ حيث $m\in\mathbb{R}$.

* من أجل $m=-1$: المعادلة $f(x)=x-1$ لا تقبل حلولا ($y=x-1$ هي معادلة المقارب المائل (Δ))

* من أجل $m\succ -1$ أي $m\in]-1,+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا وحيدا موجبا تماما .

* من أجل $m=-3/2$: المعادلة $f(x)=x-3/2$ تقبل حلا وحيدا معدوما .

* من أجل $-3/2\prec m\prec -1$ أي $m\in]-3/2,-1[$ المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا وحيدا سالبا تماما .

* من أجل $m \prec -\frac{3}{2}$ أي $m \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$:

المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا موجبا تماما .

13- شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) إعتمادا على (C_f) ثم إنشاء (C_g) في نفس المعلم السابق :

بحساب مميز ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 3$ نجد أن :

$\Delta = -3 \prec 0$ و بالتالي المقدار $x^2 - 3x + 3$ لا ينعدم على $\mathbb{R}$ و تكون إشارته موجبة تماما أي :

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $x^2 - 3x + 3 \succ 0$

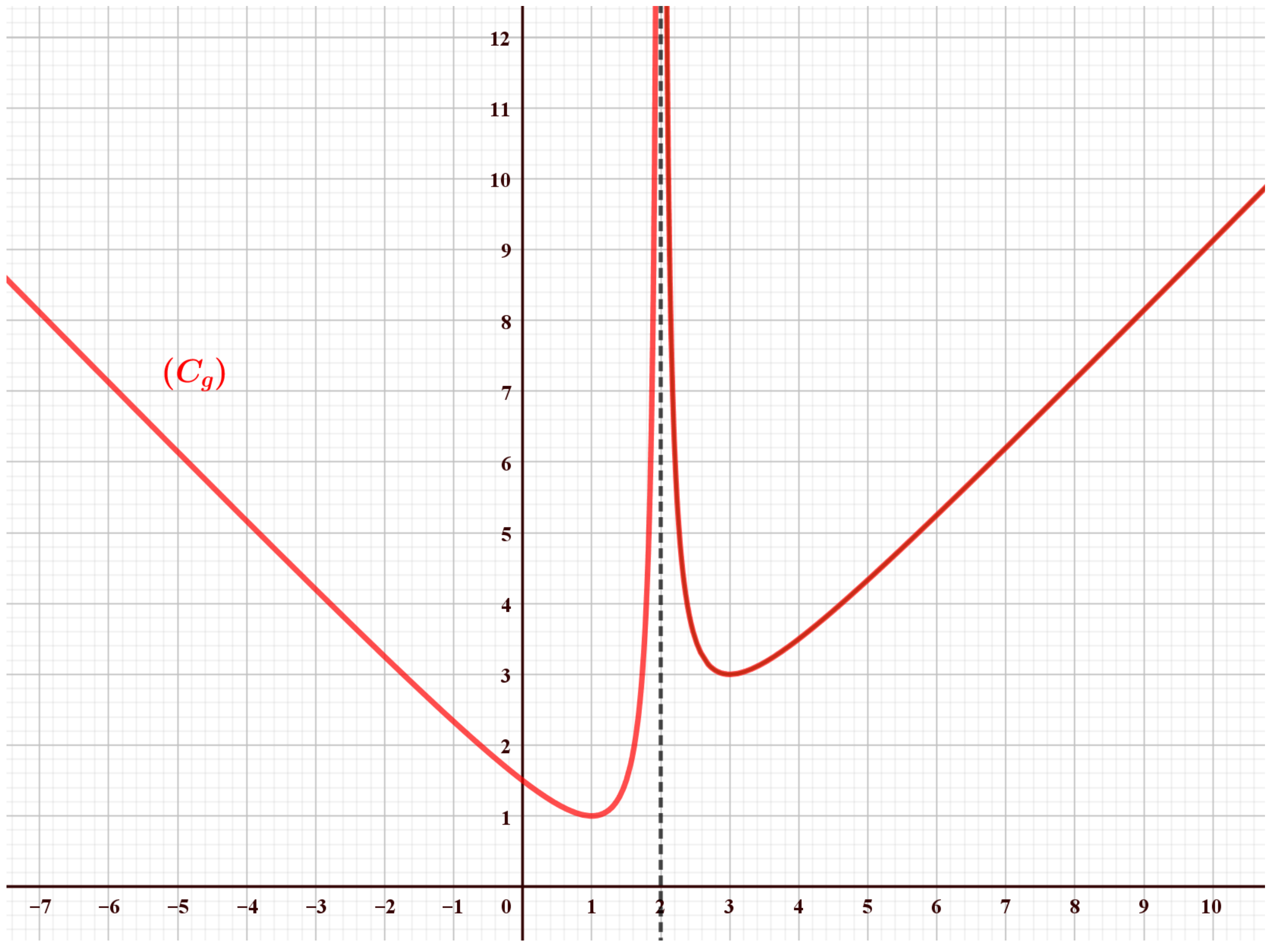
و منه نكتب : $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{|x-2|} = \left|\dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-2}\right|$ إذن

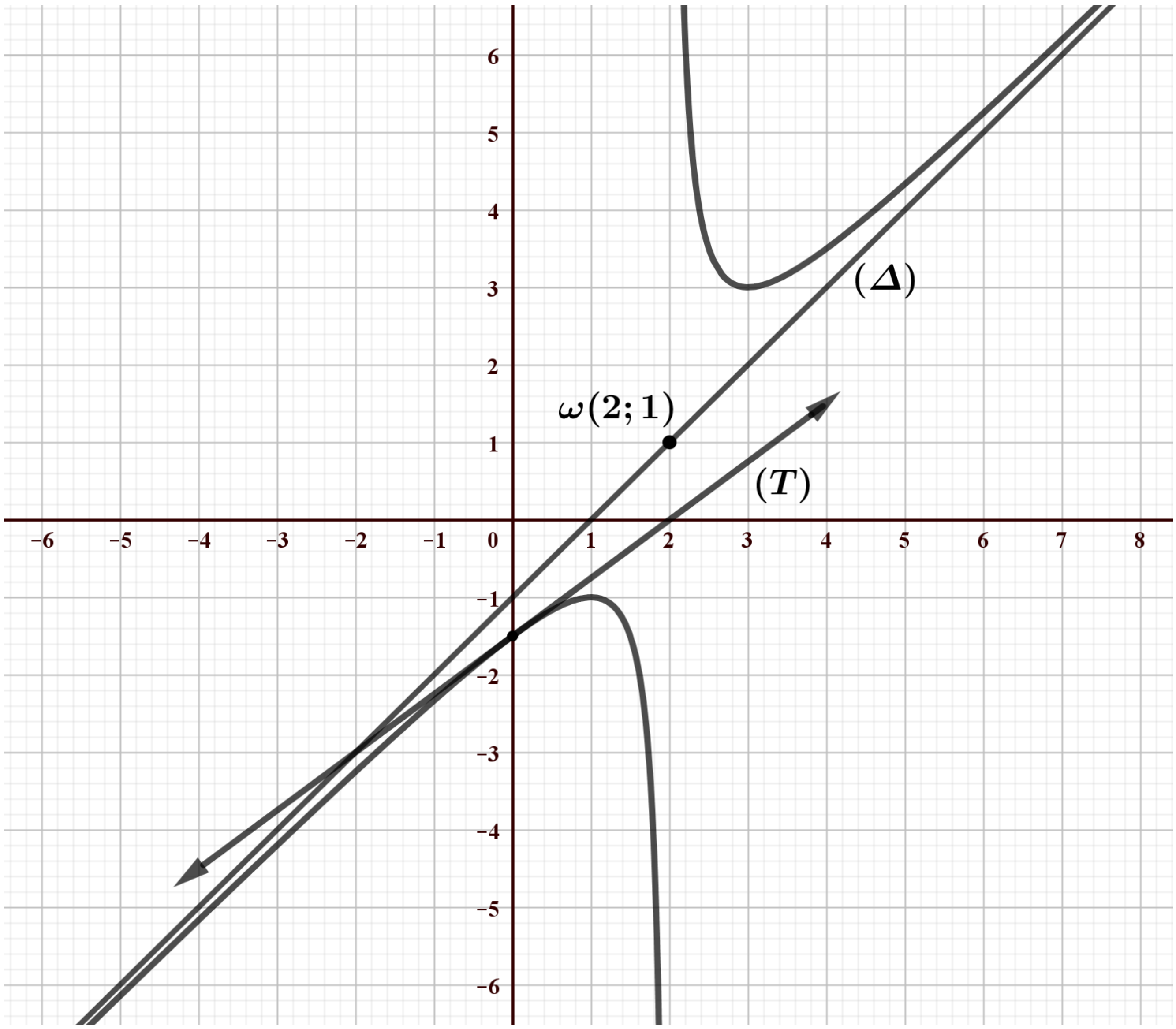
من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ فإن $g(x) = |f(x)|$

* (C_g) ينطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق حامل محور الفواصل .

* (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل .

الإنشاء الهندسي :





كتابة الأستاذ : حناش نبيل

التمرين رقم 75 ص 32 :

f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن المستقيم (Δ) الذي $y=2x+3$ معادلة له مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

2) أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) .

التمرين رقم 76 ص 32 :

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3) أحسب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$

4) إستنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما .

5) حدد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

التمرين رقم 75 ص 32 :

f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) نبين أن المستقيم (Δ) الذي $y=2x+3$ معادلة له مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

يكفي أن نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=0$ حيث :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\sqrt{x^2+4x}-2x-3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x-2\right)$$ أي

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}=0$$ و منه نستنتج أن

المستقيم (Δ) الذي $y=2x+3$ معادلة له مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

2) دراسة الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) :

من أجل كل $x\geq 0$ لدينا : $$f(x)-y=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}$$

و بما أن $\sqrt{x^2+4x}+x+2>0$ من أجل كل $x\geq 0$ فإن $f(x)-y<0$ على المجال $[0,+\infty[$ و منه المنحنى (C) يقع تحت المقارب المائل (Δ) .

التمرين رقم 76 ص 32 :

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تعيين D مجموعة تعريف الدالة f :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $|x^2-1|\geq 0$ و بالتالي المقدار $\sqrt{|x^2-1|}$ معرف من أجل كل $x\in\mathbb{R}$

إذن مجموعة تعريف الدالة f هي : $D=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

2) حساب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right)$$

لأن $x^2-1>0$ عندما $x\to+\infty$ و منه ينتج :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}+1\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x-x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right)$$

لأن $x^2-1>0$ عندما $x\to-\infty$ و منه ينتج :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}-1\right)x=\lim_{x\to-\infty}-\frac{3}{2}x=+\infty$$

تذكير :

$$\begin{cases}\sqrt{x^2}=|x|=x, & x\geq 0\\ \sqrt{x^2}=|x|=-x, & x\leq 0\end{cases}$$

3) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}+\frac{3}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]$$ أي

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=0$ لأن $x-\sqrt{x^2-1}\to-\infty$ **عندما** $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$ لأن

$\sqrt{x^2-1}+x\to+\infty$ **عندما** $x\to+\infty$

4) إستنتاج أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما :

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]=0$ **فإن المستقيم** (Δ) **الذي** $y=-\frac{3}{2}x$ **معادلة له مقارب مائل لـ** (C) **عند** $-\infty$ **و بما أن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=0$ **فإن المستقيم** (Δ') **الذي** $y=\frac{1}{2}x$ **معادلة له مقارب مائل لـ** (C) **عند** $+\infty$.

5) أ- تحديد الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة إلى (Δ) :

من أجل كل عدد حقيقي x **لدينا :** $f(x)+\frac{3}{2}x=x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}$ ؛ **نضع :** $x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}=0$

- **إذا كان** $x\geq0$ **فإن** $x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}\geq1$ **و بالتالي المعادلة** $x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}=0$ **مستحيلة الحل .**
- **إذا كان** $x<0$ **:** $x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}=0$ **يكافئ** $\sqrt{\left|x^2-1\right|}=-x$ **يكافئ** $\left|x^2-1\right|=x^2$ **يكافئ**

$x^2-1=x^2$ **مستحيلة الحل أو** $x^2-1=-x^2$ **يكافئ** $2x^2=1$ **يكافئ** $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**لأن** $x<0$)

ثم نلخص إشارة المقدار $x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}$ **في جدول :**

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$	$-$	0	$+$

و منه نستنتج أن :

- إذا كان $x\in\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ فإن $f(x)+\frac{3}{2}x<0$ و منه يكون (C) تحت المقارب (Δ) .
- إذا كان $x\in\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ فإن $f(x)+\frac{3}{2}x>0$ و منه يكون (C) فوق المقارب (Δ) .
- إذا كان $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f(x)+\frac{3}{2}x=0$ و منه المنحني (C) يقطع المقارب (Δ) .

ب) تحديد الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة إلى (Δ') :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)-\frac{1}{2}x=-x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$ ؛ نضع : $-x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}=0$

- إذا كان $x\leq 0$ فإن $-x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}\geq 1$ و بالتالي المعادلة $-x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}=0$ مستحيلة الحل .
- إذا كان $x>0$: $-x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}=0$ يكافئ $\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}=x$ يكافئ $\lvert x^2-1\rvert=x^2$ يكافئ

$x^2-1=x^2$ مستحيلة الحل أو $x^2-1=-x^2$ يكافئ $2x^2=1$ يكافئ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (لأن $x>0$)

ثم نلخص إشارة المقدار $-x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$ في جدول :

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$-x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$	$+$	0	$-$

و منه نستنتج أن :

- إذا كان $x\in\left]-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ فإن $f(x)-\frac{1}{2}x>0$ و منه يكون (C) فوق المقارب (Δ') .
- إذا كان $x\in\left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ فإن $f(x)-\frac{1}{2}x<0$ و منه يكون (C) تحت المقارب (Δ') .
- إذا كان $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f(x)-\frac{1}{2}x=0$ و منه المنحني (C) يقطع المقارب (Δ') .

إنتهى حل التمرين ...

التمرين رقم 85 ص 67 من الكتاب المدرسي - بتصرف -

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2) أدرس تغيرات الدالة f (نهايات ، إتجاه التغير ، جدول تغيرات) .

3) إستنتج معادلة للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) .

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 5 .

5) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي $x=1$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) .

6) أنشئ المنحنى (C_f) .

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m^2$.

8) نعتبر الدالة f_m المعرفة بـ : $f_m(x)=\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$ حيث m وسيط حقيقي .

(C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) أدرس تغيرات الدالة f_m و إستنتج معادلة للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_m) .

ب) بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) .

جـ) ما هو المنحني الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(4;1)$ ؟

تتكون الرياضيات من إثبات الشيئ الأكثر وضوحا بأقل الطرق وضوحا

جورج بوليا ...

حل التمرين رقم 85 ص 67 من الكتاب المدرسي - بتصرف -

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تحديد D مجموعة تعريف الدالة f :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2-2x-3\neq 0$ حيث أن ثلاثي الحدود x^2-2x-3 ينعدم من أجل $x=\frac{2+\sqrt{16}}{2}$ أي $x=3$ أو $x=\frac{2-\sqrt{16}}{2}$ أي $x=-1$ ($\Delta=(-2)^2-4(1)(-3)=16>0$)

و منه تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x\neq 3$ و $x\neq -1$ و منه $D_f=\mathbb{R}-\{-1,3\}$

2) دراسة تغيرات الدالة f (نهايات ، إتجاه التغير ، جدول تغيرات) :

$$\begin{cases}
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\\
\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\\
\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=-\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{12}{x^2-2x-3}=-\infty\\
\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=-\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{12}{x^2-2x-3}=+\infty\\
\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=-\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\frac{12}{x^2-2x-3}=+\infty\\
\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=-\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\frac{12}{x^2-2x-3}=-\infty
\end{cases}$$

(**إرشاد** : أدرس حسب قيم x إشارة المقام x^2-2x-3)

الدالة f تقبل الإشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل $x\in D_f$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(x^2-2x-15)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} \quad \text{أي} \quad f'(x)=\frac{24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$$

من أجل كل $x\in D_f$ فإن $(x^2-2x-3)^2>0$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ على D_f من إشارة $x-1$:

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,1]$ فإن $f'(x)\leq 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على كل من

المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-1,1]$.

- إذا كان $x\in[1,3[\cup]3,+\infty[$ فإن $f'(x)\geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[1,3[$ و $]3,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$		‖	$+\infty \searrow$	4	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

3) التفسير الهندسي : بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ فإن المستقيم الذي $y=1$ معادلة له مقارب أفقي للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$

بما أن $\lim_{x \underset{>}{\overset{<}{\to}} -1} f(x)=\mp\infty$ فإن المستقيم الذي $x=-1$ معادلة له مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

بما أن $\lim_{x \underset{>}{\overset{<}{\to}} 3} f(x)=\pm\infty$ فإن المستقيم الذي $x=3$ معادلة له مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 5 :

لدينا : $(T): y=f'(5)(x-5)+f(5)$ حيث $f'(5)=\dfrac{24(5-1)}{\left((5)^2-2(5)-3\right)^2}=\dfrac{2}{3}$ و $f(5)=0$

إذن : $(T): y=\dfrac{2}{3}(x-5)$ أي $\boxed{(T): y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{10}{3}}$

5) إثبات أن المستقيم (Δ) الذي $x=1$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_f) :

يكفي أن نتحقق من الشرطين : من أجل كل $x\in D_f$ فإن : $2-x\in D_f$ و $f(2-x)=f(x)$

$x\in D_f$ معناه $x\neq -1$ و $x\neq 3$ و منه $-x\neq 1$ و $-x\neq -3$ و منه يكون $2-x\neq 3$ و $2-x\neq -1$

على الترتيب ، إذن $2-x\in\mathbb{R}-\{-1,3\}$ أي $2-x\in D_f$

و من أجل كل $x\in D_f$ لدينا : $f(2-x)=\dfrac{(2-x)^2-2(2-x)-15}{(2-x)^2-2(2-x)-3}=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=f(x)$

إذن نستنتج أن المستقيم الذي $x=1$ محور تناظر للمنحني (C_f) .

7) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m^2$:

حلول المعادلة $f(x)=m^2$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات الأفقية (Δ_m) التي لها معادلات من الشكل $y=m^2$ (نوع المناقشة أفقية) حيث من أجل كل عدد حقيقي m فإن $m^2\geq 0$ و بالتالي جميع المستقيمات (Δ_m) تقع فوق حامل محور الفواصل أو تنطبق عليه .

- إذا كان $m^2=0$ أي $m=0$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=0$ معادلة له (حامل محور الفواصل) في نقطتين متمايزتين فاصلة إحداهما هي -3 و فاصلة الأخرى هي 5 و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين متمايزين في الإشارة هما $x_1=-3$ و $x_2=5$.
- إذا كان $0<m^2<1$ أي $0<m<1$ أو $-1<m<0$ أي $m\in]-1,0[\cup]0,1]$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=m^2$ في نقطتين متمايزتين فاصلة إحداهما عدد موجب تماما و فاصلة الأخرى عدد سالب تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2$ تقبل حلين متمايزين في الإشارة .
- إذا كان $1\leq m^2<4$ أي $1\leq m<2$ أو $-2<m\leq -1$ أي $m\in]-2,-1]\cup[1,2[$ فإن المنحني (C_f) لا يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=m^2$ معادلة له و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2$ لا تقبل حلولا .
- إذا كان $m^2=4$ أي $m=-2$ أو $m=2$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=4$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات الفاصلة 1 و بالتالي المعادلة $f(x)=4$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما و يساوي 1 (بعض المراجع تسميه حلا مضاعفا لوجود ذروة للمنحني) .
- إذا كان $4<m^2<5$ أي $-\sqrt{5}<m<-2$ أو $2<m<\sqrt{5}$ أي $m\in\left]-\sqrt{5},-2\right[\cup\left]2,\sqrt{5}\right[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=m^2$ معادلة له في نقطتين متمايزتين كل منهما ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2$ تقبل حلين متمايزين موجبين تماما .
- إذا كان $m^2=5$ أي $m=-\sqrt{5}$ أو $m=\sqrt{5}$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=5$ معادلة له في نقطتين متمايزتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى ذات فاصلة موجبة تماما و تساوي 2 و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2$ تقبل حلين متمايزين هما 0 و 2 .

إذا كان $m^2>5$ أي $m<-\sqrt{5}$ أو $m>\sqrt{5}$ أي $m\in\left]-\infty,-\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5},+\infty\right[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلة له $y=m^2$ في نقطتين متمايزتين إحداهما ذات فاصلة سالبة تماما و الأخرى ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2$ تقبل حلين متمايزين في الإشارة .

8) نعتبر الدالة f_m المعرفة بـ : $f_m(x)=\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$ حيث m وسيط حقيقي .

(C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) دراسة تغيرات الدالة f_m و إستنتاج معادلة للمستقيمات المقاربة للمنحنى (C_m) :

تكون الدالة f_m معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2-mx-3\neq 0$ حيث مميز ثلاثي الحدود x^2-mx-3 هو : $\Delta_m=(-m)^2-4(1)(-3)=m^2+12>0$ من أجل كل عدد حقيقي m ، إذن المعادلة $x^2-mx-3=0$ تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\dfrac{m-\sqrt{m^2+12}}{2}$ و $x_2=\dfrac{m+\sqrt{m^2+12}}{2}$ و بالتالي نستنتج أن :

$$\boxed{D_{f_m}=\mathbb{R}-\{x_1,x_2\}=\left]-\infty,x_1\right[\cup\left]x_1,x_2\right[\cup\left]x_2,+\infty\right[}$$

نهايات الدالة f_m عند أطراف مجموعة التعريف :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_1} f_m(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_1}\dfrac{-15}{x^2-mx-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_1} f_m(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_1}\dfrac{-15}{x^2-mx-3}=+\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_2} f_m(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_2}\dfrac{-12}{x^2-mx-3}=+\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_2} f_m(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_2}\dfrac{-12}{x^2-mx-3}=-\infty\end{cases}$$

(**إرشاد** : أحسب قيمة البسط من أجل $x=\dfrac{m-\sqrt{m^2+12}}{2}$ ثم من أجل $x=\dfrac{m+\sqrt{m^2+12}}{2}$ و شكل جدول إشارة المقام x^2-mx-3 حسب قيم x)

التفسير الهندسي : بما أن $\lim_{|x|\to+\infty} f_m(x)=1$ فإن المستقيم الذي $y=1$ معادلة له مقارب أفقي للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$

بما أن $\lim_{x \underset{>}{\overset{<}{\longrightarrow}} x_1} f_m(x)=\mp\infty$ فإن المستقيم الذي $x=\dfrac{m-\sqrt{m^2+12}}{2}$ معادلة له مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

بما أن $\lim_{x \underset{>}{\overset{<}{\longrightarrow}} x_2} f_m(x)=\pm\infty$ فإن المستقيم الذي $x=\dfrac{m+\sqrt{m^2+12}}{2}$ معادلة له مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

الدالة f_m تقبل الإشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل $x\in D_{f_m}$ لدينا :

$$f_m'(x)=\frac{(2x-m)(x^2-mx-3)-(x^2-mx-15)(2x-m)}{(x^2-mx-3)^2}$$ أي

$f_m'(x)=\dfrac{24x-12m}{(x^2-mx-3)^2}=\dfrac{12(2x-m)}{(x^2-mx-3)^2}$ حيث من أجل كل $x\in D_{f_m}$ فإن $(x^2-mx-3)^2>0$ و

بالتالي إشارة $f_m'(x)$ من إشارة $2x-m$:

- إذا كان $2x-m\le 0$ أي $m\in\left]-\infty,x_1\right[\cup\left]x_1,\dfrac{m}{2}\right]$ فإن $f_m'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة f_m متناقصة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty,x_1\right[$ و $\left]x_1,\dfrac{m}{2}\right]$.
- إذا كان $2x-m\ge 0$ أي $x\in\left[\dfrac{m}{2},x_2\right[\cup\left]x_2,+\infty\right[$ فإن $f_m'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة f_m متزايدة تماما على كل من المجالين $\left[\dfrac{m}{2},x_2\right[$ و $\left]x_2,+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة f_m :

x	$-\infty$		x_1		$m/2$		x_2		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f_m(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f_m(m/2)$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1

ب) نبين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) :

نفرض أنه توجد نقطة وحيدة $A(x_0;y_0)$ تنتمي إلى جميع المنحنيات (C_m) و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي m فإنه ينتج : $\frac{x_0{}^2-2mx_0-15}{x_0{}^2-2mx_0-3}=y_0$ أي من أجل كل عدد حقيقي m فإن :

$x_0{}^2-2mx_0-15=y_0\left(x_0{}^2-2mx_0-3\right)$ **أي** $(2x_0y_0-2x_0)m-x_0{}^2y_0+x_0{}^2-3y_0-15=0$

و منه ينتج : $\begin{cases}2x_0y_0-2x_0=0\\-x_0{}^2y_0+x_0{}^2+3y_0-15=0\end{cases}$ **يكافئ** $\boxed{\begin{cases}2x_0(y_0-1)=0\\-x_0{}^2(y_0-1)+3y_0=15\end{cases}}$

من المعادلة الأولى ينتج $x_0=0$ أو $y_0=1$ ؛ إذن نناقش الحالتين كلا على حدى :

✓ **إذا كان $x_0=0$ و بالتعويض في المعادلة الثانية نتحصل على $3y_0=15$ و منه $y_0=5$**

إذن $(x_0;y_0)=(0;5)$

✓ **إذا كان $y_0=1$ و بالتعويض في المعادلة الثانية نتحصل على $-x_0{}^2(1-1)+3(1)=15$ و منه ينتج**

$3=15$ تناقض .

❖ **نتيجة : جميع المنحنيات (C_m) تمر من نقطة وحيدة هي $A(0;5)$.**

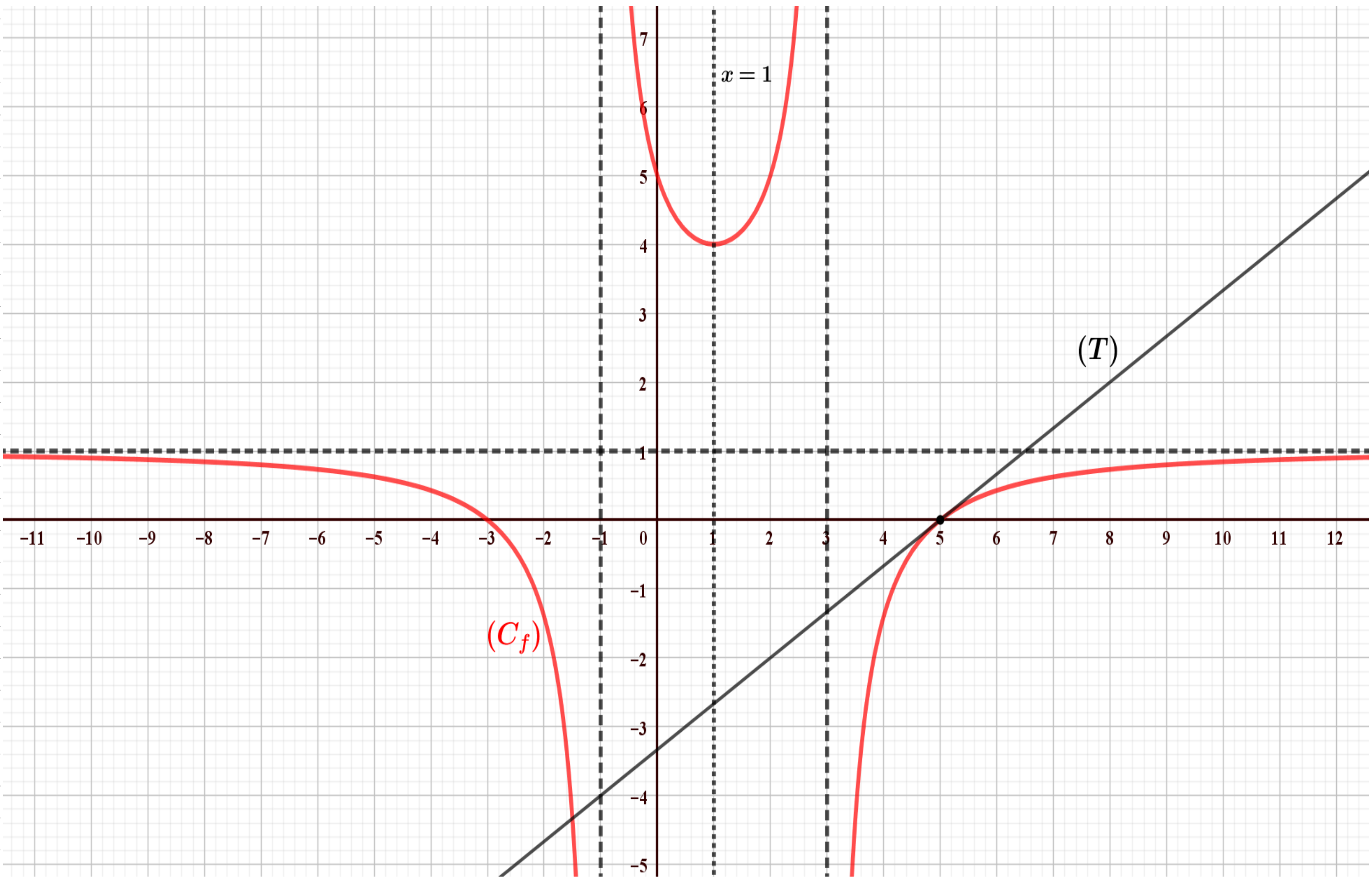
جـ) تعيين المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(4;1)$:

نفرض أنه يوجد عدد حقيقي m حيث المنحني (C_m) يشمل النقطة التي إحداثياها $(4;1)$ و بالتالي نتحصل على المعادلة ذات المجهول m التالية :

$\frac{(4)^2-2(4)m-15}{(4)^2-2(4)m-3}=1$ أي $\frac{1-8m}{13-8m}=1$ أي $1-8m=13-8m$ أي $1=13$ تناقض .

و بالتالي لا يوجد $m\in\mathbb{R}$ يحقق المعادلة $f_m(4)=1$.

نتيجة : لا يوجد عدد حقيقي m حيث المنحني (C_m) يشمل النقطة التي إحداثياها $(4;1)$.



إنتهى حل التمرين ...

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

دراسة دالة مثلثية رقم 01 :

f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2- تحقق أن الدالة f و دورها هو 2π (الدور هو **أصغر** عدد حقيقي غير معدوم T يحقق : من أجل كل عدد $x\in D_f$ ، $x+T\in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$) .

3- من أجل كل عدد حقيقي x قارن بين العددين $f(\pi-x)$ و $f(x)$ ؛ فسر النتيجة هندسيا .

4- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ؛ ثم أحسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $-\dfrac{\pi}{2}$

5- بالإعتماد على نتائج الدراسة السابقة أنشئ المنحنى (C_f) .

دراسة دالة مثلثية رقم 02 :

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2- برر أن الدالة f قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها .

3- من أجل كل عدد حقيقي x ، أحسب $f(x+2\pi)$ و $f(-x)$. ماذا يمكن القول عن المنحنى الممثل للدالة f ؟ إستنتج أنه يمكن إقتصار دراسة الدالة f على المجال $[0,\pi]$ من أجل إنشاء المنحنى (C_f) .

4- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)'=\dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$

5- أدرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ على المجال $[0,\pi]$.

6- إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,\pi]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

7- أنشئ المنحنى (C_f) .

حل التمرين رقم 01 :

f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-تحديد D_f مجموعة تعريف الدالة f :

f معرفة إذا و فقط إذا كان $1+\sin x \neq 0$ أي $\sin x \neq -1$ و بالإعتماد على الدائرة المثلثية نعلم أن $\sin x=-1$ إذا و فقط إذا كان $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ و منه نستنتج أن :

$$\boxed{D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

2- التحقق أن الدالة f و دورها هو 2π (الدور هو <u>أصغر</u> عدد حقيقي غير معدوم T يحقق : من أجل كل عدد $x\in D_f$ ، $x+T\in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$) :

ليكن $x\in D_f$ ؛ معناه $x\neq-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ و منه $x+2\pi\neq-\dfrac{\pi}{2}+(k+1)2\pi$ أي $x+2\pi\neq-\dfrac{\pi}{2}+k'2\pi$ حيث $k'=k+1\in\mathbb{Z}$ و منه يكون $x+2\pi\in D_f$ ؛ و من جهة أخرى :

$f(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)}=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}=f(x)$ لأن الدالة $\sin$ دورية و دورها هو 2π (من مكتسبات السنة أولى ثانوي) ؛ إذن الدالة f دورية و دورها هو 2π .

3- من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ المقارنة بين العددين $f(\pi-x)$ و $f(x)$:

ليكن $x\in D_f$: $f(\pi-x)=\dfrac{\sin(\pi-x)}{1+\sin(\pi-x)}=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}=f(x)$ لأنه من أجل كل عدد $x\in D_f$

نعلم أن : $\sin(\pi-x)=\sin x$ (أنظر الدائرة المثلثية) و بالتالي يكون من أجل كل عدد $x\in D_f$:

$f\left(2\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$ (من الشكل $f(2a-x)=f(x)$ حيث $a=\frac{\pi}{2}$) ؛ إذن نستنتج أن المستقيم الذي $x=\frac{\pi}{2}$ (مستقيم عمودي يوازي محور التراتيب) هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

4- دراسة تغيرات الدالة f على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ؛ ثم حساب $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)$:

f معرفة و تقبل الإشتقاق على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ و لدينا من أجل كل $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\sin x)-\sin x\cos x}{(1+\sin x)^2}=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

حيث من أجل كل عدد $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $(1+\sin x)^2>0$ و من أجل كل $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos x>0$ و $\cos x=0$ من أجل $x=\frac{\pi}{2}$ ؛ إذن من أجل كل $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ يكون $\cos x\geq 0$ و بالتالي تكون $f'(x)\geq 0$ أي أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{1+\sin x}=-\infty$$

لأن $1+\sin x\to 0^+$ عندما $x\xrightarrow{>}-\frac{\pi}{2}$

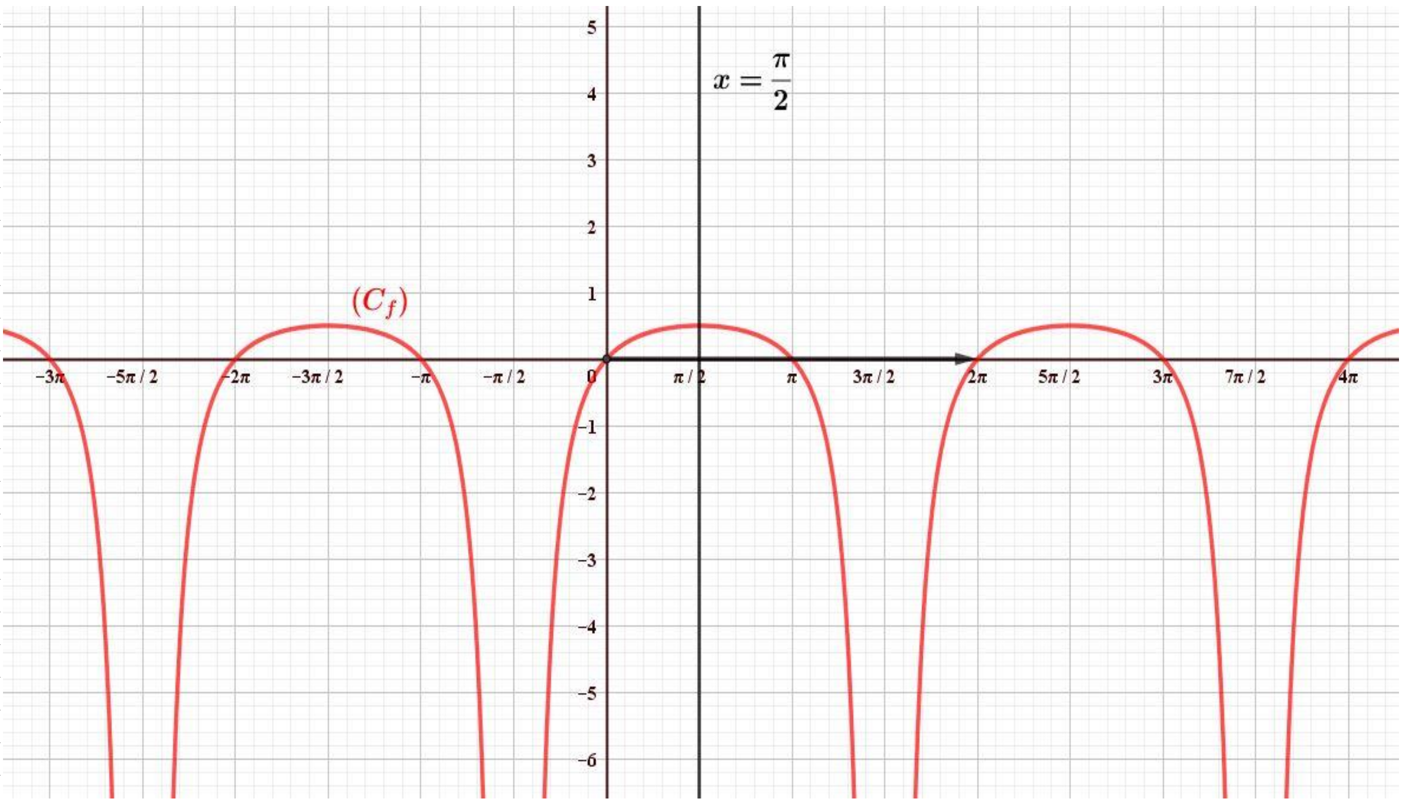
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	0
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

5- بالإعتماد على نتائج الدراسة السابقة شرح كيفية إنشاء المنحنى $\left(C_f\right)$:

بالإعتماد فقط على النتائج السابقة ننشئ المنحنى $\left(C_f\right)$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ثم نستنتج $\left(C_f\right)$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي $x=\frac{\pi}{2}$ معادلة له .

و بما أن الدالة f دورية و دورها هو 2π نستطيع أن نستنتج على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ المنحنى $\left(C_f\right)$ عن طريق إجراء إنسحابات متتالية أشعتها $2k\pi\vec{i}$ (أي إنسحابات أشعتها من الشكل $\vec{v}_k\begin{pmatrix}2\pi k\\0\end{pmatrix}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$) .



إنتهى حل التمرين الأول ...

حل التمرين رقم 02 :

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- تحديد D_f مجموعة تعريف الدالة f :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $2+\cos x\neq 0$ ؛ لكن نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $-1\leq \cos x\leq 1$ و منه يكون $2-1\leq 2+\cos x\leq 2+1$ أي $1\leq 2+\cos x\leq 3$ و بالتالي من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن $2+\cos x\neq$ ؛ إذن نستنتج أن : $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

2- تبرير أن الدالة f قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها :

الدالة f هي حاصل قسمة دالتين u و v حيث : $u:x\mapsto u(x)=\sin x$ معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $v:x\mapsto v(x)=2+\cos x$ معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن $v(x)\neq 0$ و بالتالي الدالة $f={}^{u}\!/_{v}$ معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

3- من أجل كل عدد حقيقي x ، حساب $f(x+2\pi)$ و $f(-x)$:

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$ لأن الدالتين $\cos$ و $\sin$ دوريتين و دورهما هو 2π .

و كذلك : $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}=-f(x)$ لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ نعلم أن $\sin(-x)=-\sin x$ (الدالة $\sin$ فردية) و $\cos(-x)=\cos x$ (الدالة $\cos$ زوجية) .

بما أن $f(-x)=-f(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن الدالة f هي دالة فردية و بالتالي المنحنى (C_f) في معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم ، و من جهة أخرى و بما أنه من أجل كل

$x\in\mathbb{R}$ لدينا $f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)$ فإن الدالة f دورية و دورها هو 2π ؛ إذن يمكن إقتصار دراسة الدالة f على مجال طوله 2π ثم إستنتاج المنحنى البياني $\left(C_f\right)$ على $\mathbb{R}$ بإجراء إنسحابات أشعتها $2\pi k\vec{i}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن يكفي دراسة الدالة f على المجال $\left[0,\pi\right]$ ثم إنشاء المنحنى $\left(C_f\right)$ على هذا المجال و من ثم إستنتاج المنحنى على المجال $\left[-\pi,0\right]$ بالتناظر إلى مبدأ المعلم ، و أخيرا إستنتاج إنشاء المنحنى $\left(C_f\right)$ على $\mathbb{R}$ بإجراء إنسحابات أشعتها $2\pi k\vec{i}$ حيث $k\in\mathbb{R}$ لأن الدالة f دورية و دورها هو 2π .

4- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f\left(x\right)'=\dfrac{1+2\cos x}{\left(2+\cos x\right)^2}$

الدالة f معرفة و تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل $x\in D_f$:

$f'\left(x\right)=\dfrac{\cos x\left(2+\cos x\right)-\sin x\left(0-\sin x\right)}{\left(2+\cos x\right)^2}=\dfrac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\left(2+\cos x\right)^2}$ حيث نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و بالتالي نجد $\boxed{f'\left(x\right)=\dfrac{1+2\cos x}{\left(2+\cos x\right)^2}}$

5- دراسة حسب قيم x إشارة $f'\left(x\right)$ على المجال $\left[0,\pi\right]$:

إشارة المقدار $f'\left(x\right)$ من إشارة البسط $1+2\cos x$ لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن $\left(2+\cos x\right)^2>0$.

ليكن $x\in\left[0,\pi\right]$ ؛ نضع $f'\left(x\right)=0$ تكافئ $\dfrac{1+2\cos x}{\left(2+\cos x\right)^2}=0$ تكافئ $1+2\cos x=0$ و $2+\cos x\neq 0$ (محققة) تكافئ $\cos x=-\frac{1}{2}$ تكافئ $\cos x=-\cos\frac{\pi}{3}$ تكافئ $\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ لأننا نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي α لدينا $\cos\left(\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$ و منه نجد $x=\pi-\frac{\pi}{3}$ أي $\boxed{x=\dfrac{2\pi}{3}}$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

6- إستنتاج إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,\pi]$:

✓ بما أن $f'(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in \left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$

✓ بما أن $f'(x) \leq 0$ من أجل كل $x \in \left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

7- إنشاء المنحنى (C_f) :

ننشئ المنحنى (C_f) بالإعتماد على نتائج السؤال 3) و كذلك جدول تغيرات الدالة f .

إنتهى حل التمرين الثاني ...

تمرين جيد للمراجعة بـ 3 أجزاء :

الجزء الأول :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ؛ (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(-2;2)$ (أنظر الشكل أدناه) .

بقراءة بيانية أجب على الأسئلة التالية :

1) عين $f(-1)$ ، $f(-3)$ ، $f'(-3)$ ، $f'(-2)$ ، $f''(-2)$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)\times f'(x)=0$ ثم المتراجحة $f(x)\times f'(x)\leq 0$.

3) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-2}{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2f'(x)+6}{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{f(x)}{x^2-16}$

4) حدد إتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها .

5) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(-2;2)$.

6) إستنتج أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(-2+h)$ عندما يؤول h إلى 0 ؛ ثم إستنتج قيمة مقربة للعدد $f(-1{,}999)$.

7) حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

8) نقبل أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية

✓ عين الأعداد a ، b و c إعتمادا على المنحنى البياني (C_f) و الأسئلة السابقة .

9) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=|m|-1$.

10) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

الجزء الثاني :

نقبل فيما يلي أن : $f(x)=x^3+6x^2+9x+4$

1) أحسب $f(-1)$ ثم إستنتج تحليلا لـ $f(x)$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم شكل جدول إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثالث :

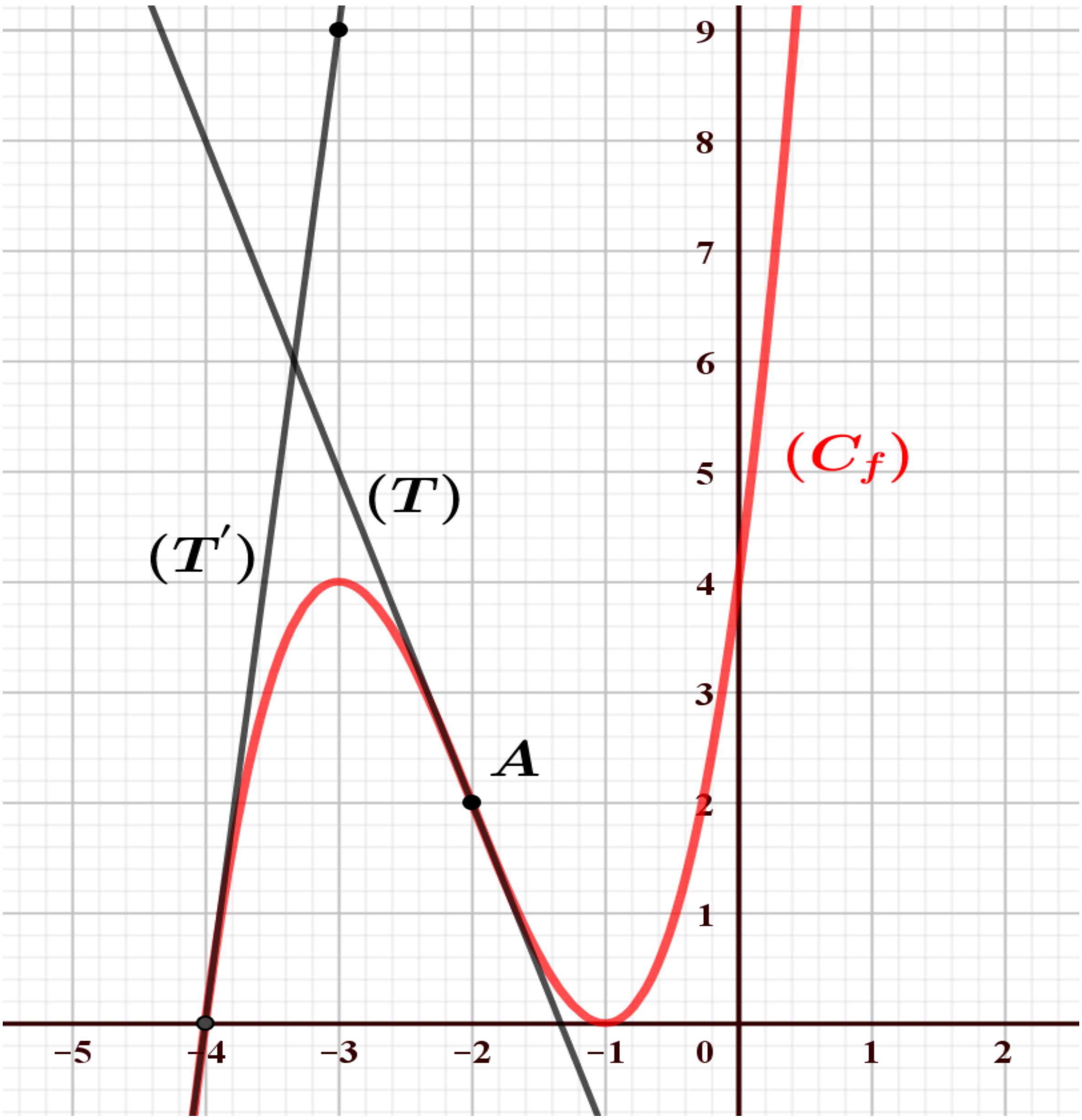
نعتبر الدالة g المعرفة من أجل كل $x\neq-3$ بـ : $g(x)=\frac{1}{8}\left(\frac{x^3+3x^2-9x-35}{x+3}\right)$

1) بين أنه من أجل كل $x\in D_g$ فإن : $g'(x)=\frac{1}{4}\frac{f(x)}{(x+3)^2}$

2) إستنتج إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) إستنتج أن (C_g) منحنى الدالة g يقبل مماسين (T_1) و (T_2) كل منهما يوازي حامل محور الفواصل يطلب كتابة معادلة لكل منهما .

4) أعط حصرا لـ $g(x)$ علما أن $x\in[-2,5]$ (تعطى النتائج بالتدوير إلى 10^{-1})


(T)
(T')
(C_f)
A
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−5
−4
−3
−2
−1
1
2

تمرين جيد للمراجعة بـ 3 أجزاء :

الجزء الأول :

1) تعيين $f(-1)$ ، $f(-3)$ ، $f'(-3)$ ، $f'(-2)$ ، $f''(-2)$:

المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة -1 و منه ينتج أن : $f(-1)=0$

و من الشكل نقرأ : $f(-3)=4$

$f'(-3)$ يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-3$ حيث أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الإحداثيات $(-3,4)$ و منه $f'(-3)=0$

$f'(-2)$ يمثل معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$ و لحساب معامل توجيه المستقيم (T) نختار نقطتين من هذا المستقيم و هما $A(-2,2)$ و $B(-3,5)$ حيث :

$$f'(-2)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-2}{-3-(-2)}$$ أي $f'(-2)=-3$

النقطة $A(-2,2)$ هي نقطة إنعطاف لأن المنحنى (C_f) يغير عندها من تحدبه (من التحدب إلى التقعر) و كنتيجة فإن المماس (T) يخترق المنحنى (C_f) عند النقطة A و منه نستنتج أن : $f''(-2)=0$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)\times f'(x)=0$ ثم المتراجحة $f(x)\times f'(x)\leq 0$:

$f(x)\times f'(x)=0$ إذا و فقط إذا كان $f(x)=0$ أو $f'(x)=0$:

حلول المعادلة $f(x)=0$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل و من الشكل نجد : $x=-4$ أو $x=-1$

على المجال $]-\infty,-3[$ الدالة f متزايدة تماما و منه من أجل كل $x\in]-\infty,-3[$ فإن $f'(x)>0$

على المجال $]-3,-1[$ الدالة f متناقصة تماما و منه من أجل كل $x\in]-3,-1[$ فإن $f'(x)<0$

الدالة f تقبل قيمة حدية محلية عند النقطة ذات الفاصلة $c=-3$ و منه ينتج $f'(-3)=0$

بنفس الكيفية نبين أن : $f'(-1)=0$ ؛ إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)\times f'(x)=0$ هي

$$S=\{-4\,,-3\,,-1\}$$

تكون المتراجحة $f(x)\times f'(x)\le 0$ محققة إذا و فقط إذا العددان $f(x)$ و $f'(x)$ من إشارتين مختلفتين أو كان أحدهما على الأقل معدوما ، على المجال $]-\infty,-4]$ الدالة f متزايدة تماما و بالتالي من أجل كل $x\in]-\infty,-4]$ فإن $f'(x)>0$ و (C_f) يقع تحت حامل محور الفواصل أو يقطعه و بالتالي فإنه من أجل كل $x\in]-\infty,-4]$ يكون $f(x)\le 0$ و منه ينتج أن : $f(x)\times f'(x)\le 0$

على المجال $[-3,-1]$ لدينا $f(x)\ge 0$ لأن (C_f) يقع فوق حامل محور الفواصل أو يقطعه و الدالة f متناقصة تماما و منه من أجل كل $x\in[-3,-1]$ فإن $f'(x)\le 0$ و عليه يكون $f(x)\times f'(x)\le 0$

إذن مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\times f'(x)\le 0$ هي : $S'=]-\infty,-4]\cup[-3,-1]$

3) حساب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-2}{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2f'(x)+6}{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{f(x)}{x^2-16}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)=-2\\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2f'(x)+6}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2\left(f'(x)-(-3)\right)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2\left(f'(x)-f'(-2)\right)}{x-(-2)}=2f''(-2)=0\\ \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{f(x)}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{f(x)-f(-4)}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{1}{-4-4}\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}=-\dfrac{1}{8}f'(-4)=-\dfrac{9}{8}\end{cases}$$

توضيح : $f'(-4)$ يمثل معامل توجيه المماس (T') للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -4 و يمكن حسابه كالآتي : $f'(-4)=\dfrac{0-9}{-4-(-3)}=9$ لأن المماس (T') يشمل النقطتين $(-4,0)$ و $(-3,9)$.

4) تحديد إتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها :

✓ الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-3]$ و $[-1,+\infty[$.

✓ الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3,-1]$.

5) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(-2;2)$:

$y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ حيث $f'(-2)=-3$ و $f(-2)=2$ و منه ينتج :

$y=-3x-4$ هي معادلة للمماس (T) عند النقطة $A(-2,2)$ للمنحنى (C_f) .

6) إستنتاج أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(-2+h)$ عندما يؤول h إلى 0 ؛ ثم إستنتاج قيمة مقربة للعدد $f(-1{,}999)$:

من أجل h قريب من 0 يكون : $f(-2+h)\approx f(-2)+f'(-2)\times h$ أي $f(-2+h)\approx 2-3h$

و بكتابة $-1{,}999=-2+0{,}001$ (أي $h=0{,}001$ قريب من 0) نتحصل على :

$f(-1{,}999)=f(-2+0{,}001)\approx 2-3\times 0{,}001$ أي $f(-1{,}999)\approx 1{,}997$

7) تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) :

✓ إذا كان $x\in]-\infty,-2[$ فإن المنحنى (C_f) يقع تحت المماس (T) .

✓ إذا كان $x=-2$ فإن المماس (T) يخترق (يقطع) المنحنى (C_f) .

✓ إذا كان $x\in]-2,+\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (T) .

8) نقبل أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية

تعيين الأعداد a ، b و c إعتمادا على المنحنى البياني (C_f) و الأسئلة السابقة :

من المنحنى لدينا : $f(0)=4$ و بحساب صورة العدد 0 وفق الدالة f نجد $f(0)=c$ و منه $c=4$

و كذلك $\begin{cases} f(-4)=0 \\ f(-1)=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 4a-b=15 \\ a-b=-3 \end{cases}$ و بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نتحصل

على : $3a=18$ أي $a=6$

و بتعويض قيمة a في المعادلة $a-b=-3$ نجد : $b=9$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\boxed{f(x)=x^3+6x^2+9x+4}$

9) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=|m|-1$:

حلول المعادلة $f(x)=|m|-1$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات (Δ_m) التي لها معادلات من الشكل $y=|m|-1$ و هي مستقيمات توازي حامل محور الفواصل (نوع المناقشة أفقية) .

- إذا كان $|m|-1=0$ أي $|m|=1$ أي $m=1$ أو $m=-1$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=0$ معادلة له (حامل محور الفواصل) في نقطتين متمايزتين فاصلة إحداهما هي -4 و الأخرى هي -1 و بالتالي المعادلة $f(x)=|m|-1$ تقبل حلين متمايزين سالبين تماما هما -4 و -1 .
- إذا كان $|m|-1<0$ أي $|m|<1$ أي $m\in]-1,1[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=|m|-1$ معادلة له في نقطة وحيدة و فاصلتها هي عدد سالب تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=|m|-1$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل سالب تماما .
- إذا كان $0<|m|-1<4$ أي $1<|m|<5$ أي $m\in]-5,-1[\cup]1,5[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=|m|-1$ في ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى و كل واحدة منها ذات فاصلة سالبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=|m|-1$ تقبل ثلاث حلول متمايزة مثنى مثنى و هذه الحلول سالبة تماما .
- إذا كان $|m|-1=4$ أي $|m|=5$ أي $m=5$ أو $m=-5$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=4$ معادلة له في نقطتين متمايزتين إحداهما ذات الفاصلة -3 و الأخرى فاصلتها معدومة و بالتالي المعادلة $f(x)=|m|-1$ تقبل حلين متمايزين أحدهما سالب تماما هو -3 (بعض الكتب تسميه حلا مضاعفا) و الآخر معدوم .

- إذا كان $|m|-1>4$ أي $|m|>5$ أي $m>5$ أو $m<-5$ أي $m\in]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=|m|-1$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=|m|-1$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

10) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$:

حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات الأفقية التي لها معادلات من الشكل $y=f(m)$ و هي مستقيمات أفقية توازي حامل محور الفواصل (نوع المناقشة أفقية) .

- إذا كان $f(m)<0$ أي $m\in]-\infty,-4[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=f(m)$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات فاصلة سالبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل سالب تماما .

- إذا كان $f(m)=0$ أي $m=-4$ أو $m=-1$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=0$ معادلة له (حامل محور الفواصل) في نقطتين متمايزتين إحداهما ذات الفاصلة -4 و الأخرى ذات الفاصلة -1 و بالتالي المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين سالبين تماما هما -4 و -1 .

- إذا كان $0<f(m)<4$ أي $m\in]-4,-1[\cup]-1,0[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=f(m)$ معادلة له في ثلاث نقط متمايزة كل منها ذات فاصلة سالبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل ثلاث حلول متمايزة مثنى مثنى سالبة تماما .

- إذا كان $f(m)=4$ أي $m=-3$ أو $m=0$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=4$ معادلة له في نقطتين متمايزتين إحداهما ذات الفاصلة -3 و الأخرى ذات فاصلة معدومة و بالتالي المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين هما -3 (يمكن تسميته حلا مضاعفا) و 0 .

- إذا كان $f(m)>4$ أي $m\in]0,+\infty[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y=f(m)$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

الجزء الثاني :

نقبل فيما يلي أن : $f(x)=x^3+6x^2+9x+4$

1) حساب $f(-1)$ ثم إستنتاج تحليلا لـ $f(x)$:

$f(-1)=(-1)^3+6(-1)^2+9(-1)+4=0$ و منه نستنتج أن -1 جذرا لكثير الحدود $f(x)$.

بما أن -1 جذرا لكثير الحدود $f(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ من الدرجة الثانية حيث :

$f(x)=(x+1)g(x)$ و بالقسمة الإقليدية مثلا نجد :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3+6x^2+9x+4 & x+1 \\
\cline{3-3}
- & x^3+x^2 & x^2+5x+4 \\
\cline{2-2}
 & 5x^2+9x+4 & \\
- & 5x^2+5x & \\
\cline{2-2}
 & 4x+4 & \\
- & 4x+4 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

إذن $g(x)=x^2+5x+4$ ومنه ينتج التحليل :

$$\boxed{f(x)=(x+1)(x^2+5x+4)}$$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ يكافئ $(x+1)(x^2+5x+4)=0$ يكافئ $x+1=0$ أو $x^2+5x+4=0$

حيث $x+1=0$ يكافئ $x=-1$ و لحل المعادلة $x^2+5x+4=0$ نعتمد على إشارة المميز Δ حيث

$\Delta=(5)^2-4(1)(4)=9\succ 0$ و بالتالي المعادلة $x^2+5x+4=0$ تقبل حلين متمايزين في $\mathbb{R}$ هما :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+3}{2}=-1$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-3}{2}=-4$ و بالتالي حلول المعادلة

$f(x)=0$ هي -1 (صفر مضاعف للدالة f) و -4 و نكتب : $\boxed{f(x)=(x+1)^2(x+4)}$

- جدول إشارة $f(x)$ حسب قيم x :

✓ يكون $f(x)\succ 0$ لما (C_f) يقع فوق حامل محور الفواصل (xx') أي لما $x\in]-4,-1[\cup]-1,+\infty[$

✓ يكون $f(x)\prec 0$ لما (C_f) يقع تحت حامل محور الفواصل (xx') أي لما $x\in]-\infty,-4[$

✓ يكون $f(x)=0$ لما (C_f) يقطع حامل محور الفواصل (xx') أي لما $x=-4$ أو $x=-1$

ثم نلخص الإشارة في جدول حسب قيم x :

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة g المعرفة من أجل كل $x\neq -3$ بـ : $g(x)=\frac{1}{8}\left(\frac{x^3+3x^2-9x-35}{x+3}\right)$

1) نبين أنه من أجل كل $x\in D_g$ فإن : $g'(x)=\frac{1}{4}\frac{f(x)}{(x+3)^2}$

الدالة g قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,-3[$ و $]-3,+\infty[$ و لدينا :

$g'(x)=\frac{1}{8}\left(\frac{(3x^2+6x-9)(x+3)-(x^3+3x^2-9x-35)\times 1}{(x+3)^2}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{2x^3+12x^2+18x+8}{(x+3)^2}\right)$ أي

$g'(x)=\frac{2}{8}\left(\frac{x^3+6x^2+9x+4}{(x+3)^2}\right)=\frac{1}{4}\frac{f(x)}{(x+3)^2}$ و هو المطلوب إثباته .

2) إستنتاج إتجاه تغير الدالة g :

من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$ فإن $(x+3)^2>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$:

- إذا كان $x\in]-\infty,-4]$ فإن $f(x)\leq 0$ و منه $g'(x)\leq 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-4]$.
- إذا كان $x\in[-4,-3[\cup]-3,+\infty[$ فإن $f(x)\geq 0$ و منه $g'(x)\geq 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على كل من المجالين $[-4,-3[$ و $]-3,+\infty[$.

حساب نهايات الدالة g على أطراف مجموعة تعريفها :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{x^3+3x^2-9x-35}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{8x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{8}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{x^3+3x^2-9x-35}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{8x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{8}=+\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-3}g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-3}\frac{1}{8}\left(\frac{x^3+3x^2-9x-35}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-3}-\frac{8}{x+3}=+\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3}g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3}\frac{1}{8}\left(\frac{x^3+3x^2-9x-35}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3}-\frac{8}{x+3}=-\infty\end{cases}$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$15/8$	$\nearrow$ $+\infty$	|| $-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

لاحظ أن الدالة المشتقة الأولى g' تنعدم عند $x_0=-1$ و لا تغير من إشارتها و منه فالنقطة ذات الفاصلة -1 هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_g) .

3) إستنتاج أن (C_g) منحنى الدالة g يقبل مماسين (T_1) و (T_2) كل منهما يوازي حامل محور الفواصل يطلب كتابة معادلة لكل منهما :

من أجل كل $x\neq -3$ لدينا : $g'(x)=\dfrac{1}{4}\dfrac{f(x)}{(x+3)^2}$ حيث $f(-4)=0$ و $f(-4)=0$ و عليه يكون $g'(-4)=0$ و كذلك $g'(-1)=0$ و منه نستنتج أن المنحني (C_g) يقبل مماسين (T_1) عند النقطة ذات الفاصلة -4 و (T_2) عند النقطة ذات الفاصلة -1 كل منهما يوازي حامل محور الفواصل :

$(T_1):y=g'(-4)(x+4)+g(-4)$ أي $(T_1):y=g(-4)$ أي $(T_1):y={}^{15}\!/_{8}$

$(T_2):y=g'(-1)(x+1)+g(-1)$ أي $(T_2):y=g(-1)$ أي $(T_2):y=-{}^{3}\!/_{2}$

4) إعطاء حصرا لـ $g(x)$ علما أن $x\in[-2,5]$ (تعطى النتائج بالتدوير إلى 10^{-1})

الدالة g قابلة للإشتقاق (و بالتالي فهي مستمرة) و متزايدة تماما على المجال $I=[-2,5]$ ؛ إذن :

$x\in I$ معناه $-2\leq x\leq 5$ و منه ينتج : $g(-2)\leq g(x)\leq g(5)$ (نحافظ على نفس الترتيب) أي $-1{,}6\leq g(x)\leq 1{,}9$ حسب المطلوب في السؤال .

إنتهى حل التمرين ...

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

دالة و شعاع إنسحاب :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

(D) هو المستقيم الذي يشمل النقطتين $A(0;3)$ و $B(-3;0)$. (أنظر الشكل أدناه)

بقراءة بيانية أجب على الأسئلة من **1)** إلى **4)** الآتية :

1) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)-x=3$.

3) عين شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالإنتقال من (P) منحنى الدالة " مربع " إلى (C_f) التمثيل البياني للدالة f .

4) جد عبارة $f(x)$ بدلالة x بالنسبة إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

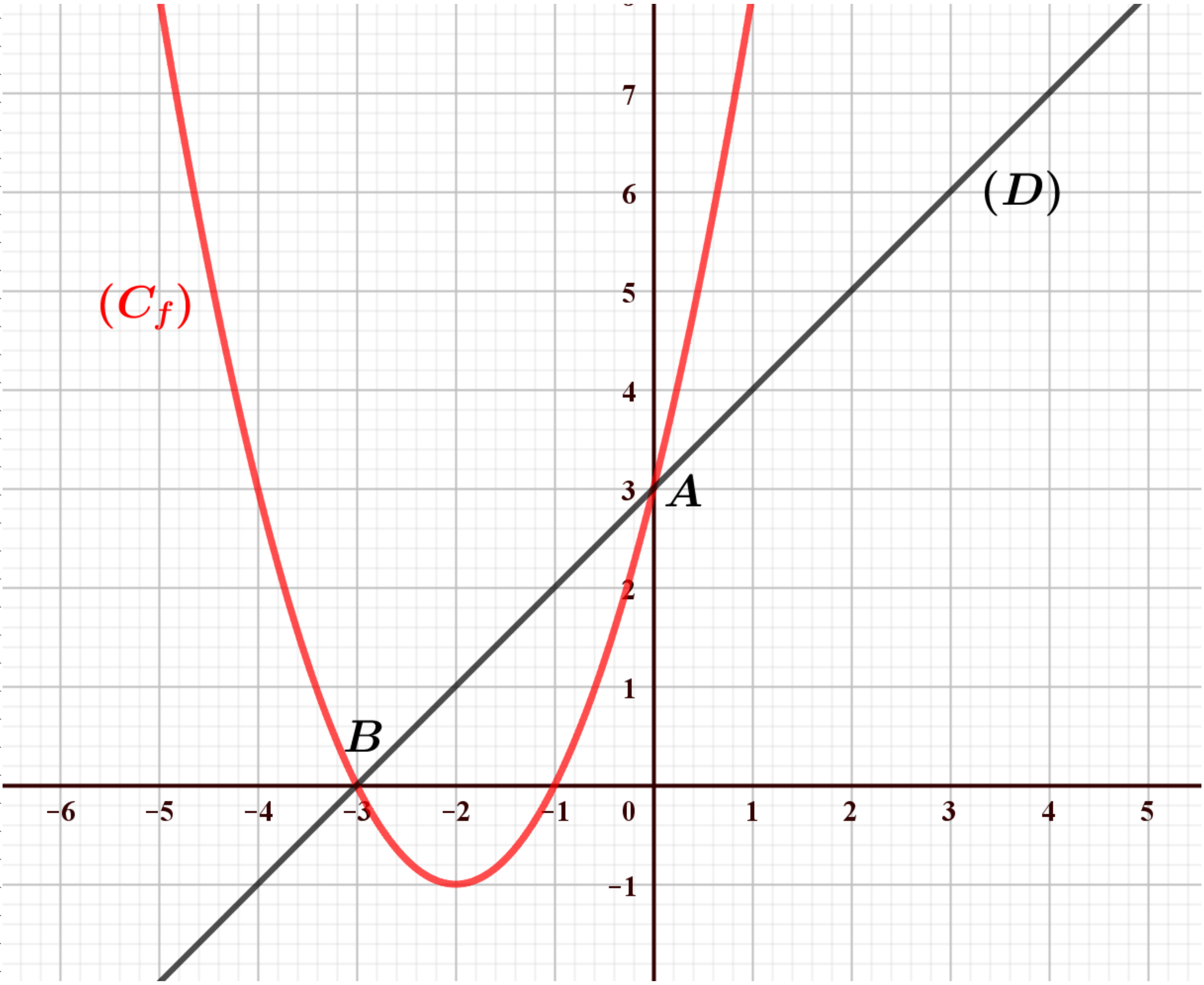
5) تحقق أنه من أجل كل $x\in D_f$ فإن $-4-x\in D_f$ و $f(-4-x)=f(x)$ ؛ فسر النتيجة هندسيا .

6) نعتبر الدوال g ، h و k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=\left|f(x)\right| \quad ، \quad h(x)=f\left(-|x|\right) \quad ، \quad k(x)=f(x-1)+1$$

- إشرح كيف يمكن إنشاء المنحنيات (C_g) ، (C_h) ، (C_k) إنطلاقا من المنحنى (C_f)
- أنشئ المنحنيات السابقة كل في شكل مستقل عن الآخر .

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m^2-5$.


(C_f)
(D)
A
B

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

f تقبل الإشتقاق عند x_0 ؟

f الدالة المعرفة على المجال $[0,4]$ كما يلي : $f(x)=x\sqrt{4x-x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) برر قابلية إشتقاق الدالة f على $]0,4[$ و أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0,4[$:

$$f'(x)=\frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$$

2) أ- هل الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 ؟ فسر النتيجة المتحصل عليها هندسيا .

ب- هل الدالة f تقبل الإشتقاق عند 4 ؟ فسر النتيجة المتحصل عليها هندسيا .

3) أدرس إتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أنشئ المنحنى (C_f) .

تعيين الأعداد الحقيقية α ، β و γ :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر المنحنى $\left(C\right)$ ذو المعادلة

$y=\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{2\left(x-\gamma\right)^2}$ حيث α ، β و γ أعداد حقيقية .

- عين الأعداد α ، β و γ التي من أجلها يكون لهذا المنحنى مستقيمان مقاربان $\left(\Delta\right)$ حيث $x=1$ معادلة له و $\left(\Delta'\right)$ حيث $y=3/2$ معادلة له و يقبل مماسا $\left(T\right)$ عند النقطة O حيث $y=-2x$ معادلة له .

دالة و شعاع إنسحاب :

1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)-x=3$:

$f(x)-x=3$ تكافئ $f(x)=x+3$ و منه حلول المعادلة بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي $y=x+3$ معادلة له ، حيث نعلم أن المستقيم (D) يشمل النقطتين $A(0;3)$ و $B(-3;0)$ ، المستقيم (D) له معادلة من الشكل $y=ax+b$ حيث : $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-3-0}{0-3}=1$

أي $y=x+b$ ، و بما أن $A\in(D)$ فإن $y_A=x_A+b$ أي $3=0+b$ و منه $b=3$.

إذن $y=x+3$ هي معادلة للمستقيم (D) ، و منه حلول المعادلة $f(x)=x+3$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع (C_f) مع (D) ، إذن نستنتج من الشكل أدناه أن مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{-3,0\}$

3) تعيين شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالإنتقال من (P) منحنى الدالة " مربع " إلى (C_f) التمثيل البياني للدالة f :

مركبتا شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالإنتقال من (P) إلى (C_f) هما إحداثيا ذروة المنحنى (C_f) أي

إحداثيا النقطة التي يقبل فيها $\left(C_f\right)$ قيمة حدية ، إذن شعاع الإنسحاب هو $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

4) إيجاد عبارة $f\left(x\right)$ **بدلالة** x **بالنسبة إلى المعلم** $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ **:**

بما أن $\left(C_f\right)$ صورة $\left(P\right)$ منحنى الدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي

x : $f\left(x\right)=\left(x+2\right)^2-1$ (في الحالة العامة إذا كان شعاع الإنسحاب هو $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$ مع $a\in\mathbb{R}$ ، $b\in\mathbb{R}$

فإن $f\left(x\right)=\left(x+a\right)^2+b$) .

5) التحقق أنه من أجل كل $x\in D_f$ **فإن** $-4-x\in D_f$ **و** $f\left(-4-x\right)=f\left(x\right)$ **:**

ليكن $x\in D_f$ معناه $x\in\mathbb{R}$ أي $-\infty<x<+\infty$ و منه $-\infty<-x<+\infty$ و منه $-\infty<4-x<+\infty$ أي

$4-x\in\mathbb{R}$ و منه $4-x\in D_f$ ، و من جهة أخرى من أجل كل $x\in D_f$:

$f\left(-4-x\right)=\left(-4-x+2\right)^2-1=\left(-2-x\right)^2-1=\left[-\left(x+2\right)\right]^2-1$ أي

$f\left(-4-x\right)=\left(x+2\right)^2-1=f\left(x\right)$ تكافئ $f\left(2\times\left(-2\right)-x\right)=f\left(x\right)$.

التفسير الهندسي : المستقيم الذي $x=-2$ معادلة له هو محور تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$.

6) نعتبر الدوال g **،** h **و** k **المعرفة على** $\mathbb{R}$ **بـ :**

$$g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right| \quad ، \quad h\left(x\right)=f\left(-\left|x\right|\right) \quad ، \quad k\left(x\right)=f\left(x-1\right)+1$$

➢ **شرح كيف يمكن إنشاء المنحنيات** $\left(C_g\right)$ **،** $\left(C_h\right)$ **،** $\left(C_k\right)$ **إنطلاقا من المنحنى** $\left(C_f\right)$ **:**

من أجل كل عدد حقيقي x نكتب $g\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right), & f\left(x\right)\geq 0\\ -f\left(x\right), & f\left(x\right)<0\end{cases}$ و من التمثيل البياني للدالة f :

$g\left(x\right)=\begin{cases}\left(x+2\right)^2-1\,, & x\in\left]-\infty,-3\right]\cup\left[-1,+\infty\right[\\ 1-\left(x+2\right)^2, & x\in\left]-3,-1\right[\end{cases}$ و بالتالي يكون $\left(C_g\right)$ منطبقا على $\left(C_f\right)$

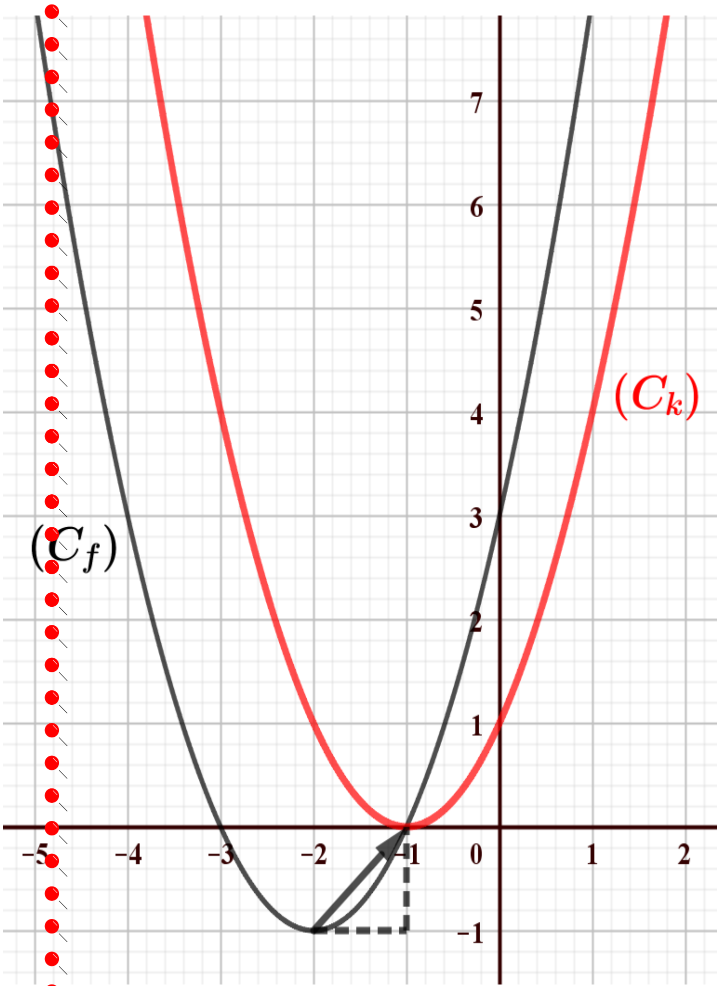
لما $f(x)\geq 0$ أي لما $x\in\left]-\infty,-3\right]\cup\left[-1,+\infty\right[$ و يكون (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل لما $f(x)<0$ أي لما $x\in\left]-3,-1\right[$.

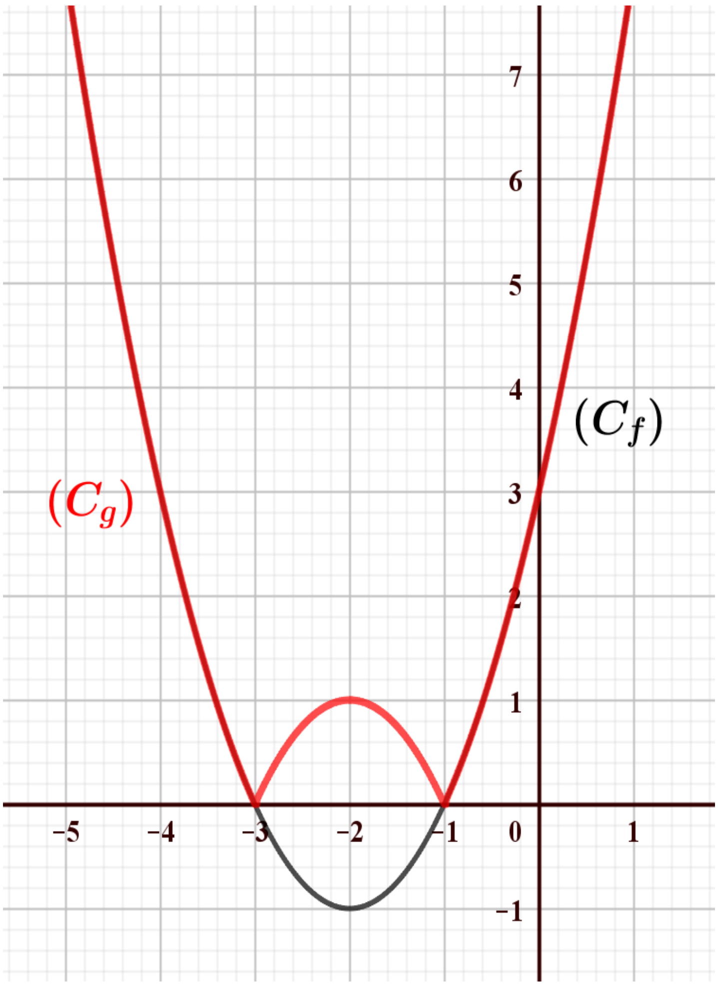
إذا كان $x\leq 0$ فإن $|x|=-x$ و منه $-|x|=x$ ؛ إذن يكون $h(x)=f(x)$ لما $x\leq 0$ و بالتالي يكون (C_h) منطبقا على (C_f) في المجال $\left]-\infty,0\right]$.

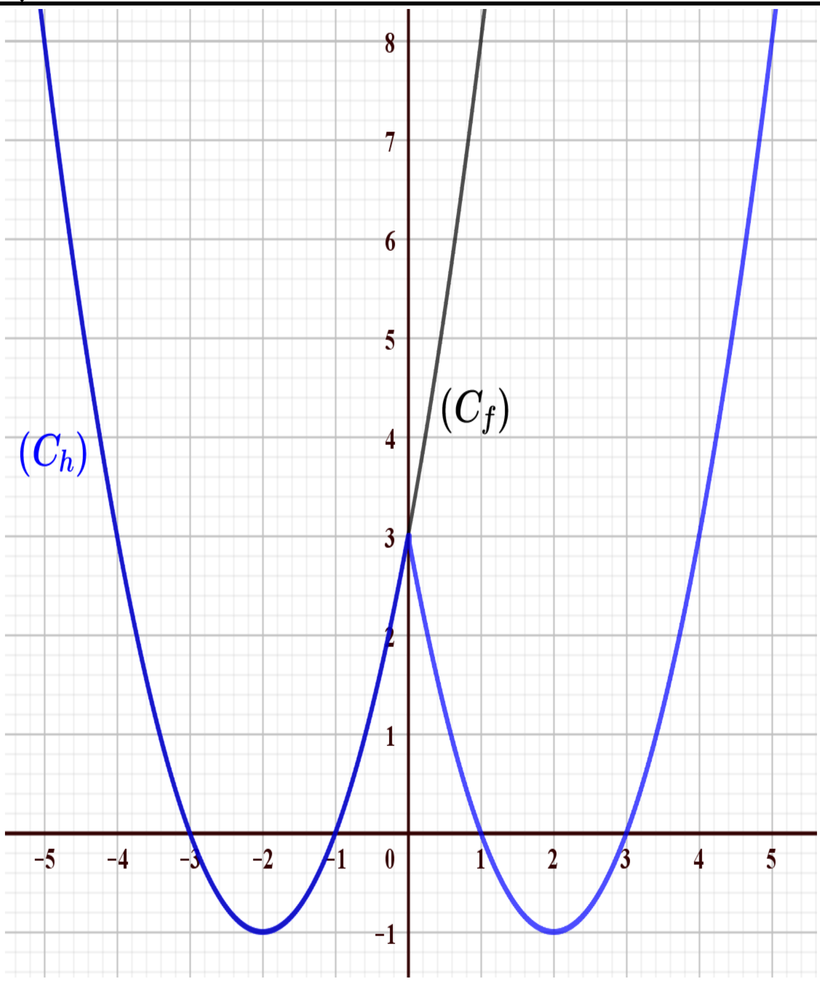
و بما أن الدالة h زوجية (لأن $D_h=\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر و من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن $h(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=h(x)$ لأن $|-x|=|x|$) فإنه لما يكون $x<0$ فإن (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب .

$k(x)=f(x-1)+1$ أي أن كتابة $k(x)$ من الشكل $k(x)=f(x+a)+b$ حيث $a=-1$ و $b=1$

و بالتالي (C_k) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.







7) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m^2-5$:

حلول المعادلة بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الأفقية (Δ_m) الموازية لحامل محور الفواصل التي معادلاتها من الشكل $y=m^2-5$ (نوع المناقشة أفقية) .

- إذا كان $m^2-5<-1$ أي $m^2<4$ أي $-2<m<2$ أي $m\in]-2,2[$ فإن المستقيم الذي (Δ_m) لا يتقاطع مع المنحنى (C_f) و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2-5$ لا تقبل حلولا .
- إذا كان $m^2-5=-1$ أي $m^2=4$ أي $m=-2$ أو $m=2$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0=-2$ و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2-5$ تقبل حلا وحيدا $x_0=-2$ (هناك بعض الكتب تسمي هذا النوع من الحلول بالحل المضاعف لوجود ذروة في المنحنى)
- إذا كان $-1<m^2-5<0$ أي $4<m^2<5$ أي $-\sqrt{5}<m<-2$ أو $2<m<\sqrt{5}$ أي $m\in]-\sqrt{5},-2[\cup]2,\sqrt{5}[$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين متمايزتين فاصلة كل منهما عدد سالب و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2-5$ تقبل حلين متمايزين

سالبين تماما .

- إذا كان $m^2-5=0$ أي $m^2=5$ أي $m=-\sqrt{5}$ أو $m=\sqrt{5}$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين متمايزتين فاصلة إحداهما $x_1=-3$ و الأخرى $x_2=-1$ و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2-5$ تقبل حلين متمايزين سالبين تماما $x_1=-3$ و $x_2=-1$.
- إذا كان $0<m^2-5<3$ أي $5<m^2<8$ أي $-2\sqrt{2}<m<-\sqrt{5}$ أو $\sqrt{5}<m<2\sqrt{2}$ أي $m\in\left]-2\sqrt{2},-\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5},2\sqrt{2}\right[$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين متمايزتين فاصلة كل منهما عدد سالب و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2-5$ تقبل حلين متمايزين سالبين تماما .
- إذا كان $m^2-5=3$ أي $m^2=8$ أي $m=-2\sqrt{2}$ أو $m=2\sqrt{2}$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين متمايزتين فاصلة إحداهما هي $x_3=-4$ و الأخرى $x_4=0$ و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2-5$ تقبل حلين متمايزين هما $x_3=-4$ (حل سالب تماما) و $x_4=0$ (حل معدوم) .
- إذا كان $m^2-5>3$ أي $m^2>8$ أي $m>2\sqrt{2}$ أو $m<-2\sqrt{2}$ أي $m\in\left]-\infty,-2\sqrt{2}\right[\cup\left]2\sqrt{2},+\infty\right[$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين متمايزتين إحداهما ذات فاصلة موجبة تماما و الأخرى ذات فاصلة سالبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=m^2-5$ تقبل حلين متمايزين أحدهما موجب تماما و الآخر سالب تماما .

إنتهى حل التمرين الأول ...

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

f تقبل الإشتقاق عند x_0 ؟

f الدالة المعرفة على المجال $[0,4]$ كما يلي : $f(x)=x\sqrt{4x-x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تبرير قابلية إشتقاق الدالة f على $]0,4[$ و إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0,4[$:

$$f'(x)=\frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$$

بما أن الدالة $u:x\mapsto 4x-x^2$ تقبل الإشتقاق على $]0,4[$ (دالة كثير حدود) و من أجل كل $x\in]0,4[$ فإن $4x-x^2>0$ (u موجبة تماما على المجال $]0,4[$) ؛ إذن الدالة f حيث $f(x)=x\sqrt{u(x)}$ تقبل الإشتقاق على $]0,4[$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0,4[$:

$$f'(x)=1\times\sqrt{u(x)}+x\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\sqrt{4x-x^2}+x\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=\sqrt{4x-x^2}+\frac{x(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$$ أي

$$f'(x)=\frac{\sqrt{4x-x^2}^2+x(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}=\frac{4x-x^2+2x-x^2}{\sqrt{4x-x^2}}=\frac{-2x^2+6x}{\sqrt{4x-x^2}}$$ أي $f'(x)=\frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$.

2) أ- دراسة قابلية الإشتقاق للدالة f عند 0 :

الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=l\in\mathbb{R}$ حيث :

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h\sqrt{4h-h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{4h-h^2}=0$ ؛ إذن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 (في حدود مفاهيم الرياضيات المقررة في الطور الثانوي) و لدينا $f'(0)=0$.

التفسير الهندسي : $f'(0)$ يمثل معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، إذن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 أي عند المبدأ O (لأن $f(0)=0$) يكون موازيا لحامل محور الفواصل

ب- دراسة قابلية الإشتقاق للدالة f عند 4 :

الدالة f تقبل الإشتقاق عند 4 إذا و فقط إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=l\in\mathbb{R}$ حيث :

$$\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{(4+h)\sqrt{4(4+h)-(4+h)^2}}{h}=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{(4+h)\sqrt{-h(4+h)}}{h}$$ أي

$$\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{-h(4+h)^2}{h\sqrt{-h(4+h)}}=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{-(4+h)^2}{\sqrt{-h(4+h)}}=-\infty$$ لأن

$-(4+h)^2\to-16$ و $\sqrt{-h(4+h)}\to 0^+$ عندما $h\xrightarrow{<}0$ و بالتالي الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 4 .

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي (موازي لحامل محور التراتيب) عند النقطة ذات الفاصلة 4 .

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ثم تشكيل جدول تغيراتها :

من أجل كل عدد $x\in]0,4[$ لدينا : $f'(x)=\frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$ حيث من أجل كل $x\in]0,4[$ فإن

$\sqrt{4x-x^2}>0$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $2x(3-x)$ على المجال $]0,4[$:

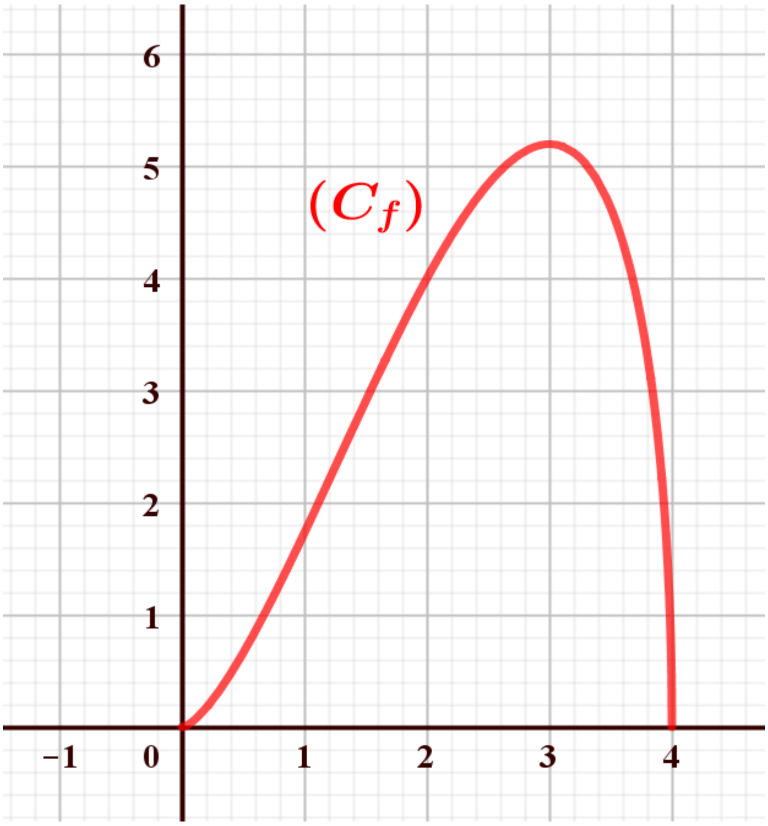
x	0		3		4
$2x$	0	+		+	
$3-x$		+	0	−	
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖

- بما أنه من أجل كل $x\in]0,3]$ لدينا $f'(x)\geq 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,3]$
- بما أنه من أجل كل $x\in[3,4[$ لدينا $f'(x)\leq 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[3,4]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	0

4) إنشاء المنحنى (C_f) :



إنتهى حل التمرين الثاني ...

تعيين الأعداد الحقيقية α ، β و γ :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر المنحنى (C) ذو المعادلة

$y=\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{2(x-\gamma)^2}$ حيث α ، β و γ أعداد حقيقية .

➢ تعيين الأعداد α ، β و γ التي من أجلها يكون لهذا المنحنى مستقيمان مقاربان (Δ) حيث $x=1$ معادلة له و (Δ') حيث $y=3/2$ معادلة له و يقبل مماسا (T) عند النقطة O حيث $y=-2x$ معادلة له :

- يكون المستقيم (Δ) الذي $x=1$ معادلة له مقاربا عموديا للمنحنى (C) إذا و فقط إذا كان

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{2(x-\gamma)^2}=\infty$ أي $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\alpha+\beta}{2(x-\gamma)^2}=\infty$ و منه نستنتج أن $\alpha+\beta\neq0$ و

$(x-\gamma)^2\to0$ عندما $x\to1$ و منه نستنتج أن $1-\gamma=0$ و بالتالي نجد : $\gamma=1$

- يكون المستقيم (Δ') الذي $y=3/2$ معادلة له مقارب أفقي للمنحنى (C) إذا و فقط إذا كان

$\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=3/2$ أي $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{2(x-1)^2}=3/2$ أي $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\alpha x^2}{2x^2}=3/2$ (نهاية دالة ناطقة

بجوار $\pm\infty$) أي $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{2}$ و منه نستنتج أن : $\alpha=3$

- المنحنى (C) يقبل مماسا (T) عند النقطة $O(0;0)$ حيث $y=-2x$ معادلة له معناه أن معامل

توجيه هذا المماس يساوي -2 حيث نعلم أن $f'(0)$ (بوضع $f(x)=\dfrac{3x^2+\beta x}{2(x-1)^2}$ مع $x\neq1$)

يمثل معامل توجيه المماس (T) .... f تقبل الإشتقاق على مجموعة تعريفها و لدينا :

$f'(x)=\dfrac{2(6x+\beta)(x-1)^2-4(3x^2+\beta x)(x-1)}{4(x-1)^4}$ و منه $f'(0)=\dfrac{2\beta}{4}=\dfrac{\beta}{2}$

إذن بوضع $\frac{\beta}{2}=-2$ ينتج $\beta=-4$.

نتيجة : $\boxed{y=\frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}}$ هي معادلة للمنحنى (C) .

إنتهى حل التمرين الثالث ...

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

دالة فردية و أخرى زوجية

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f\left(x\right)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- بين أن الدالة f فردية .

2- أثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'\left(x\right)=1+\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$

3- أدرس إتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها .

4- أكتب معادلة للمماس $\left(T\right)$ للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ ثم أدرس وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمماس $\left(T\right)$.

5- إستنتج أن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيينها .

6- بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي $y=x+1$ هو مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ ثم إستنتج معادلة $\left(\Delta'\right)$ المستقيم المقارب الآخر .

7- أرسم المستقيمات $\left(T\right)$ ، $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$ ثم أنشئ المنحنى $\left(C_f\right)$.

8- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g\left(x\right)=\left|x\right|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ و ليكن $\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) بين أن الدالة g زوجية .

ب) أنشئ المنحنى $\left(C_g\right)$ إنطلاقا من $\left(C_f\right)$.

جـ) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $g\left(x\right)=m^2-1$.

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

عبارة دالة إنطلاقا من شعاع إنسحاب

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x-2}$ و و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أوجد الأعداد الحقيقية α ، β و γ بحيث المنحنى (C_f) يقبل كمقارب المستقيم (Δ) الذي $y=x-1$ معادلة له و يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة 3 .

2- أحسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f .

3- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي -3 يطلب كتابة معادلة لكل منهما .

4- أرسم المستقيمات (Δ) ، (T) و (T') ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

5- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم الذي $y+3x-m=0$ معادلة له .

6- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ علما أن المنحنى (C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

➢ عين عبارة $g(x)$ بدلالة x ثم أنشئ المنحنى (C_g) في نفس المعلم السابق .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

دالة معرفة بتمثيلها البياني

الشكل أسفله هو المنحنى البياني $\left(C_f\right)$ للدالة f المعرفة و القابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ و f' دالتها المشتقة ؛ نعلم أن :

- ✓ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة هي المبدأ O
- ✓ محور الفواصل مقارب لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$
- ✓ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة A
- ✓ المماس لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة B يشمل النقطة ذات الإحداثيات $\left(-\frac{1}{2};0\right)$

1- إنطلاقا من المنحنى $\left(C_f\right)$:

أ) عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) عين $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ و $f'(1)$

جـ) حل في المجال $[0,4]$: المعادلة $f'(x)\geq 0$ و المتراجحة $f(x)\leq 2$

د) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=2m-1$

2- نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

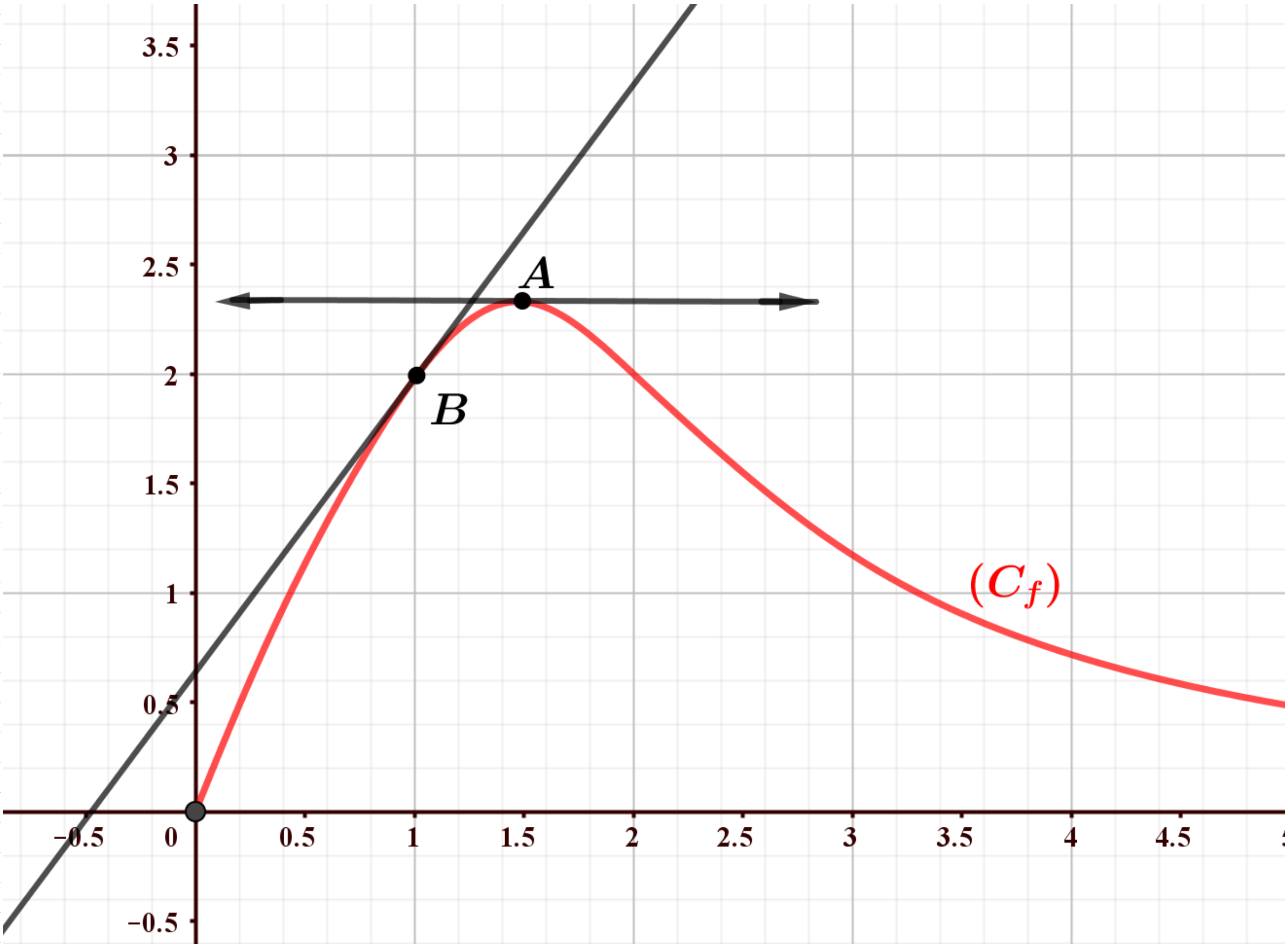
أ) حدد مجموعة تعريف الدالة g ثم أحسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها بالإعتماد على إشارة الدالة المشتقة g' .

3) نعتبر الدالة k التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x : $k(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} k(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة k ؟

ب) أحسب $k'\left(\dfrac{2}{3}\right)$.


A
B
(C_f)
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

حل التمرين رقم 01 :

1- نبين أن الدالة f هي دالة فردية :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و هي مجموعة متناظرة بالنسبة إلى 0 : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) = -x\left(1+\frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right)$ ، لكن $(-x)^2 = x^2$ و منه ينتج

$f(-x) = -x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -f(x)$ ؛ إذن f دالة فردية .

2- إثبات أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = 1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

تذكير 01 : **مشتقة الدالة** $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و لا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u}$ تقبل الإشتقاق على I و

لدينا : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

تذكير 02 : **مشتقة الدالة** $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و كانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الإشتقاق

على I و لدينا : $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

f معرفة و تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

أي $f'(x)=1\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)+x\left(0-\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}\right)$

أي $f'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+x\left(-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right)$ $f'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

أي $f'(x)=1+\frac{x^2+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}-\frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ أي $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

3- من أجل كل عدد $x\in\mathbb{R}$: $x^2>0$ ؛ $x^2+1>0$ ؛ و كذلك $\sqrt{x^2+1}>0$ ؛ إذن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)>0$ ؛ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

✓ حساب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها :

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ لأن $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\to0$ لما $x\to-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ لأن $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\to0$ لما $x\to+\infty$

4- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ حيث $f'(0)=1+\frac{1}{(0^2+1)\sqrt{0^2+1}}=2$ و

$f(0)=0\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{0^2+1}}\right)=0$ ؛ إذن : $y=2x$ هي معادلة للمماس (T) .

دراسة الوضع النسبي للمماس (T) مع المنحنى (C_f) **(يستحسن رسم جدول ملخص)**

نحسب الفرق $f(x)-y$: $f(x)-y=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-2x=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x$

أي $f(x)-y=\frac{x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛ و بما أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2+1}>0$ فإن إشارة المقدار من

إشارة البسط $x-x\sqrt{x^2+1}$ أي من إشارة $x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)$:

المعادلة $x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)=0$ تكافئ $x=0$ أو $1-\sqrt{x^2+1}=0$ تكافئ $x=0$ أو $\sqrt{x^2+1}=1$

تكافئ $x=0$ أو $x^2+1=1$ تكافئ $x=0$ أو $x=0$ ؛ إذن $x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)=0$ إذا و فقط إذا كان

$x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1-\sqrt{x^2+1}$		$-$	0	$-$	
$x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)$		$+$	0	$-$	

✓ إذا كان $x<0$ فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (T) .

✓ إذا كان $x>0$ فإن المنحنى (C_f) يقع تحت المماس (T) .

✓ إذا كان $x=0$ فإن المماس (T) يقطع (يخترق) المنحنى (C_f) .

5- المماس (T) يخترق المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ و بالتالي فالنقطة $O(0;f(0))$ أي

$O(0;0)$ هي **نقطة إنعطاف** لمنحنى الدالة f .

6- إثبات أن المستقيم (Δ) الذي $y=x+1$ هو مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ ثم إستنتاج معادلة لـ

(Δ') المستقيم المقارب الآخر :

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-x-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right]$

لما $\frac{1}{x^2} \to 0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right]=1-1=0$

$x\to+\infty$ و بالتالي نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي $y=x+1$ معادلة له مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

نعلم أن الدالة f هي دالة فردية و بالتالي منحناها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ متناظر بالنسبة

إلى مبدأ المعلم O ؛ إذن يكون المستقيم (Δ') الذي $y=x-1$ مقاربا مائلا لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$.

8- أ) إثبات أن الدالة g هي دالة زوجية :

$D_g=\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى الصفر لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g(-x)=|-x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=g(x)$ لأن من

خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي $|-x|=|x|$ ؛ إذن g هي دالة زوجية .

ب) شرح طريقة إنشاء (C_g) بالإعتماد على (C_f) :

✓ إذا كان $x\geq 0$ فإن $|x|=x$ و عليه يكون $g(x)=f(x)$ ؛ إذن (C_g) ينطبق على (C_f) .

✓ إذا كان $x<0$ و بما أن الدالة g هي دالة زوجية ؛ فإن (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب .

جـ) المناقشة البيانية و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $g(x)=m^2-1$:

حلول المعادلة $g(x)=m^2-1$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_g) مع المستقيم الأفقي الموازي لحامل

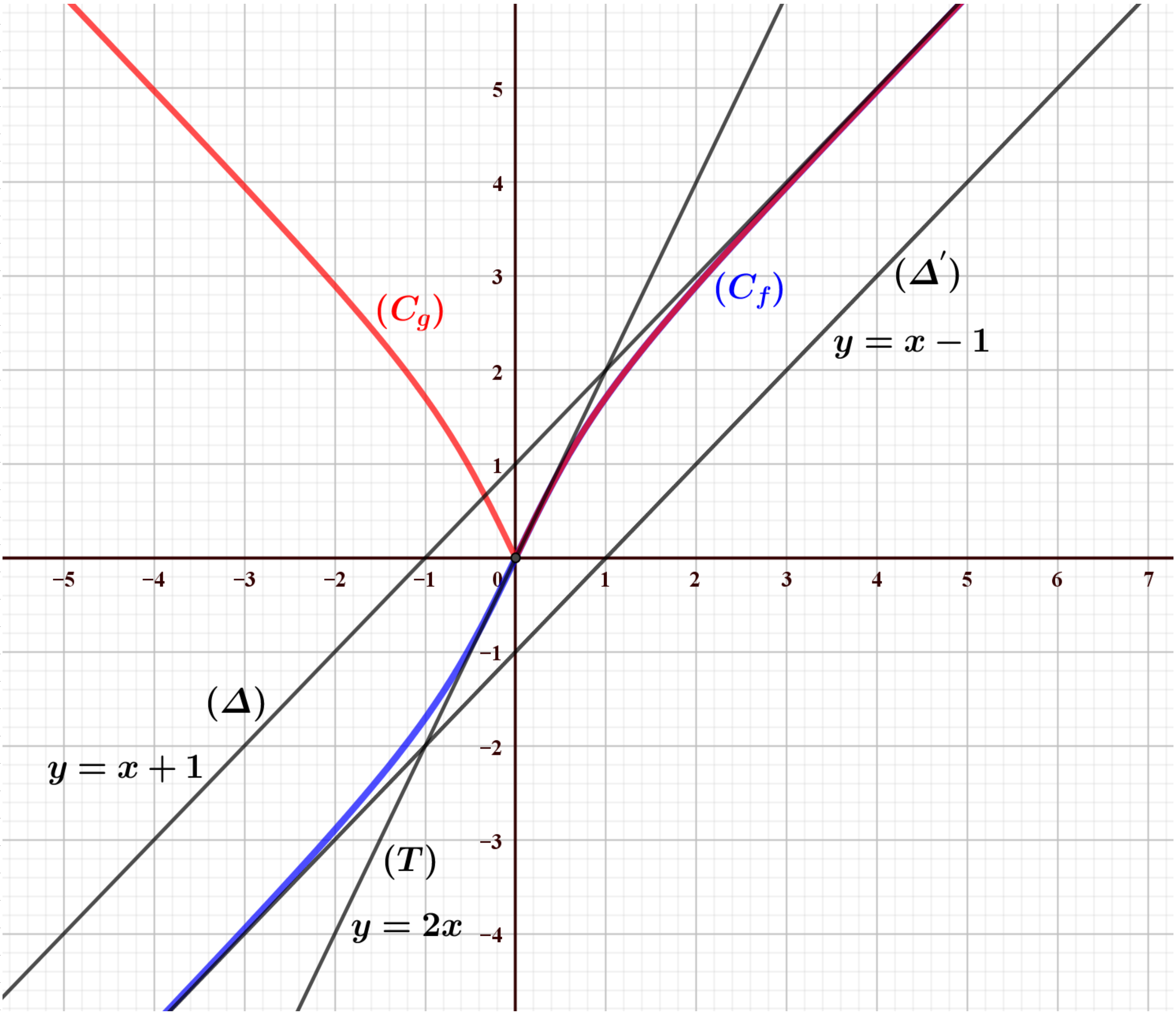
محور الفواصل **(مناقشة أفقية)** الذي $y=m^2-1$ معادلة له :

✓ إذا كان $m^2-1=0$ أي $m^2=1$ أي $m\in\{-1,1\}$ فإن المعادلة $g(x)=m^2-1$ تقبل حلا وحيدا

معدوما .

✓ إذا كان $m^2-1<0$ أي $m^2<1$ أي $m\in]-1,1[$ فإن المعادلة $g(x)=m^2-1$ لا تقبل حلولا لأنه لا توجد نقاط تقاطع بين (C_g) و المستقيم الذي $y=m^2-1$ معادلة له .

✓ إذا كان $m^2-1>0$ أي $m^2>1$ أي $m\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن المعادلة $g(x)=m^2-1$ تقبل حلين متمايزين في الإشارة .



إنتهى حل التمرين الأول ...

حل التمرين رقم 02 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x-2}$ و و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- إيجاد الأعداد الحقيقية α ، β و γ بحيث المنحنى (C_f) يقبل كمقارب المستقيم (Δ) الذي $y=x-1$ معادلة له و يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة 3 :

يكون المستقيم (Δ) الذي $y=x-1$ معادلة له مقاربا مائلا لمنحنى f بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$ إذا و فقط إذا

كان $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ معناه $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x-2}-x+1\right]=0$ أي

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\dfrac{(\alpha-1)x^2+(\beta+3)x+\gamma-2}{x-2}\right]=0$ أي $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[(\alpha-1)\dfrac{x^2}{x-2}+(\beta+3)\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{\gamma-2}{x-2}\right]=0$

حيث نعلم أن : $\dfrac{\gamma-2}{x-2}\to 0$ و $(\beta+3)\dfrac{x}{x-2}\to\beta+3$ لما $|x|\to+\infty$ لأن $\dfrac{x}{x-2}\to 1$

و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}x=+\infty$ ؛ إذن تكون $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ إذا و فقط إذا كان $\alpha-1=0$

و $\beta+3=0$ و بالتالي نستنتج أن : $\alpha=1$ و $\beta=-3$.

(C_f) يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة 3 إذن ينتج $f'(3)=0$ حيث من أجل القيم السابقة لـ α و β

تكون $f(x)=\dfrac{x^2-3x+\gamma}{x-2}$ حيث أن الدالة f تقبل الإشتقاق على مجموعة تعريفها و لدينا من أجل كل $x\in D_f$

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+6-\gamma}{(x-2)^2}$ ؛ إذن $f'(3)=0$ تكافئ $\dfrac{3^2-4\times3+6-\gamma}{(3-2)^2}=0$ تكافئ $3-\gamma=0$

تكافئ $\gamma=3$ ؛ و منه نستنتج أنه من أجل كل $x\neq 2$ فإن : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$.

2- حساب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$:

f تقبل الإشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل عدد حقيقي D_f : $$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

✓ دراسة إتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ فإن : $(x-2)^2>0$ و بالتالي إشارة المشتقة من إشارة البسط أي من إشارة x^2-4x+3 و هو ثلاثي حدود من الدرجة الثانية مميزه $\Delta=(-4)^2-4(1)(3)=4\succ 0$ و عليه فهو يقبل جذرين متمايزين هما : $x_1=\frac{4+\sqrt{4}}{2}=3$ و $x_2=\frac{4-\sqrt{4}}{2}=1$ ؛ نلخص إشارة ثلاثي الحدود x^2-4x+3 في جدول :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
إشارة x^2-4x+3		+	|	$-$	|	+	

➢ بما أن $f'(x)\geq 0$ على كل من المجالين $]-\infty,1]$ و $[3,+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,1]$ و متزايدة تماما على المجال $[3,+\infty[$.

➢ بما أن $f'(x)\leq 0$ على كل من المجالين $[1,2[$ و $]2,3]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1,2[$ و متناقصة تماما على المجال $]2,3]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	||	$-$	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

كيفية حساب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها : $D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

f دالة ناطقة و بالتالي نهاية الدالة f عند ∞ هي نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام و منه نجد :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x+3}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+3}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$$

و من أجل حساب نهاية الدالة f عند 2 بقيم أكبر و بقيم أصغر ندرس إشارة المقام $x-2$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
إشارة $x-2$		$-$	0	$+$	

✓ لما $x \xrightarrow{<} 2$ فإن $x-2 \to 0^-$ و لما $x \xrightarrow{>} 2$ فإن $x-2 \to 0^+$ ؛ إذن نستنتج أن :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} \dfrac{1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} \dfrac{1}{x-2} = +\infty \end{cases}$$

3- إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي -3 يطلب كتابة معادلة لكل منهما :

نعلم أن العدد $f'(x_0)$ يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0 ؛ إذن نبحث عن حلول المعادلة $f'(x)=-3$ في $\mathbb{R}-\{2\}$:

$f'(x)=-3$ تكافئ $\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=-3$ تكافئ $x^2-4x+3=-3x^2+12x-12$ تكافئ

$4x^2-16x+15=0$ ؛ مميز ثلاثي الحدود هو $\Delta=(-16)^2-4(4)(15)=16\succ 0$:

إذن المعادلة $4x^2-16x+15=0$ تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\dfrac{16+\sqrt{16}}{8}=5/2$ و

$x_2=\dfrac{16-\sqrt{16}}{8}=3/2$ ؛ إذن نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما

يساوي -3 .

و منه $\begin{cases}(T): y=-3\left(x-\dfrac{5}{2}\right)+f\left(\dfrac{5}{2}\right)\\(T'): y=-3\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$ بعد حساب $\begin{cases}(T): y=-3x+11\\(T'): y=-3x+3\end{cases}$ $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ و $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

5- المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم الذي $y+3x-m=0$ معادلة له :

$y+3x-m=0$ معناه $y=-3x+m$ ؛ علما أن جميع المستقيمات التي لها معادلة من الشكل $y=-3x+m$ توازي كل من المماس (T) و المماس (T') لأن لها نفس معامل التوجيه و هو -3 و في هذه الحالة تكون **المناقشة مائلة** .

- ✓ إذا كان $m=11$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=-3x+11$ معادلة له و هو المماس (T) في نقطة وحيدة فاصلتها $5/2$.
- ✓ إذا كان $m=3$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=-3x+3$ معادلة له و هو المماس (T') في نقطة وحيدة فاصلتها $3/2$.
- ✓ إذا كان $3<m<11$ أي $m\in]3,11[$ فإنه لا توجد نقاط تقاطع بين المنحنى (C_f) و المستقيم الذي $y=-3x+m$ معادلة له .
- ✓ إذا كان $-\dfrac{3}{2}<m<3$ أي $m\in\left]-\dfrac{3}{2},3\right[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع في نقطتين كل منهما ذات فاصلة موجبة تماما مع المستقيم الذي $y=-3x+m$ معادلة له .
- ✓ إذا كان $m=-\dfrac{3}{2}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع في نقطتين إحداهما ذات فاصلة موجبة تماما و الأخرى ذات فاصلة معدومة مع المستقيم الذي $y=-3x+m$ معادلة له .

✓ إذا كان $m<-\frac{3}{2}$ أي $m\in\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[$ فإن المنحنى $\left(C_f\right)$ يتقاطع في نقطتين إحداهما ذات فاصلة

موجبة تماما و الأخرى ذات فاصلة سالبة تماما مع المستقيم الذي $y=-3x+m$ معادلة له .

✓ إذا كان $m>11$ أي $m\in\left]11,+\infty\right[$ فإن المنحنى $\left(C_f\right)$ يتقاطع في نقطتين كل منهما ذات فاصلة موجبة

تماما مع المستقيم الذي $y=-3x+m$ معادلة له .

6- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ علما أن المنحنى $\left(C_g\right)$ صورة $\left(C_f\right)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

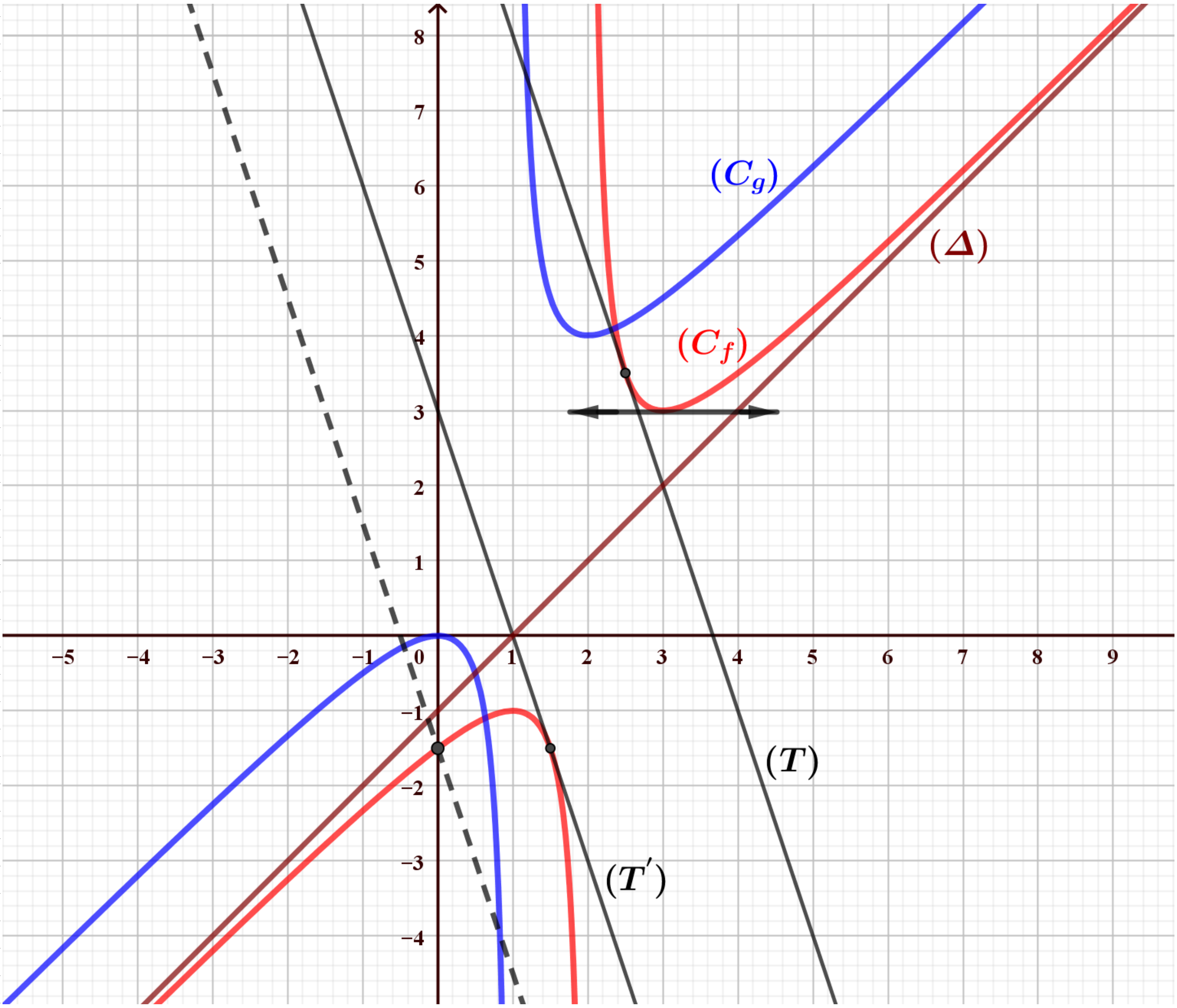
تذكير : إذا كانت $g(x)=f(x+a)+b$ حيث $a\in\mathbb{R}$ ، $b\in\mathbb{R}$ فإن $\left(C_g\right)$ صورة $\left(C_f\right)$ بالإنسحاب

الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$.

بما أن $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالإنتقال من المنحنى $\left(C_f\right)$ إلى المنحنى $\left(C_g\right)$ فإن :

$\begin{cases}-a=-1\\ b=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$ ؛ إذن من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_g$:

$g(x)=f(x+1)+1=\frac{(x+1)^2-3(x+1)+3}{(x+1)-2}+1=\frac{x^2-x+1}{x-1}+1$ أي $\boxed{g(x)=\frac{x^2}{x-1}}$.



إنتهى حل التمرين الثاني ...

حل التمرين رقم 03 :

1- القراءة البيانية :

✓ بما أن حامل محور الفواصل الذي نعلم أن $y=0$ هي معادلة له مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$ فإن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

✓ $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) (**أو الميل لأن المعلم متعامد و متجانس**) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$ حيث أن هذا المماس هو مستقيم يوازي حامل محور الفواصل (**أفقي**) و بالتالي ميله يكون معدوما أي $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

✓ $f'(1)$ يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 حيث أن هذا المماس هو المستقيم الذي يشمل النقطتين $A(1;f(1))$ و $B\left(-\frac{1}{2};f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ؛ إذن يكون :

$$f'(1)=\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)-f(1)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{0-2}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{4}{3}$$

✓ تكون $f'(x)\geq 0$ على المجالات التي تكون فيها الدالة f متزايدة تماما و على المجال الجزئي $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ من $[0,4]$ تكون الدالة f متزايدة تماما ؛ إذن حلول المتراجحة $f'(x)\geq 0$ هي : $S=\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

✓ حلول المتراجحة $f(x)\leq 2$ تمثل فواصل نقط المنحنى (C_f) الواقعة تحت المستقيم الأفقي الذي $y=2$ معادلة له أو المنطبقة عليه في المجال $[0,4]$ و من الشكل نجد : $S=[0,1]\cup[2,4]$.

✓ المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=2m-1$:

حلول المعادلة $f(x)=2m-1$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي الموازي لحامل محور الفواصل الذي $y=2m-1$ معادلة له **(نوع المناقشة أفقية)** .

- إذا كان $2m-1\prec 0$ أي $m\prec \frac{1}{2}$ أي $m\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ فإنه لا توجد نقط تقاطع بين (C_f) و بين المستقيم الذي $y=2m-1$ معادلة له ؛ إذن المعادلة $f(x)=2m-1$ لا تقبل حلولا .
- إذا كان $2m-1=0$ أي $m=\frac{1}{2}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=2m-1$ معادلة له في نقطة وحيدة فاصلتها هي 0 (مبدأ المعلم) .
- إذا كان $0\prec 2m-1\prec \frac{12}{5}$ أي $\frac{1}{2}\prec m\prec \frac{17}{10}$ أي $m\in\left]\frac{1}{2},\frac{17}{10}\right[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=2m-1$ معادلة له في نقطتين كل منهما ذات فاصلة موجبة تماما ؛ إذن المعادلة $f(x)=2m-1$ تقبل حلين متمايزين موجبين تماما .
- إذا كان $2m-1=\frac{12}{5}$ أي $m=\frac{17}{10}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=2m-1$ معادلة له في نقطة وحيدة فاصلتها هي $\frac{3}{2}$ ؛ إذن المعادلة $f(x)=2m-1$ تقبل حلا وحيدا هو $\frac{3}{2}$.
- إذا كان $2m-1\succ \frac{12}{5}$ أي $m\succ \frac{17}{10}$ أي $m\in\left]\frac{17}{10},+\infty\right[$ فإنه لا توجد نقط تقاطع بين (C_f) و بين المستقيم الذي $y=2m-1$ معادلة له ؛ إذن المعادلة $f(x)=2m-1$ لا تقبل حلولا .

2- نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

✓ تكون الدالة g إذا و فقط إذا كان $f(x)\neq 0$ ؛ حيث نعلم من المعطيات أن (C_f) يقطع (xx') فقط عند المبدأ O ؛ إذن تكون $f(x)\neq 0$ إذا و فقط إذا كان $x\neq 0$ و منه نستنتج أن : $D_g=\left]0,+\infty\right[$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty\end{cases}$$

لأن : $f(x)\to 0^+$ لما $x\xrightarrow{>}0$ و $f(x)\to 0^+$ لما $x\to+\infty$

✓ الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0,+\infty[$ و من أجل كل عدد $x\in]0,+\infty[$ لدينا : $\boxed{g'(x)=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$

على المجال $]0\,,\,3/2]$ الدالة f متزايدة تماما و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0\,,\,3/2]$ فإن

$f'(x)\geq 0$ و عليه يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0\,,\,3/2]$ ؛ $g'(x)\leq 0$ ؛ إذن الدالة g

متناقصة تماما على المجال $]0\,,\,3/2]$.

على المجال $[3/2\,,+\infty[$ الدالة f متناقصة تماما و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي $x\in[3/2\,,+\infty[$

فإن $f'(x)\leq 0$ و عليه يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\in[3/2\,,+\infty[$ ؛ $g'(x)\geq 0$ ؛ إذن الدالة g

متزايدة تماما على المجال $[3/2\,,+\infty[$.

3- من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما نعتبر الدالة : $k(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

أ) نهاية الدالة k عند أطراف مجموعة تعريفها :

$\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\end{cases}$ و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}k(x)=0$ ** f دالة مستمرة على مجموعة تعريفها **

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=0\end{cases}$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=0$ ** f دالة مستمرة على مجموعة تعريفها **

الإستنتاج : (C_k) يقبل حامل محور الفواصل (xx') كمقارب أفقي بجوار $+\infty$.

مبرهنة : مشتقة الدالة $v\circ u$

إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الإشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v\circ u$ تقبل

الإشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I : $\boxed{(v\circ u)'(x)=v'\left[u(x)\right]\times u'(x)}$

k تقبل الإشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $k'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

لأن k هي مركب الدالة مقلوب $u:x\mapsto\frac{1}{x}$ متبوعة بالدالة f .

إذن نستنتج أن : $k'\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ لأنه من السؤال 1− ب) فإن : $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$

إنتهى حل التمرين الثالث ...

دالة وسيطية :

f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f_m(x)=\frac{x^2-mx}{x-1}$ حيث m وسيط حقيقي .

و ليكن (C_{f_m}) المنحنى الممثل للدالة f_m في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- بين أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) حيث $m\neq 1$ تشترك في مستقيم مقارب ثابت يطلب تعيين معادلة له .

2- بين أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

3- عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: $f_m(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ مع $m\neq 1$.

4- برهن أن النقطة $\Omega_m(1;2-m)$ مركز تناظر للمنحنى (C_{f_m}) حيث $m\neq 1$.

✓ ما هي مجموعة النقط Ω_m لما m يمسح المجموعة $\mathbb{R}-\{1\}$.

5- أحسب $f_m'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ ثم إستنتج :

✓ قيم m و التي من أجلها تحافظ الدالة f_m على إتجاه تغيرها على مجموعة تعريفها .

✓ قيم m و التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين عظمى و صغرى .

حل التمرين :

1- نبين أن جميع المنحنيات $\left(C_{f_m}\right)$ حيث $m\neq 1$ تشترك في مستقيم مقارب ثابت يطلب تعيين معادلة له :

نبين أن المستقيم الذي $x=1$ مقارب عمودي لجميع المنحنيات $\left(C_{f_m}\right)$ حيث $m\neq 1$:

لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f_m(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{x^2-mx}{x-1}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{1-m}{x-1}=\infty \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f_m(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{x^2-mx}{x-1}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{1-m}{x-1}=\infty \end{cases}$ لأن $1-m\neq 0$ لأن $m\neq 1$

و منه نستنتج أن المستقيم الذي $x=1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f_m من أجل كل $m\neq 1$.

2- نبين أن جميع المنحنيات $\left(C_{f_m}\right)$ تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيينها :

نفرض أنه توجد نقطة ثابتة $A(x_0;y_0)\in\left(C_{f_m}\right)$ من أجل كل عدد حقيقي m معناه :

من أجل كل عدد حقيقي m فإن : $\dfrac{x_0^{\ 2}-mx_0}{x_0-1}=y_0$

معناه من أجل كل عدد حقيقي m فإن : $x_0^{\ 2}-mx_0=(x_0-1)y_0$

معناه من أجل كل عدد حقيقي m فإن : $mx_0+(x_0-1)y_0-x_0^{\ 2}=0$

إذن ينتج : $\begin{cases} x_0=0 \\ (x_0-1)y_0-x_0^{\ 2}=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x_0=0 \\ -y_0=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \end{cases}$ و منه نستنتج أن :

$O(0;0)\in\left(C_{f_m}\right)$ من أجل كل عدد حقيقي m .

3- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: $f_m(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ مع $m\neq 1$:

من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ لدينا : $f_m(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ أي $f_m(x)=\dfrac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$

أي $f_m(x)=\dfrac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$ ، حيث نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فإن :

$f_m(x)=\dfrac{x^2-mx}{x-1}$ و بالتالي ينتج : $\begin{cases} a=1 \\ b-a=-m \\ c-b=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ b=1-m \\ c-b=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ b=1-m \\ c=1-m \end{cases}$ و منه نستنتج

أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فإن : $f_m(x)=x+1-m+\dfrac{1-m}{x-1}$ حيث m وسيط حقيقي .

4- البرهان أن النقطة $\Omega_m(1;2-m)$ مركز تناظر للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$ حيث $m\neq 1$:

ليكن $x\in D_{f_m}$ معناه $x\neq 1$ و بالتالي يكون $-x\neq -1$ و منه $2-x\neq 2-1$ أي $2-x\neq 1$ أي $2-x\in D_{f_m}$ ، و من جهة أخرى من أجل كل عدد $x\in D_{f_m}$ نحسب $f_m(2-x)+f_m(x)$ فنجد :

$$f_m(2-x)+f_m(x)=\frac{(2-x)^2-m(2-x)}{(2-x)-1}+\frac{x^2-mx}{x-1}=\frac{x^2-4x+4+mx-2m}{1-x}+\frac{x^2-mx}{x-1}$$ أي

$$f_m(2-x)+f_m(x)=\frac{4x-2mx+2m-4}{x-1}$$ أي $$f_m(2-x)+f_m(x)=\frac{4(x-1)-2m(x-1)}{x-1}$$ أي

$$f_m(2-x)+f_m(x)=\frac{(x-1)(4-2m)}{x-1}$$ و منه من أجل $x\neq 1$ ينتج :

$f_m(2-x)+f_m(x)=2(2-m)$ و هي من الشكل : $f_m(2a-x)+f_m(x)=2b$ حيث $a=1$ و $b=2-m$ و بالتالي النقطة $\Omega_m(1;2-m)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f_m حيث $m\neq 1$.

✓ **تعيين مجموعة النقط Ω_m لما m يمسح المجموعة $\mathbb{R}-\{1\}$:**

النقط $\Omega_m(1;2-m)$ من المستوي هي نقط ذات فاصلة ثابتة و تساوي 1 و ترتيب يتغير لما يتغير m في المجموعة $\mathbb{R}-\{1\}$ و بالتالي مجموعة النقط Ω_m لما يمسح m المجموعة $\mathbb{R}-\{1\}$ هي المستقيم (Δ) الذي $x=1$ معادلة له باستثناء النقطة Ω_1 .

5- حساب $f_m'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$:

الدالة f_m تقبل الإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ حيث :

$$f'_m(x)=\frac{(2x-m)(x-1)-(x^2-mx)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+m}{(x-1)^2}$$

تعيين في كل حالة :

✓ قيم m و التي من أجلها تحافظ الدالة f_m على إتجاه تغيرها على مجموعة تعريفها :

الدالة f_m تحافظ على إتجاه تغيرها على مجموعة تعريفها معناه $f'_m(x)$ ذات إشارة على $\mathbb{R}-\{1\}$ و بما أن $(x-1)^2>0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فإن إشارة $f'_m(x)$ من إشارة ثلاثي الحدود x^2-2x+m

بحيث يكون ثلاثي الحدود x^2-2x+m ذو إشارة ثابتة على المجموعة $\mathbb{R}-\{1\}$ إذا و فقط إذا كان $\Delta_m=(-2)^2-4(1)(m)$ سالبا أي $\Delta_m=4(1-m)$ سالبا .

نضع : $\Delta_m\leq 0$ يكافئ $4(1-m)\leq 0$ يكافئ $m\geq 1$ أي $m\in[1,+\infty[$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $m\in[1,+\infty[$ فإن الدالة f_m تحافظ على إتجاه تغيرها على مجموعة تعريفها .

✓ قيم m و التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين عظمى و صغرى :

تقبل f_m قيمتين حديتين عظمى و صغرى إذا و فقط إذا كانت $f'_m(x)$ تنعدم و تغير من إشارتها على المجموعة $\mathbb{R}-\{1\}$ أي إذا و فقط إذا كان ثلاثي الحدود x^2-2x+m ينعدم و يغير من إشارته على المجموعة $\mathbb{R}-\{1\}$ أي إذا و فقط إذا كان $\Delta_m>0$ أي $1-m>0$ يكافئ $m<1$ أي $m\in]-\infty,1[$

و في هذه الحالة تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين عظمى و صغرى هما : $f_m\left(\frac{2+\sqrt{4(1-m)}}{2}\right)$ و $f_m\left(\frac{2-\sqrt{4(1-m)}}{2}\right)$ أي $f_m\left(1+\sqrt{1-m}\right)$ و $f_m\left(1-\sqrt{1-m}\right)$.

إنتهى حل التمرين ...

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

جدول تغيرات دالة

f دالة عددية جدول تغيراتها كالآتي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

نفرض أن الدالة f تكتب من الشكل : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة .

1- أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c .

2- بالإعتماد على جدول تغيرات الدالة f :

أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c .

ب) عين $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} f(x)$ ؛ ثم أعط تفسيرا للنتيجتين بيانيا .

ج) قارن بين $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{4}{5}\right)$ معللا إجابتك .

3- نعتبر فيما يلي أن : $a=1$ ، $b=1$ و $c=\frac{1}{4}$ ؛ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي $y=x+1$ معادلة له مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

ج) أثبت أن النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

د) حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .

تمرين في القراءة البيانية

(C_f) التمثيل البياني لدالة f معرفة على المجال $]-\infty,2[$.

المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما يوازي حامل محور الفواصل ؛ $y=1$ معادلة له و الآخر يوازي حامل محور التراتيب ؛ $x=2$ معادلة له .

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين $A(-2;0)$ و $B(1;0)$.

1- بقراءة بيانية ، عين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} f(x)$.

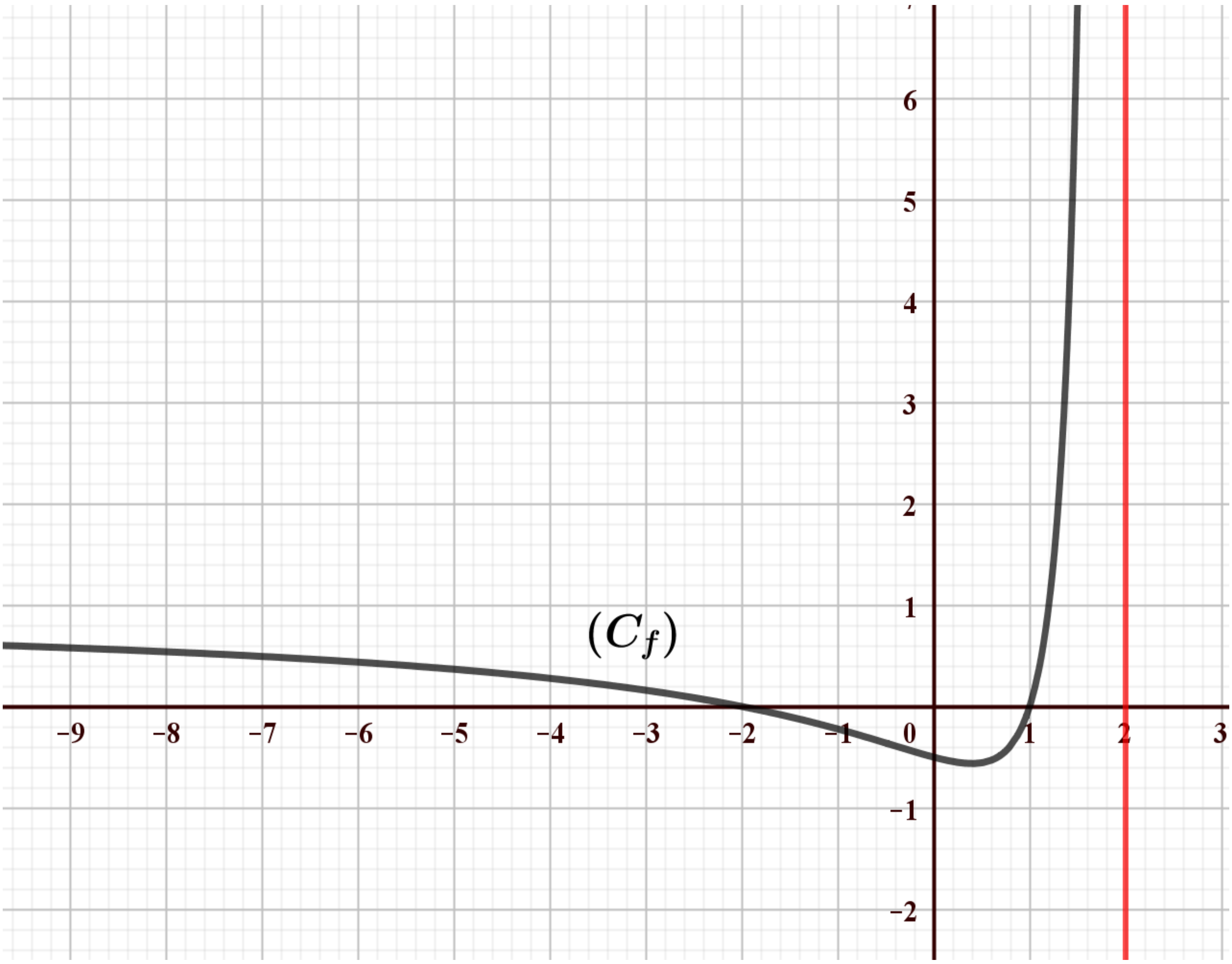
2- بقراءة بيانية عين : $f(-2)$ ، $f(1)$.

3- نفرض أن : $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-2)^2}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة .

✓ باستعمال المعطيات السابقة ؛ عين الأعداد a ، b و c .

4- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-\infty,2[$ كما يلي : $g(x)=f(x)-2$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

✓ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) إنطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أنشئه .



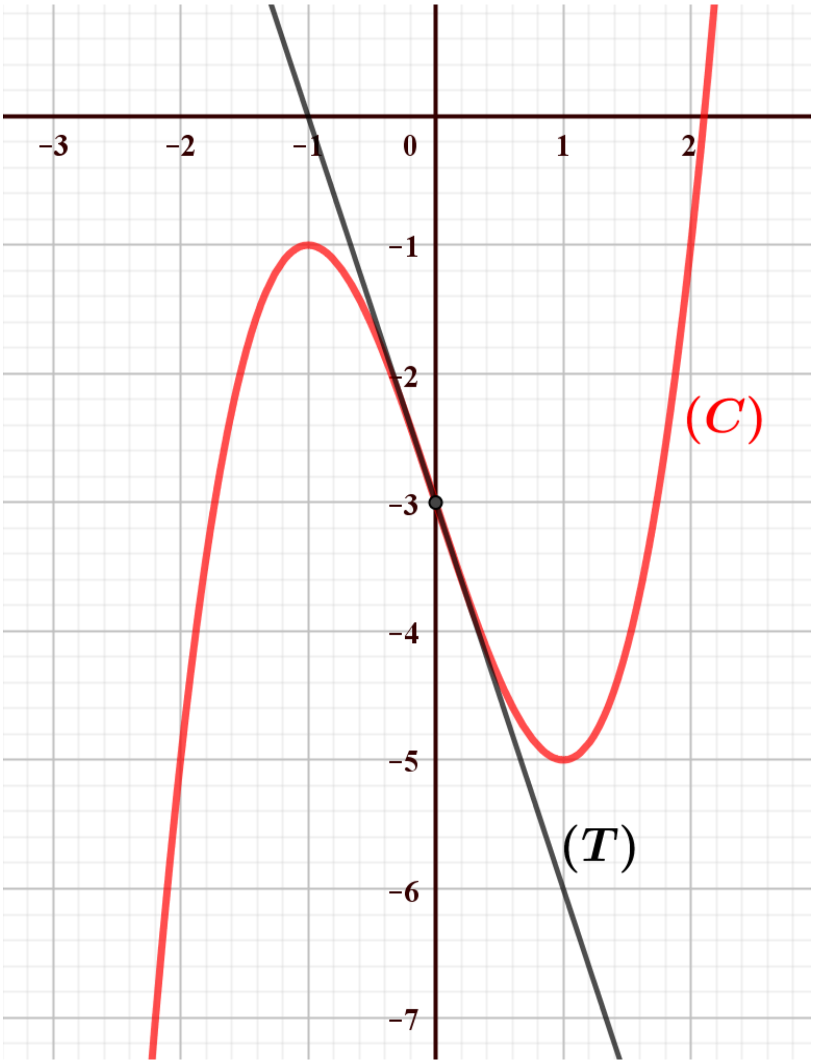
دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نفرض أن الدالة f معرفة بـ : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية .

✓ بقراءة بيانية : حدد $f(0)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(0)$.

✓ أوجد الأعداد a ، b ، c و d .



−3
−2
−1
0
1
2
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
(C)
(T)

حل التمرين رقم 01 :

1- حساب $f'(x)$ بدلالة a و c :

الدالة f تقبل الإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ و لدينا :

من أجل كل $x \in D_f$: $$f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}$$

2- أ) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بالإعتماد على جدول تغيرات الدالة f :

يوجد ثلاث ثوابت يطلب تعيينها ؛ إذن يمكن تشكيل على الأقل ثلاث معادلات ذات المجاهيل a ، b و c :

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$ تكافئ : $$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b - 2c = 1 \\ \frac{3}{2}a + b + 2c = 3 \\ a - 4c = 0 \end{cases}$$ ؛ و من المعادلة الثالثة ينتج $a = 4c$ ؛

إذن بالتعويض في المعادلتين الأولى و الثانية نتحصل على : $$\begin{cases} 2c + b - 2c = 1 \\ 6c + b + 2c = 3 \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} b = 1 \\ b + 8c = 3 \end{cases}$$

و منه $$\begin{cases} b = 1 \\ c = \frac{2}{8} \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} b = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$ ؛ و بما أن $a = 4c$ فإن $a = 4 \times \frac{1}{4} = 1$

نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ فإن : $$f(x) = x + 1 + \frac{1}{4(x-1)}$$

ب) من جدول التغيرات يكون : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$

التفسير الهندسي : المستقيم الذي $x = 1$ معادلة له مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

جـ) المقارنة بين $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{4}{5}\right)$: كل من العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{4}{5}$ عنصران من المجال $\left[\frac{1}{2},1\right[$ مع $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$

حيث أن الدالة f متناقصة تماما على هذا المجال ؛ إذن يكون $f\left(\frac{4}{5}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$.

3- أ) نبين أن المستقيم (Δ) الذي $y = x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$f(x)$ هي من الشكل $f(x) = x+1+g(x)$ حيث : $g(x) = \dfrac{1}{4(x-1)}$ ؛ و بما أن :

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4(x-1)} = 0$ ؛ إذن نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي $y = x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

إشارة الفرق $f(x) - y = \dfrac{1}{4(x-1)}$ هي من إشارة المقدار $x-1$ بحيث الفرق $f(x)-y$ لا ينعدم على $\mathbb{R}-\{1\}$ و بالتالي فالمنحنى (C_f) لا يتقاطع مع المستقيم المقارب (Δ) .

✓ إذا كان $x<1$ فإن $x-1<0$ و منه $f(x)-y<0$ ؛ إذن على المجال $]-\infty,1[$: (C_f) يقع تحت المقارب المائل (Δ) .

✓ إذا كان $x>1$ فإن $x-1>0$ و منه $f(x)-y>0$ ؛ إذن على المجال $]1,+\infty[$: (C_f) يقع فوق المقارب المائل (Δ) .

ملاحظة : يستحسن دائما تلخيص دراسة الوضع النسبي في جدول .

ج) إثبات أن النقطة $\Omega(2;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

تذكير : حتى تكون النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لمنحنى دالة f يكفي أن يتحقق الشرطين :

✓ من أجل كل $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$

✓ من أجل كل $x \in D_f$: $f(2a-x)+f(x)=2b$

ليكن $x \in D_f$ معناه $x \neq 1$ و منه $-x \neq -1$ و منه $2\times1-x \neq 2\times1-1$ أي $2\times1-x \neq 1$ و بالتالي يكون

$2\times1-x \in D_f$ و منه فالشرط الأول محقق .

نحسب الآن $f(2-x)+f(x)$: $f(2-x)+f(x)=2-x+1+\dfrac{1}{4(2-x-1)}+x+1+\dfrac{1}{4(x-1)}$

أي $f(2-x)+f(x)=4+\dfrac{1}{4(1-x)}+\dfrac{1}{4(x-1)}$ أي

$f(2-x)+f(x)=4-\cancel{\dfrac{1}{4(x-1)}}+\cancel{\dfrac{1}{4(x-1)}}$ و منه $f(2-x)+f(x)=4=2\times2$

إذن الشرط الثاني محقق و بالتالي نستنتج أن النقطة $\Omega(1;2)$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة f .

د) نحل في المجموعة $\mathbb{R}-\{1\}$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $x+1+\dfrac{1}{4(x-1)}=0$ تكافئ $\dfrac{4(x+1)(x-1)+1}{4(x-1)}=0$ تكافئ

$4(x+1)(x-1)+1=0$ تكافئ $4(x^2-1)+1=0$ تكافئ $4x^2-3=0$ تكافئ

$x^2={}^{3}\!/_{4}$ تكافئ $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أو $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ إذن $S=\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

نتيجة : حلول المعادلة $f(x)=0$ تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل ؛

إذن (C_f) يتقاطع مع حامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و في النقطة B ذات الفاصلة $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

إنتهى حل التمرين الأول ...

حل التمرين رقم 02 :

1- المستقيم الذي $y=1$ معادلة له هو مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$ ؛ إذن نستنتج أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ و كذلك المستقيم الذي $x=2$ معادلة له هو مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) ؛ و منه نستنتج أن $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=+\infty$ (من التمثيل البياني) .

2- تعيين $f(-2)$ و $f(1)$: المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة -2 و كذلك في النقطة ذات الفاصلة 1 و منه نستنتج أن $f(-2)=0$ و $f(1)=0$.

3- نفرض أنه من أجل كل عدد حقيقي $x<2$: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-2)^2}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية .

نستعمل المعطيات السابقة : $f(-2)=\dfrac{4a-2b+c}{16}=0$ و منه $4a-2b+c=0 \ldots(1)$

$f(1)=0$ تكافئ $a+b+c=0 \ldots\ldots(2)$ ؛ و كذلك باستعمال قانون نهاية دالة ناطقة بجوار $-\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{a\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=a$ حيث أن المستقيم الذي $y=1$ هو مقارب أفقي للمنحنى (C_f)

و منه تكون $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ ؛ إذن نستنتج أن $a=1$.

و بتعويض قيمة a في المعادلتين (1) و (2) نتحصل على الجملة $\begin{cases} 2b-c=4 \\ b+c=-1 \end{cases}$ ؛ و بالجمع طرفا لطرف نجد

$3b=3$ و بالتالي $b=1$ ؛ و لإيجاد قيمة c نعوض قيمة b في المعادلة الثانية مثلا فنجد $c=-2$.

نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ فإن : $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x-2)^2}}$

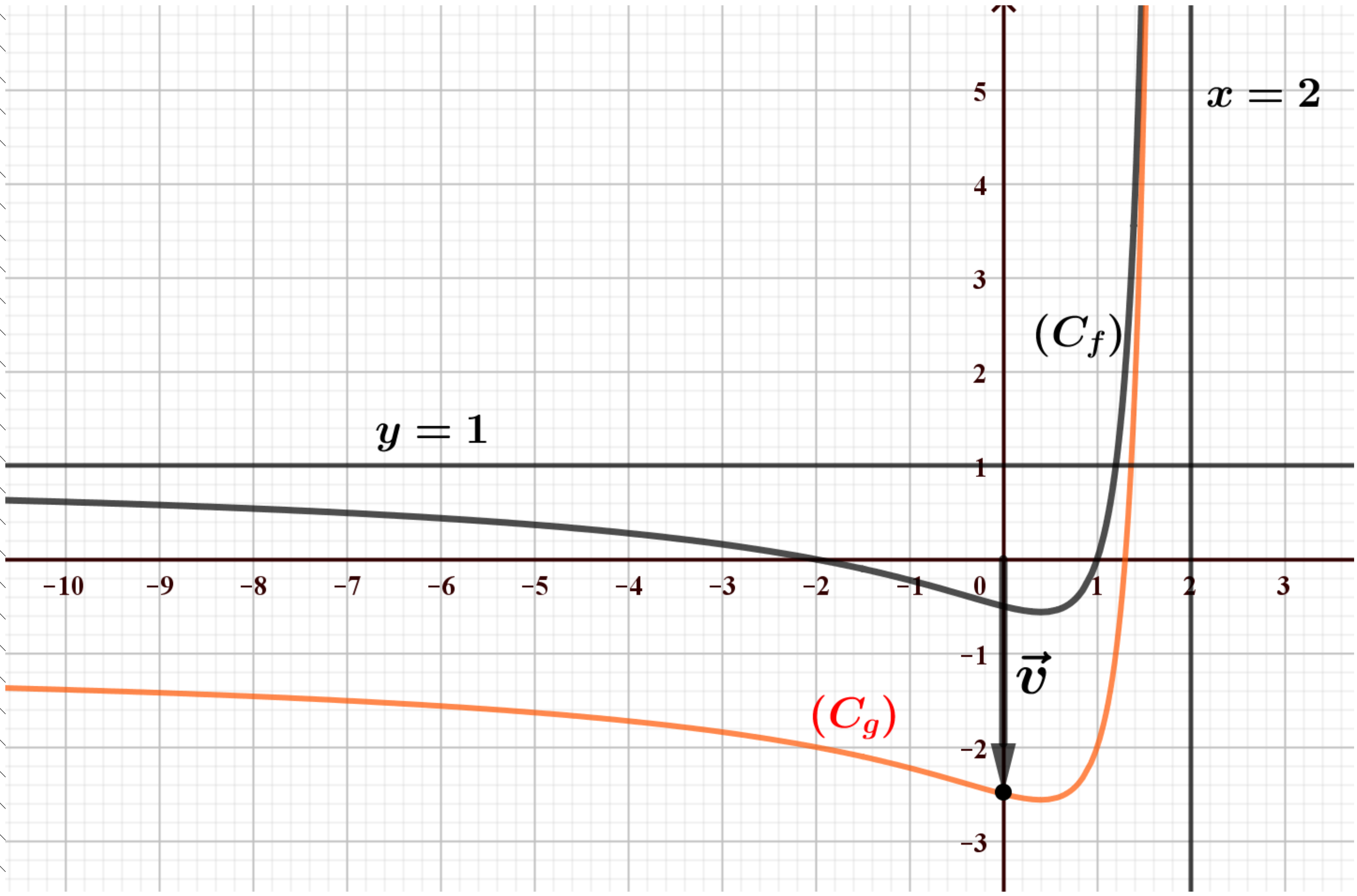
4- من أجل كل عدد حقيقي $x\in\left]-\infty,2\right[$: $g(x)=f(x)-2$

و هي الكتابة من الشكل $g(x)=f(x+\alpha)+\beta$ حيث : $\alpha=0$ و $\beta=-2$

تذكير : إذا كان دستور دالة g من الشكل : $g(x)=f(x+\alpha)+\beta$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

فإن (C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

نتيجة : (C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$.



إنتهى حل التمرين الثاني ...

حل التمرين الثالث :

f هي دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة (3) تكتب من الشكل : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية ثابتة يطلب تعيينها .

✓ $f(0)$ هي صورة العدد 0 بالدالة f و تمثل ترتيب نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب ؛

من الشكل السابق ينتج أن : $f(0)=-3$

✓ $f'(-1)$ يمثل معامل توجيه (ميل لأن المعلم متعامد و متجانس) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها -1 ؛ لكن نلاحظ أن المنحنى (C_f) يقبل ذروة في النقطة ذات الفاصلة -1 و منه فالمماس يكون أفقيا موازيا لحامل محور الفواصل و بالتالي ميله يكون **معدوما** ؛ إذن نستنتج أن $f'(-1)=0$.

✓ $f'(0)$ يمثل معامل توجيه أو ميل المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 ؛ إذن نحسب معامل توجيه المماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 :

المماس (T) يشمل النقطتين $E(0;-3)$ و $F(-1;0)$ مثلا ؛ إذن ينتج : $f'(0)=\dfrac{0-(-3)}{-1-0}=-3$

2- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بالإعتماد على النتائج السابقة :

الدالة f هي كثير حدود معرفة و تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$\begin{cases} f(0)=-3 \\ f'(-1)=0 \\ f'(0)=-3 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} d=-3 \\ 3a-2b+c=0 \\ c=-3 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} d=-3 \\ 3a-2b=3 \\ c=-3 \end{cases}$$

لإيجاد العددين a و b يمكن مثلا ملاحظة أن المنحنى (C_f) يقبل ذروة في النقطة ذات الفاصلة 1 و منه

$f'(1)=0$ ؛ و منه ينتج : $3a+2b+c=0$ أي $3a+2b=3$ لأن $c=-3$

من الجملة $\begin{cases}3a-2b=3\\3a+2b=3\end{cases}$ و بجمع المعادلتين طرفا لطرف نجد $6a=6$ ؛ إذن ينتج $a=1$

و بتعويض قيمة a في المعادلة الأولى مثلا نجد $3-2b=3$ تكافئ $-2b=0$ تكافئ $b=0$

نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\boxed{f(x)=3x^3-3x-3}$

إنتهى حل التمرين الثالث ...

$f(x)=f(m)$ دالة ناطقة و مناقشة وسيطية من الشكل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أدرس تغيرات الدالة f .

2- أوجد ثلاث أعداد حقيقية α ، β ، γ حيث من أجل كل عدد حقيقي $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

3- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

4- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المقارب المائل (Δ) .

5- أوجد إحداثيي نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل (xx') .

6- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 ثم أكتب معادلة لـ (T) .

7- أرسم (Δ) ، (T) ثم أنشئ (C_f) .

8- نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=f(-|x|)$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) حدد D_g مجموعة تعريف الدالة g .

ب) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) بالإعتماد على المنحنى (C_f) **(لا يطلب إنشاء (C_g))** .

جـ) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $y-x-2m-1=0$

9- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=f(m)$

حل التمرين رقم 01 :

1- دراسة تغيرات الدالة f :

أ) حساب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$$ بتطبيق قاعدة نهاية دالة ناطقة بجوار $\mp\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} \dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} \dfrac{1}{(x+1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} \dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} \dfrac{1}{(x+1)^2} = +\infty \end{cases}$$ لأن $(x+1)^2 \to 0^+$ عندما $x\xrightarrow{<}-1$ و

كذلك $(x+1)^2 \to 0^+$ عندما $x\xrightarrow{>}-1$.

التفسير الهندسي : بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم الموازي لحامل محور التراتيب الذي $x=-1$ معادلة له مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

ب) حساب $f'(x)$ بدلالة x : الدالة f تقبل الإشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل عدد حقيقي

$x \in D_f$ لدينا : $f'(x) = \dfrac{(3x^2+4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+2x^2)}{(x+1)^4}$ أي

$$f'(x) = \frac{x^3+3x^2+4x}{(x+1)^3} = \frac{(3x^2+4x)(x+1) - 2(x^3+2x^2)}{(x+1)^3}$$ أي $$f'(x) = \frac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3}$$

دراسة إشارة الدالة المشتقة :

من أجل $x \neq -1$ نضع : $f'(x) = 0$ تكافئ $\dfrac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3} = 0$ تكافئ $x(x^2+3x+4) = 0$

تكافئ $x=0$ أو $x^2+3x+4=0$ حيث $\Delta=(3)^2-4(1)(4)=-7\prec 0$ و بالتالي المعادلة

$x^2+3x+4=0$ لا تقبل حلولا حقيقية و من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ يكون $x^2+3x+4>0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+1)^3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+3x+4		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$ فإن $f'(x)\geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $[0,+\infty[$.

إذا كان $x\in]-1,0]$ فإن الدالة $f'(x)\leq 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1,0]$.

جـ) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2- تعيين الأعداد الحقيقية α ، β و γ حيث من أجل كل عدد $x\in D_f$:

$$f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

نكتب : $\frac{\alpha x^{3}+2\alpha x^{2}+(\alpha+\beta)x+\beta+\gamma}{(x+1)^{2}}=\frac{\alpha x(x+1)^{2}+\beta(x+1)+\gamma}{(x+1)^{2}}=f(x)$ و بالمطابقة

مع العبارة $f(x)=\frac{x^{3}+2x^{2}}{(x+1)^{2}}$ نتحصل على : $\begin{cases}\alpha=1\\2\alpha=2\\\alpha+\beta=0\\\beta+\gamma=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=1\\\alpha=1\\\beta=-\alpha\\\gamma=-\beta\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-1\\\gamma=1\end{cases}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 : $f(x)=x-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^{2}}$

3- نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له :

نكتب : $f(x)=x+k(x)$ حيث $k(x)=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^{2}}$ ، من الواضح أن $\lim_{|x|\to+\infty}k(x)=0$

إذن نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي $y=x$ معادلة له مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$.

4- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب المائل (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-y\right]$ حيث $f(x)-y=x-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^{2}}-x=\frac{1}{(x+1)^{2}}-\frac{1}{x+1}$

أي $f(x)-y=\frac{1}{(x+1)^{2}}-\frac{x+1}{(x+1)^{2}}=-\frac{x}{(x+1)^{2}}$ حيث من أجل كل عدد $x\neq-1$ فإن $(x+1)^{2}>0$

و بالتالي إشارة الفرق هي من إشارة $-x$:

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ فإن $x<0$ و بالتالي $-x\geq0$ إذن يكون $f(x)-y>0$ و منه ينتج أن المنحنى (C_f) يقع فوق المقارب المائل (Δ) .
- إذا كان $x\in]0,+\infty[$ فإن $x>0$ و بالتالي $-x<0$ إذن يكون $f(x)-y<0$ و منه ينتج أن المنحنى (C_f) يقع تحت المقارب المائل (Δ) .

إذا كان $x=0$ فإن $f(x)-y=-\frac{0}{(x+1)^2}=0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم المقارب المائل (Δ) في مبدأ المعلم $O(0;0)$.

5- إيجاد إحداثيي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل (xx') :

فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل تمثل حسابيا حلول المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}=0$ تكافئ $x^3+2x^2=0$ مع $x\neq -1$ تكافئ $x^2(x+2)=0$ مع $x\neq -1$ و منه حلول المعادلة $f(x)=0$ هي $S=\{0,-2\}$.

نتيجة : المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل (xx') في المبدأ $O(0;0)$ و النقطة $A(-2;0)$.

6- نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 مع كتابة معادلة له :

المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 معناه المعادلة $f'(x)=1$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث $f'(x)=1$ تكافئ : $\frac{x^3+3x^2+4x}{(x+1)^3}=1$ تكافئ

$x^3+3x^2+4x=x^3+3x^2+3x+1$ مع $x\neq -1$ تكافئ $4x=3x+1$ تكافئ $\boxed{x=1}$

إذن المعادلة $f'(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}-\{-1\}$ و المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

معادلة المماس (T) : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث $f'(1)=1$ و $f(1)=3/4$ ؛ إذن :

$$\boxed{(T): y=x-1/4}$$

8- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x)=f(-|x|)$

أ) تحديد مجموعة تعريف الدالة g :

تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد $x \in D_g$ فإن $-|x| \in D_f$ أي يكون $x \in D_g$ إذا كان $-|x| \neq -1$ أي $|x| \neq 1$ أي $x \neq 1$ و $x \neq -1$ و بالتالي نستنتج أن : $\boxed{D_g = \mathbb{R} - \{-1,1\}}$

ب) شرح كيفية إنشاء (C_g) إنطلاقا من (C_f) :

- إذا كان $x \leq 0$ أي $x \in]-\infty, 0]$ فإن $|x| = -x$ و عليه $-|x| = x$ و بالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x \leq 0$ فإن $g(x) = f(x)$ و بالتالي (C_g) ينطبق على (C_f) لما $x \in]-\infty, 0]$.

يمكن بسهولة إثبات أن الدالة g هي دالة زوجية و ذلك لأن : $D_g = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر لأن $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ معناه $x \neq -1$ إذن $-x \neq 1$ و $x \neq 1$ إذن $-x \neq -1$ أي $-x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

و من أجل كل $x \in D_g$: $g(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = g(x)$ لأن من خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي x نعلم أن $|-x| = |x|$ و بالتالي نستنتج أن الدالة g هي دالة زوجية .

إذن بما ان الدالة g زوجية فإنه إذا كان $x \geq 0$ يكون (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب .

جـ) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) - x - 2m - 1 = 0$

تكافئ $f(x) = x + 2m + 1$ و بالتالي حلول المعادلة $f(x) = x + 2m + 1$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المائل الذي $y = x + 2m + 1$ معادلة له (نوع المناقشة مائلة)

حيث أن جميع المستقيمات التي لها معادلة من الشكل $y = x + 2m + 1$ توازي المقارب المائل (Δ) و كذلك المماس (T) لأن لها نفس معامل التوجيه 1 .

- إذا كان $2m + 1 = -\frac{1}{4}$ أي $m = -\frac{5}{8}$ فإن المستقيم الذي $y = x - \frac{1}{4}$ معادلة له و هو المماس (T) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة ذات الفاصلة 1 (نقطة التماس) و بالتالي المعادلة $f(x) = x + 2m + 1$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما هو $x_0 = 1$.

- إذا كان $2m+1=0$ أي $m=-\frac{1}{2}$ فإن المستقيم الذي $y=x$ معادلة له و هو المقارب المائل (Δ) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة هي مبدأ المعلم ذات الفاصلة 0 و بالتالي المعادلة $f(x)=x+2m+1$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل معدوم هو $x_1=0$.

- إذا كان $-\frac{1}{4}<2m+1<0$ أي $-\frac{5}{8}<m<-\frac{1}{2}$ أي $m\in\left]-\frac{5}{8},-\frac{1}{2}\right[$ فإن المستقيم الذي $y=x+2m+1$ معادلة له يقطع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=x+2m+1$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

- إذا كان $2m+1<-\frac{1}{4}$ أي $m<-\frac{5}{8}$ أي $m\in\left]-\infty,-\frac{5}{8}\right[$ فإن المستقيم الذي $y=x+2m+1$ معادلة له لا يتقاطع مع المنحنى (C_f) و بالتالي المعادلة $f(x)=x+2m+1$ لا تقبل حلولا .

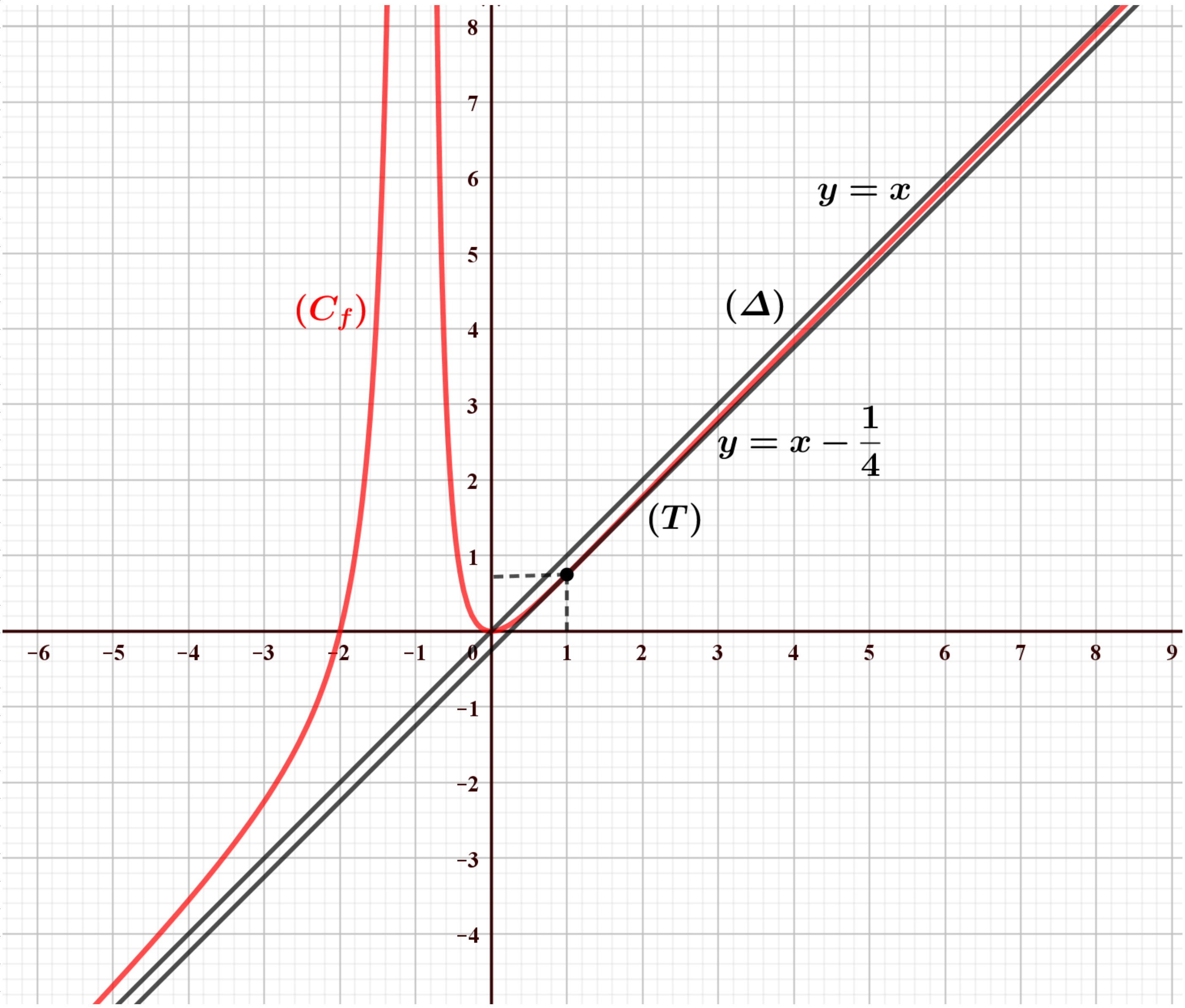
- إذا كان $2m+1>0$ أي $m>-\frac{1}{2}$ أي $m\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ فإن المستقيم الذي $y=x+2m+1$ معادلة له يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين مختلفتين فاصلة كل منهما عدد سالب و بالتالي المعادلة $f(x)=x+2m+1$ تقبل حلين متمايزين سالبين تماما .

9- المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$:

حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الأفقي الموازي لحامل محور الفواصل الذي $y=f(m)$ معادلة له (نوع المناقشة أفقية) .

- إذا كان $f(m)=0$ أي $m=0$ أو $m=-2$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=0$ معادلة له (حامل محور الفواصل) في نقطتين مختلفتين الأولى ذات الفاصلة $x_0=0$ و الثانية ذات الفاصلة $x_1=-2$ ، إذن المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين أحدهما معدوم و الآخر سالب تماما .

- إذا كان $f(m)<0$ أي $m\in]-\infty,-2[$ فإن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم الذي $y=f(m)$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات فاصلة سالبة تماما ، إذن المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل سالب تماما .
- إذا كان $f(m)>0$ أي $m\in]-2,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم الذي $y=f(m)$ معادلة له في ثلاث نقط مختلفة ، نقطتان كل منهما ذات فاصلة سالبة تماما و الأخرى ذات فاصلة موجبة تماما ، إذن المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل ثلاث حلول متمايزة مثنى مثنى ؛ حلان إشارتهما سالبة تماما و الحل الآخر موجب تماما .



إنتهى حل التمرين ....

دالة مع مناقشة وسيطية أفقية

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}$

نرمز بـ (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أدرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها .

2- أ) برر أن المستقيم (D) الذي $y=x+3$ معادلة له هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل (D) .

جـ) تحقق أنه من أجل كل $x\in D_f$ فإن $4-x\in D_f$ ؛ ثم بين أن $f(4-x)+f(x)=10$. ماذا تستنتج ؟

د) أرسم المستقيم (D) و أنشئ المنحنى (C_f) .

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$x^2+(1-m)x+2m=0$$

4) إستنتج حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة :

$$\cos(2\theta)+2(1-m)\cos\theta+4m+1=0 \quad ، \quad \theta\in[0,2\pi[$$

حل التمرين رقم 01 :

1- دراسة تغيرات الدالة f :

✓ حساب نهاية الدالة عند أطراف مجموعة التعريف :

نعلم أن نهاية دالة ناطقة بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$ تساوي إلى نهاية الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام و بالتالي نتحصل على :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \end{cases}$$

✓ من أجل إيجاد نهاية الدالة f لما يؤول x إلى 2 سواء بقيم أصغر أو بقيم أكبر ندرس إشارة المقام :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
إشارة $x-2$	$-$	0	$+$

إذن لما $x\xrightarrow{<}2$ فإن $x-2\to0^-$ و لما $x\xrightarrow{>}2$ فإن $x-2\to0^+$ و بالتالي نتحصل على :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{6}{x-2}=-\infty \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\dfrac{6}{x-2}=+\infty \end{cases}$$

✓ f تقبل الإشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)\times1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$$

✓ إشارة الدالة المشتقة : من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ فإن $(x-2)^2>0$ ؛ و بالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة ثلاثي الحدود x^2-4x-2 : $\Delta=(-4)^2-4(1)(-2)=24>0$

إذن ثلاثي الحدود x^2-4x-2 يقبل جذرين متمايزين هما : $x_1=\frac{4+\sqrt{24}}{2}=2+\sqrt{6}$ و

$x_2=\frac{4-\sqrt{24}}{2}=2-\sqrt{6}$ و تكون إشارة ثلاثي الحدود x^2-4x-2 كما في الجدول الآتي :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
إشارة x^2-4x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

- على المجالين $\left]-\infty,2-\sqrt{6}\right]$ و $\left[2+\sqrt{6},+\infty\right[$ تكون $f'(x)\geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty,2-\sqrt{6}\right]$ و $\left[2+\sqrt{6},+\infty\right[$.
- على المجالين $\left[2-\sqrt{6},2\right[$ و $\left]2,2+\sqrt{6}\right]$ تكون $f'(x)\leq 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $\left[2-\sqrt{6},2\right[$ و $\left]2,2+\sqrt{6}\right]$.

✓ **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$5-2\sqrt{6}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

- **التفسير الهندسي :** بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=+\infty$ فإن المستقيم الذي $x=2$ معادلة له هو مقارب عمودي (**موازي لحامل محور التراتيب**) للمنحنى (C_f) .

2- أ) تبرير أن المستقيم (D) الذي $y=x+3$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\mp\infty$:

يكفي أن نثبت أن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=0$:

أي $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x(x+1)}{x-2}-(x+3)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x^2+x-x^2+2x-3x+6}{x-2}\right]$

و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{6}{x-2}=0$ منه نستنتج أن المستقيم (D) الذي $y=x+3$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب (D) :

من السؤال السابق نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 2$ فإن : $f(x)-(x+3)=\frac{6}{x-2}$

إذن إشارة الفرق $\left[f(x)-(x+3)\right]$ من إشارة المقام $x-2$ مع $x\neq 2$.

- إذا كان $x<2$ فإن $x-2<0$ و بالتالي يكون $\left[f(x)-(x+3)\right]<0$ ؛ إذن نستنتج أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) .
- إذا كان $x>2$ فإن $x-2>0$ و بالتالي يكون $\left[f(x)-(x+3)\right]>0$ ؛ إذن نستنتج أن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) .
- بما أن الفرق $\left[f(x)-(x+3)\right]$ لا ينعدم من أجل كل قيمة للمتغير x فإن المنحنى (C_f) لا يتقاطع مع المستقيم المقارب المائل (D) .

ج) من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ فإن $x\neq 2$ و عليه يكون $-x\neq -2$ أي $4-x\neq 4-2$ أي $4-x\neq 2$ و عليه فإن $4-x\in D_f$ ؛ و من أجل كل عدد $x\in D_f$:

أي $f(4-x)+f(x)=\frac{(4-x)(4-x+1)}{4-x-2}+\frac{x(x+1)}{x-2}=\frac{x^2-9x+20}{2-x}+\frac{x^2+x}{x-2}$

$f(4-x)+f(x)=\frac{-x^2+9x-20}{x-2}+\frac{x^2+x}{x-2}=\frac{10x-20}{x-2}=\frac{10(x-2)}{x-2}$ ؛ إذن من أجل $x\neq 2$ ينتج

$f(4-x)+f(x)=10=2\times 5$ (من الشكل $f(2a-x)+f(x)=2b$ حيث $a=2$ ، $b=5$)

نتيجة : النقطة Ω ذات الإحداثيات $(2;5)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

3- المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$x^2+(m-1)x+2m=0$$

- إذا كان $x=2$ نتحصل على : $4+2(1-m)+2m=0$ أي $6-2m+2m=0$ أي $6=0$ تناقض و بالتالي المعادلة $x^2+(1-m)x+2m=0$ ليس لها حلول .

- إذا كان $x\neq 2$: دائما في هذا النوع من المعادلات نبحث أولا عن إظهار عبارة $f(x)$ عن طريق مجموعة من العمليات الجبرية البسيطة كما يلي :

$x^2+(m-1)x+2m=0$ تكافئ $x^2+x-mx=-2m$ تكافئ $x^2+x=mx-2m$ تكافئ

$x(x+1)=m(x-2)$ و بما أن $x\neq 2$ نقسم طرفي المعادلة الأخيرة على $x-2$ لنتحصل على المعادلة :

$\boxed{\frac{x(x+1)}{x-2}=m}$ تكافئ $\boxed{f(x)=m}$,

حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الأفقي الموازي لحامل محور الفواصل الذي $y=m$ معادلة له (نوع المناقشة أفقية) .

- إذا كان $m=0$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y=0$ معادلة له (**محور الفواصل**) في نقطتين مختلفتين فاصلتاهما 0 و -1 ؛ إذن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين متمايزين 0 و -1 .

- إذا كان $0<m<5-2\sqrt{6}$ أي $m\in\left]0,5-2\sqrt{6}\right[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي الذي $y=m$ معادلة له في نقطتين مختلفتين ؛ إذن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين متمايزين .

- إذا كان $m=5-2\sqrt{6}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي الذي $y=5-2\sqrt{6}$ معادلة له في

نقطة وحيدة ذات الفاصلة $x_1=2-\sqrt{6}$ و بالتالي المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا هو $x_1=2-\sqrt{6}$.

- إذا كان $5-2\sqrt{6}<m<5+2\sqrt{6}$ أي $m\in]5-2\sqrt{6},5+2\sqrt{6}[$ فإنه لا توجد نقاط تقاطع بين المنحنى (C_f) و المستقيم الأفقي الذي $y=m$ معادلة له و بالتالي المعادلة $f(x)=m$ لا تقبل حلولا .
- إذا كان $m=5+2\sqrt{6}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي الذي $y=5+2\sqrt{6}$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات الفاصلة $x_2=2+\sqrt{6}$ و بالتالي المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا هو $x_2=2+\sqrt{6}$
- إذا كان $m>5+2\sqrt{6}$ أي $m\in]5+2\sqrt{6},+\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي الذي $y=m$ معادلة له في نقطتين مختلفتين و بالتالي المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين متمايزين .
- إذا كان $m<0$ أي $m\in]-\infty,0[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي الذي $y=m$ في نقطتين مختلفتين و بالتالي المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين متمايزين .

4- إستنتاج عدد حلول المعادلة حسب قيم الوسيط الحقيقي m :

$$\cos(2\theta)+2(1-m)\cos\theta+4m+1=0 \quad ، \quad \theta\in[0,2\pi[$$

نعلم أنه من أجل كل عدد $\theta\in[0,2\pi[$: $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ ، إذن المعادلة أعلاه تكافئ :

$2\cos^2\theta-1+2\cos\theta-2m\cos\theta+4m+1=0$ تكافئ $\cos^2\theta+\cos\theta-m\cos\theta+2m=0$

تكافئ $\cos\theta[\cos\theta+1]=m[\cos\theta-2]$ حيث $\cos\theta-2\neq 0$ من أجل كل عدد $\theta\in[0,2\pi[$ لأن $-1\leq\cos\theta\leq 1$ من أجل كل عدد حقيقي $\theta\in[0,2\pi[$ ، إذن بقسمة طرفي المعادلة الأخيرة على $\cos\theta-2$ نتحصل على المعادلة : $\boxed{\frac{\cos\theta(\cos\theta+1)}{\cos\theta-2}=m}$ تكافئ $\boxed{f(\cos\theta)=m}$ ، $\theta\in[0,2\pi[$.

نضع $\cos\theta=y$ ($-1\leq y\leq 1$) ، إذن المعادلة $f(\cos\theta)=m$ تصبح من الشكل : $f(y)=m$.

نستعمل الآن نتائج المناقشة البيانية في السؤال السابق :

- إذا كان $m=0$ فإن $f(y)=m$ تقبل الحلين $y=0$ و $y=-1$ ...

المعادلة $\cos\theta=0$ تقبل بالضبط حلين في المجال $[0,2\pi[$ هما $\theta_1=\pi/2$ و $\theta_2=3\pi/2$

المعادلة $\cos\theta=-1$ تقبل بالضبط حلا وحيدا في المجال $[0,2\pi[$ هو $\theta_3=\pi$

و بالتالي إذا كان $m=0$ المعادلة $f(\cos\theta)=m$ تقبل 3 حلول هي $\{\pi/2,3\pi/2,\pi\}$

- إذا كان $0<m<5-2\sqrt{6}$ أي $m\in]0,5-2\sqrt{6}[$ فإن المعادلة $f(y)=m$ تقبل حلين متمايزين كل منهما محصور بين -1 و 0 نرمز لهما بـ y_1 و y_2 ...

كل من المعادلتين $\cos\theta=y_1$ و $\cos\theta=y_2$ تقبل حلين متمايزين في المجال $[0,2\pi[$ ؛ إذن المعادلة $f(\cos\theta)=m$ تقبل (4) حلول متمايزة في المجال $[0,2\pi[$.

- إذا كان $m=5-2\sqrt{6}$ فإن المعادلة $f(y)=m$ تقبل حلا وحيدا و هو $y_0=2-\sqrt{6}$ محصور بين -1 و 0 ...

المعادلة $\cos\theta=y_0$ تقبل حلين متمايزين في المجال $[0,2\pi[$ ؛ إذن المعادلة $f(\cos\theta)=m$ تقبل حلين متمايزين في المجال $[0,2\pi[$.

- إذا كان $5-2\sqrt{6}<m<5+2\sqrt{6}$ أي $m\in]5-2\sqrt{6},5+2\sqrt{6}[$ فإن المعادلة $f(y)=m$ لا تقبل حلولا و بالتالي المعادلة $f(\cos\theta)=m$ لا تقبل حلولا في المجال $[0,2\pi[$.

- إذا كان $m=5+2\sqrt{6}$ فإن المعادلة $f(y)=m$ تقبل حلا وحيدا و هو $y_1=2+\sqrt{6}$ لا ينتمي إلى المجال $[-1,1]$ ...

المعادلة $\cos\theta=y_1$ لا تقبل حلولا ؛ إذن المعادلة $f(\cos\theta)=m$ لا تقبل حلولا في المجال $[0,2\pi[$.

- إذا كان $m>5+2\sqrt{6}$ أي $m\in]5+2\sqrt{6},+\infty[$ فإن المعادلة $f(y)=m$ تقبل حلين متمايزين y_1 ، y_2 كل منهما أكبر تماما من 2 و بالتالي لا ينتميان إلى المجال $[-1,1]$ ...

المعادلتان $\cos\theta=y_1$ و $\cos\theta=y_2$ لا تقبلان حلولا ؛ إذن المعادلة $f(\cos\theta)=m$ لا تقبل حلولا في المجال $[0,2\pi[$.

- إذا كانت $-2 < m < 0$ أي $m \in]-2,0[$ فإن المعادلة $f(y) = m$ تقبل حلين متمايزين أحدهما محصور بين 0 و 1 و الآخر أصغر تماما من -1 نرمز لهما على الترتيب بـ y_1 و y_2 ...

المعادلة $\cos\theta = y_1$ تقبل حلين متمايزين في المجال $[0,2\pi[$ أما المعادلة $\cos\theta = y_2$ لا تقبل حلولا لأنّ $y_2 \notin [-1,1]$ ؛ إذن المعادلة $f(\cos\theta) = m$ تقبل حلين متمايزين في المجال $[0,2\pi[$.

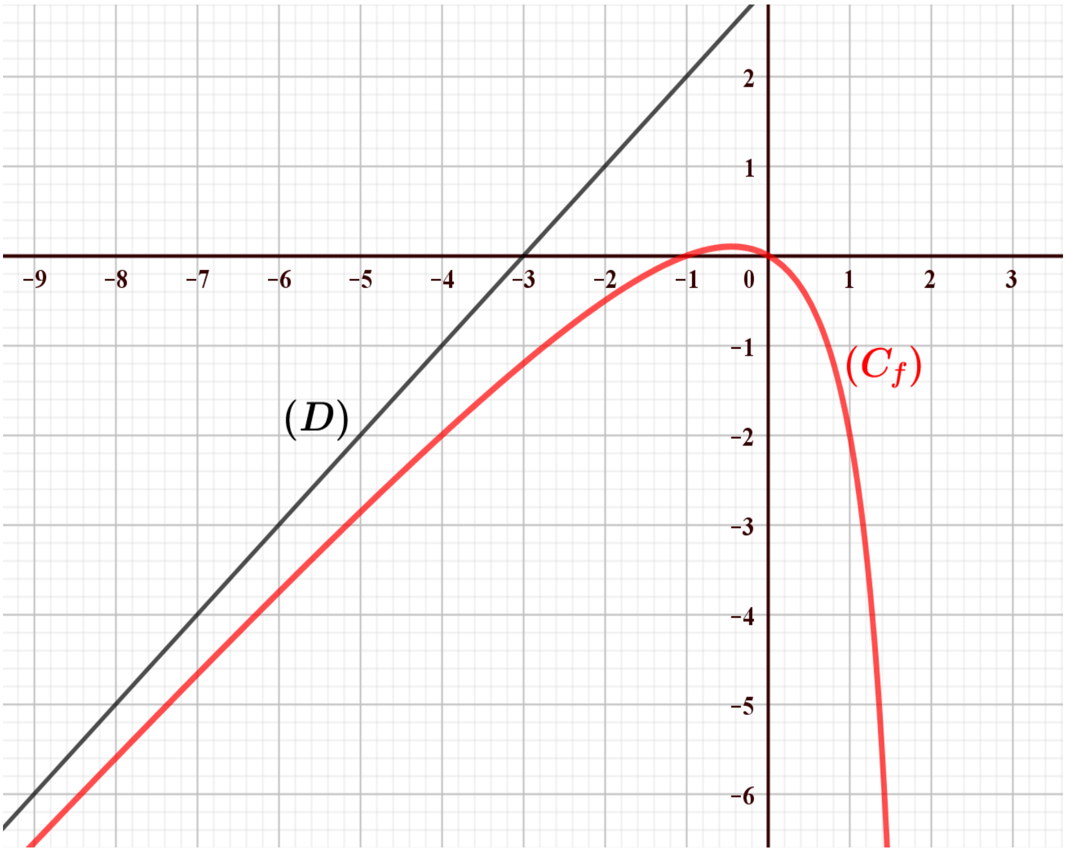
- إذا كانت $m = -2$: المعادلة $f(y) = m$ تقبل حلين متمايزين أحدهما $y_1 = 1$ و الآخر y_2 لا ينتمي إلى المجال $[-1,1]$ ...

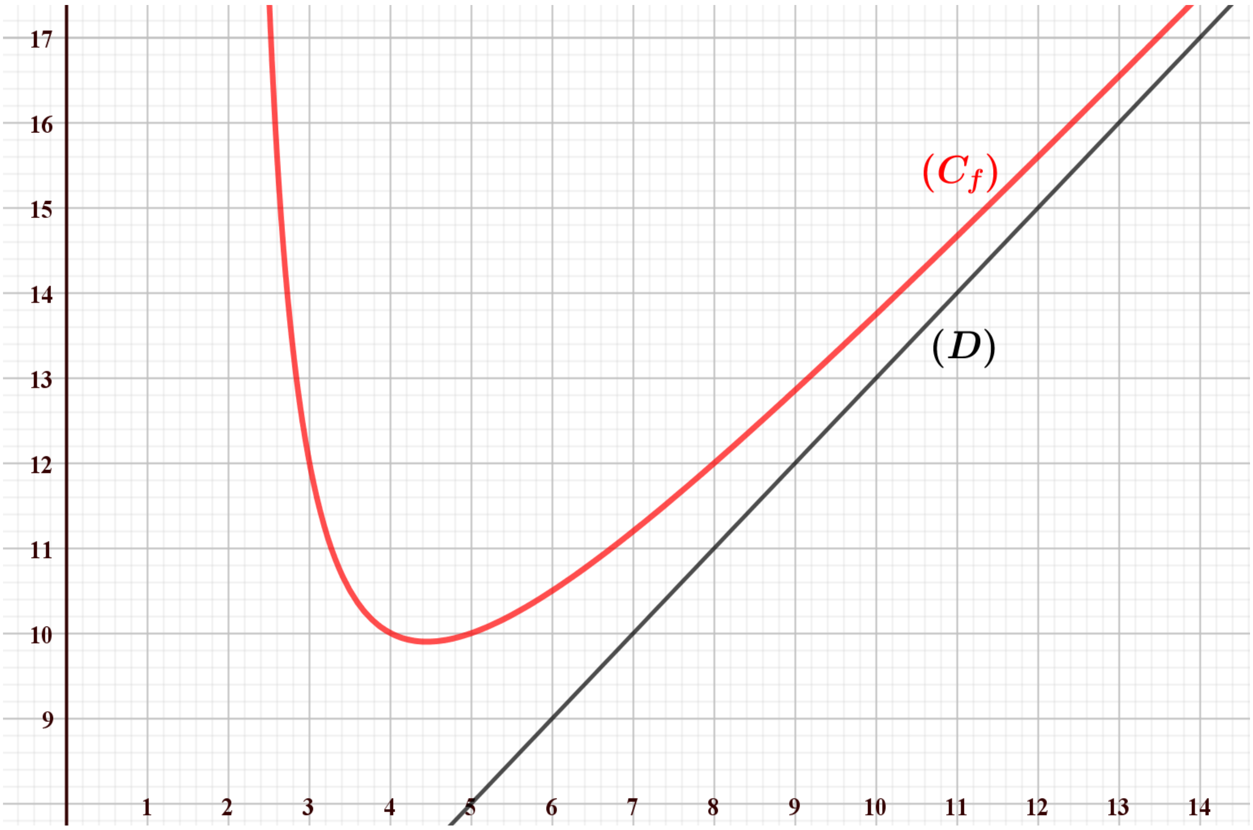
المعادلة $\cos\theta = y_1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0,2\pi[$ و هو $\theta = 0$ أما المعادلة $\cos\theta = y_2$ لا تقبل حلولا لأنّ $y_2 \notin [-1,1]$ ؛ إذن المعادلة $f(\cos\theta) = m$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0,2\pi[$ هو $\theta = 0$.

- إذا كانت $m < -2$ أي $m \in]-\infty,-2[$: المعادلة $f(y) = m$ تقبل حلين متمايزين أحدهما $y_1 > 1$ و الآخر $y_2 < -1$ ...

المعادلتان $\cos\theta = y_1$ و $\cos\theta = y_2$ لا تقبلان حلولا ؛ إذن المعادلة $f(\cos\theta) = m$ لا تقبل حلولا في المجال $[0,2\pi[$.

التمثيل البياني (C_f) غير متناسب مع أبعاد الصفحة ، لذا حتى يظهر كاملا نقوم بعرض جزئه السفلي و جزئه العلوي بشكل منفصل عن بعضهما البعض .





إنتهى حل التمرين ...

دراسة دالة عددية :

الجزء الأول :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة ذات الفاصلة -1 ؟ و كذلك بالنسبة للنقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) أوجد الأعداد الحقيقية α ، β و γ حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma x}{3x^2+1}$

6) بين أن : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0$ ثم فسر النتائج هندسيا .

7) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي $y=x-3$ معادلة له .

8) أرسم (T) ، (Δ) و أنشئ (C_f) .

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\frac{3(\sin x-1)^3}{3\sin^2 x+1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن الدالة g دورية و دورها هو 2π .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x)=\cos x\times f'(\sin x)$

3) أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $[-\pi,\pi]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) ثم أنشئه .

حل مقترح لتمرين دراسة دالة عددية :

الجزء الأول :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تحديد نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

f هي دالة ناطقة و نعلم أن نهاية دالة ناطقة عند $\pm\infty$ تساوي إلى نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \end{cases}$$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

الدالة f هي نسبة دالتين $x\mapsto 3(x-1)^3$ و $x\mapsto 3x^2+1$ تقبلان الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن $3x^2+1\neq 0$ و منه f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$f'(x)=\frac{3\times3(x-1)^2(3x^2+1)-3(x-1)^3(6x)}{(3x^2+1)^2}=\frac{9(x-1)^2(3x^2+1)-18x(x-1)^3}{(3x^2+1)^2}$$ أي

$$f'(x)=\frac{9(x-1)^2\left[(3x^2+1)-2x(x-1)\right]}{(3x^2+1)^2}$$ أي $$f'(x)=\frac{9(x-1)^2(x^2+2x+1)}{(3x^2+1)^2}$$ و منه

$$f'(x)=\frac{9(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}\ .$$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)\geq 0$ حيث $f'(x)=0$ إذا و فقط إذا كان $9(x-1)^2(x+1)^2=0$ أي إذا و فقط إذا كان $x=-1$ أو $x=1$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) **الإستنتاج :** نلاحظ أن الدالة المشتقة الأولى f' تنعدم عند النقطة ذات الفاصلة $x=-1$ و لا تغير من إشارتها و كذلك تنعدم عند النقطة ذات الفاصلة $x=+1$ و لا تغير من إشارتها و بالتالي فإن كل من النقطة ذات الفاصلة $x=-1$ و النقطة ذات الفاصلة $x=+1$ هي **نقطة انعطاف** لمنحني الدالة f .

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ حيث $f'(0)=\dfrac{9(0-1)^2(0+1)^2}{\left(3(0)^2+1\right)^2}=9$ و $f(0)=-3$ و منه

$$\boxed{(T): y=9x-3}$$

5) إيجاد الأعداد الحقيقية α ، β و γ حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma x}{3x^2+1}$

بتوحيد المقامات نجد : $f(x)=\dfrac{(\alpha x+\beta)(3x^2+1)+\gamma x}{3x^2+1}=\dfrac{3\alpha x^3+3\beta x^2+(\alpha+\gamma)x+\beta}{3x^2+1}$

و بالمطابقة مع العبارة : $f(x)=\dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}=\dfrac{3x^3-9x^2+9x-3}{3x^2+1}$ ينتج : $\begin{cases}3\alpha=3\\3\beta=-9\\\alpha+\gamma=9\\\beta=-3\end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-3\\1+\gamma=9\\\beta=-3\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-3\\\gamma=8\end{cases}$ ، إذن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\boxed{f(x)=x-3+\dfrac{8x}{3x^2+1}}$

6) نبين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0$:

من السؤال السابق نجد :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{8x}{3x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{3x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x}{3x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{3x}=0 \end{cases}$$

التفسير الهندسي (البياني) : المستقيم (Δ) الذي $y=x-3$ معادلة له مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$.

7) دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي $y=x-3$ معادلة له :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ أي إشارة المقدار $\dfrac{8x}{3x^2+1}$ حسب قيم x :

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $3x^2+1>0$ و بالتالي إشارة الفرق من إشارة x :

- إذا كان $x=0$ فإن $f(x)-y=\dfrac{8x}{3x^2+1}=0$ و منه فالمنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0 .
- إذا كان $x>0$ فإن $f(x)-y=\dfrac{8x}{3x^2+1}>0$ و منه فالمنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]0,+\infty[$.
- إذا كان $x<0$ فإن $f(x)-y=\dfrac{8x}{3x^2+1}<0$ و منه فالمنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty,0[$.

و من المستحسن أن نلخص النتائج في جدول .

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\dfrac{3(\sin x-1)^3}{3\sin^2 x+1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) إثبات أن الدالة g دورية و دورها هو 2π :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x+2\pi)=\dfrac{3(\sin(x+2\pi)-1)^3}{3\sin^2(x+2\pi)+1}=\dfrac{3(\sin x-1)^3}{3\sin^2 x+1}=g(x)$

لأن الدالة $\sin$ دورية و دورها هو 2π فيكون من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $\sin(x+2\pi)=\sin x$ و كذلك

$\sin^2(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)\times\sin(x+2\pi)=\sin x\times\sin x=\sin^2 x$.

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x)=\cos x\times f'(\sin x)$

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=f(\sin x)$ أي أن الدالة g هي مركب الدالة $x\mapsto\sin x$ متبوعة بالدالة f حيث أن كل من الدالتين $\sin$ و f تقبلان الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و حسب مبرهنة الإشتقاق لدالة مركبة فإنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$g'(x)=\cos x\times f'(\sin x)$ **تذكير :** $\boxed{(v\circ u)'(x)=v'[u(x)]\times u'(x)}$

3) دراسة إتجاه تغير الدالة g على المجال $[-\pi,\pi]$ ثم تشكيل جدول تغيراتها :

بوضع $g'(x)=0$ نجد : $\cos x\times f'(\sin x)=0$ يكافئ $\cos x=0$ أو $f'(\sin x)=0$

$\cos x=0$ يكافئ $x=\frac{\pi}{2}$ أو $x=-\frac{\pi}{2}$ على المجال $[-\pi,\pi]$.

$f'(\sin x)=0$ و حسب جدول إشارة f' فإن $\sin x=-1$ أي $x=\frac{\pi}{2}$ أو $\sin x=1$ أي $x=-\frac{\pi}{2}$

و منه نستنتج أن $g'(x)=0$ إذا و فقط إذا كان $x=-\frac{\pi}{2}$ أو $x=\frac{\pi}{2}$

- إذا كان $x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ فإن $\cos x\leq 0$ و $-1\leq\sin x\leq 1$ و نعلم أن f' موجبة على المجال $[-1,1]$ و منه $f'(\sin x)\geq 0$ و بالتالي $g'(x)\leq 0$ ، إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ و كذلك على المجال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

- إذا كان $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos x\geq 0$ و $-1\leq\sin x\leq 1$ و نعلم أن f' موجبة على المجال $[-1,1]$ و منه $f'(\sin x)\geq 0$ و بالتالي $g'(x)\geq 0$ ، إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

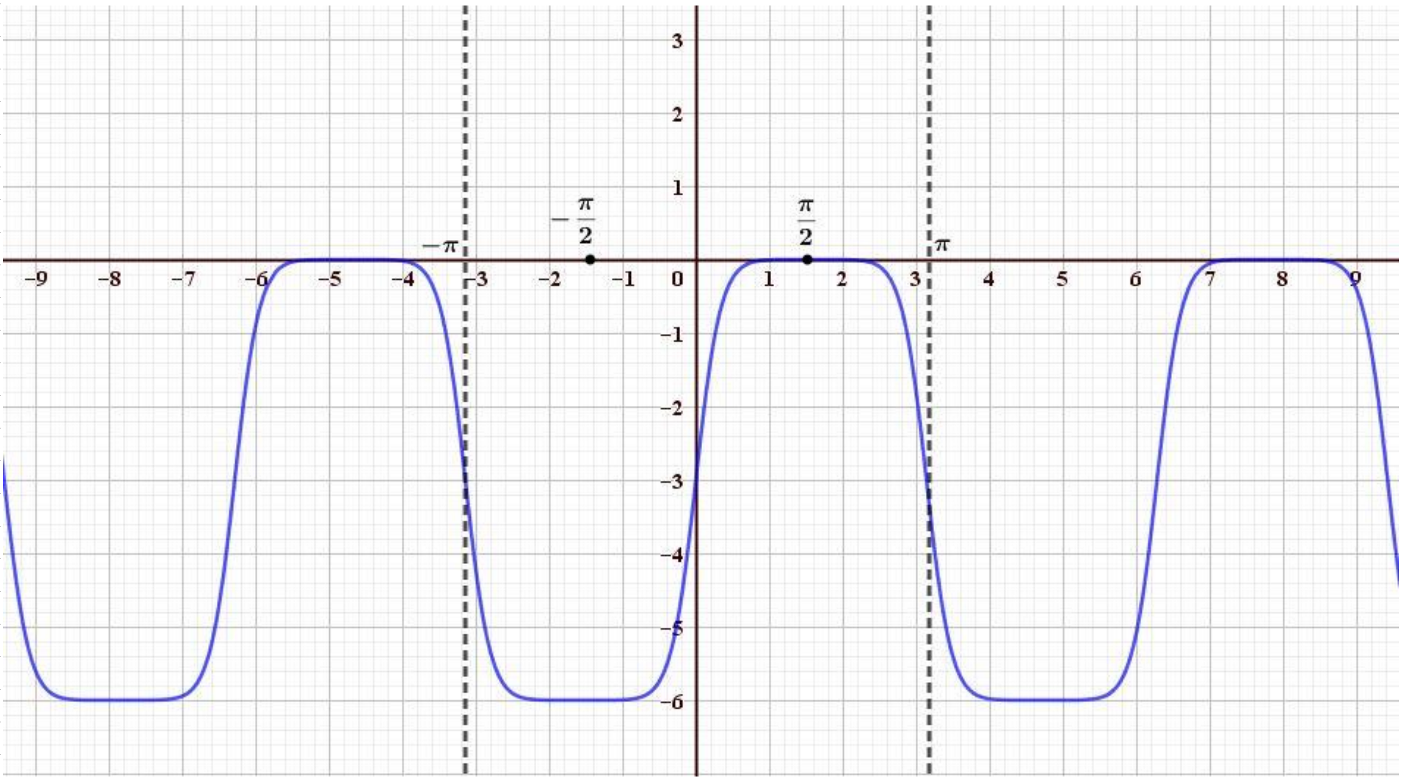
جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-\pi,\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	-3	↘	-6	↗	0	↘	-3

4) شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) :

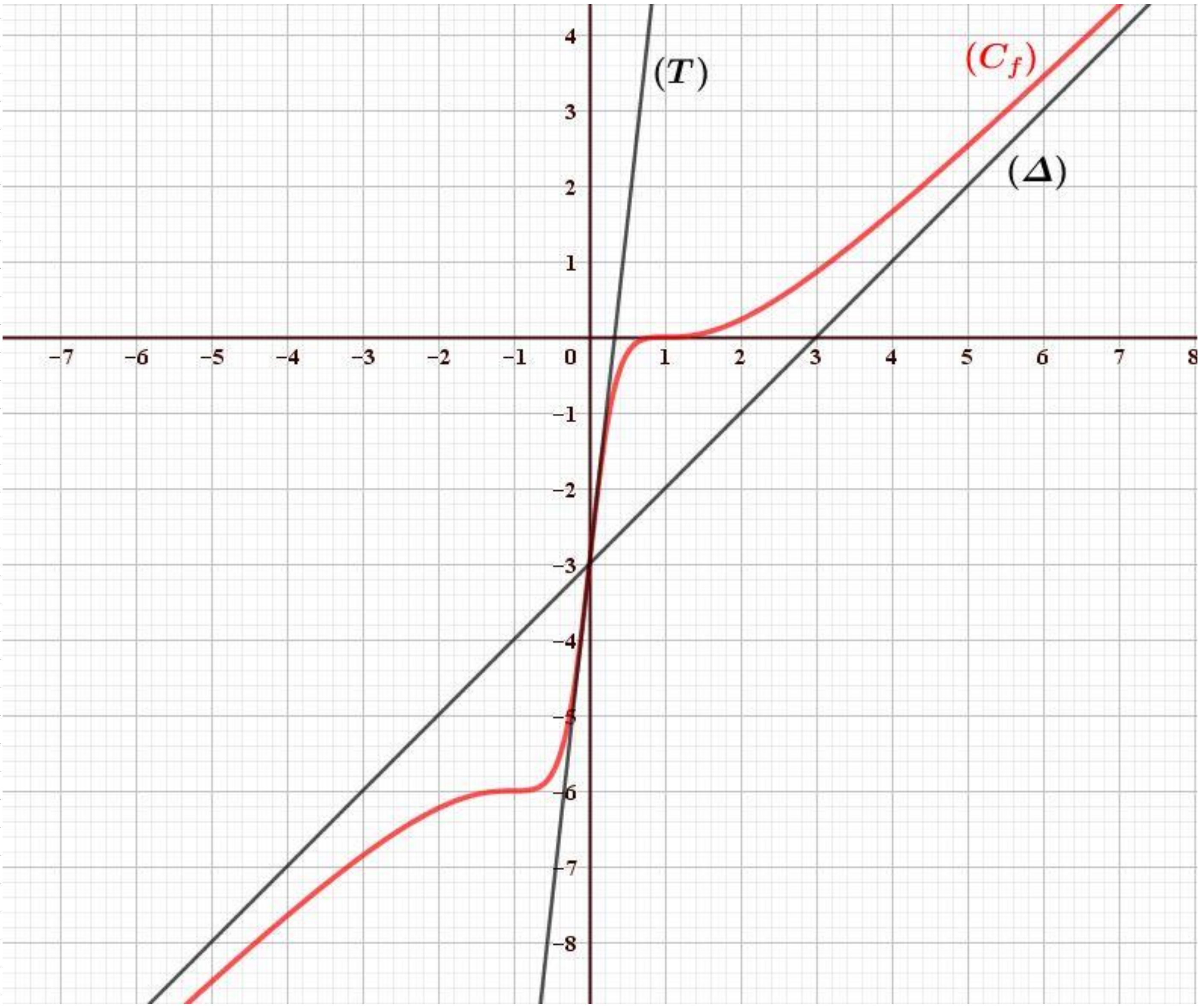
إنطلاقا من جدول تغيرات الدالة g ننشئ المنحني (C_g) على المجال $[-\pi,\pi]$ علما أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى هي -6 من أجل $x=-\frac{\pi}{2}$ و تقبل قيمة حدية عظمى هي 0 من أجل $x=\frac{\pi}{2}$.

و علما أن الدالة g دورية و دورها 2π فإنه يمكن إكمال إنشاء المنحني (C_g) على $\mathbb{R}$ إنطلاقا من إجراء إنسحابات متتالية أشعتها $2k\pi\vec{i}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.



ملاحظة : الدالة g ليست ثابتة على بعض المجالات في التمثيل البياني أعلاه ، إنما يبدو ذلك فقط بالعين المجردة لتقارب الصور بعضها من بعض في تلك المجالات .

التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم :



إنتهى حل التمرين ...