الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : رياضيات ، تقني

الملخص الشامل في الأعداد والحساب

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف : ليكن a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $\boldsymbol{b = ka}$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول b مضاعف للعدد a .

أمثلة :

- 4 يقسم 48 لأن $4 \times 12 = 48$ ، ونكتب $4|48$ و أيضا $12|48$.
- -5 يقسم 2025 لأن $(-5) \times (-405) = 2025$ ، ونكتب $-5|2025$ و أيضا $-405|2025$.

خواص :

❶ a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة. إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

- 3 يقسم 6 و 6 يقسم 18 ، إذن 3 يقسم 18 .

❷ a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb .

- 2 يقسم 6 و عليه 2 يقسم 5×6 ، 3 يقسم 9 وعليه 3 يقسم $(-4) \times 9$.

❸ a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb .

- 4 يقسم 8 و عليه 5×4 يقسم 5×8 .

❹ a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n ، a يقسم $mb + nc$.

- 7 يقسم 14 و 21 ومنه 7 يقسم $8 \times 21 + 3 \times 14$.

تمرين تطبيقي : n عدد طبيعي غير معدوم ، عين قيم n في كل حالة من الحالات التالية :

❶ 6 يقسم $(3n - 6)$.

❷ $(3n + 5)$ قاسم للعدد 8 .

❸ $(2n + 27)$ مضاعف لـ $(n + 1)$

❹ $\frac{10n-4}{3n+1} \in \mathbb{N}$.

❺ $\frac{3n^2+6n+4}{n+4} \in \mathbb{N}$.

حل التمرين التطبيقي :

❶ 6 يقسم $3n-6$ معناه يوجد عدد طبيعي k حيث : $3n-6=6k$ ، ومنه : $n=2k+2$.

❷ $3n+5$ قاسم للعدد 8 معناه $3n+5\in\{1;2;4;8\}$ ، ومنه $3n\in\{-4;-3;-1;3\}$.

بالقسمة على 3 مع مراعاة أن n عدد طبيعي نستنتج أن : $n=1$.

❸ $2n+27$ مضاعف لـ $n+1$ ومنه :

$\begin{cases}n+1|2n+27\\ n+1|n+1\end{cases}$ ، و بالتالي : $\begin{cases}n+1|2n+27\\ n+1|-2(n+1)\end{cases}$ ، أي : $n+1|2n+27-2(n+1)$.

أي أن : $n+1|25$ ، ومنه $n+1\in\{1;5;25\}$ ، ومنه $n\in\{4;24\}$.

❹ $\frac{10n-4}{3n+1}\in\mathbb{N}$ معناه $3n+1|10n-4$ ، وبالتالي : $\begin{cases}3n+1|10n-4\\ 3n+1|3n+1\end{cases}$ ، ومنه :

$\begin{cases}3n+1|-3(10n-4)\\ 3n+1|10(3n+1)\end{cases}$ ، ومنه $3n+1|10(3n+1)-3(10n-4)$ ، ومنه $3n+1|22$ ،

ومنه $3n+1\in\{1;2;11;22\}$ ، ومنه $n=7$.

❺ $\frac{3n^2+6n+4}{n+4}\in\mathbb{N}$ معناه $n+4|3n^2+6n+4$.

بملاحظة أن : $3n^2+6n+4=(3n-6)(n+4)+28$.

لدينا : $\begin{cases}n+4|3n^2+6n+4\\ n+4|n+4\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}n+4|3n^2+6n+4\\ n+4|(n+4)(3n-6)\end{cases}$ ، ومنه :

$n+4|3n^2+6n+4-(n+4)(3n-6)$ ، ومنه $n+4|28$

ومنه : $(n+4)\in\{1;2;4;7;14;28\}$ ، ومنه $n\in\{3;10;24\}$.

ملاحظات :

✍ في $\mathbb{Z}$ العددين a و $-a$ لهما نفس القواسم . ✍ مجموعة قواسم العدد 0 هي $\mathbb{N}^*$.

تمرين تطبيقي :

a و b و n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a=7n-4$ و $b=9n+3$.

بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 56 .

حل التمرين التطبيقي :

ليكن d هو قاسما مشترك للعددين a و b ، لدينا :

$\begin{cases}d|7n-4\\ d|9n+3\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}d|(7n-4)(-9)\\ d|(9n+3)(7)\end{cases}$ ، ومنه $d|(7n-4)(-9)+7(9n+3)$ ، أي $d|56$.

تمرين تطبيقي : ليكن a و b عددين صحيحين .

برهن أنه إذا كان 2 يقسم a^2+b^2 فإن 2 يقسم $(a+b)^2$.

حل التمرين التطبيقي : نعلم أن : $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

لدينا من جهة $2|a^2+b^2 \ldots\ldots(1)$ ، ومن جهة أخرى $2|2ab \ldots.(2)$.

بجمع (1) مع (2) نجد $2|a^2+b^2+2ab$ ، أي أن $2|(a+b)^2$.

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة : ليكن a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم. توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث : $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على b . يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

مثال : a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 8 .

✍ لنعين باقي قسمته على 5 وعلى 2 .

لدينا $a = 10k + 8$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه $a = 5(2k+1) + 3$ ، ومنه باقي قسمة a على 5 هي 3 .

لدينا $a = 10k + 8$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه $a = 2(5k+4)$ ، ومنه باقي قسمة a على 2 هي 0 .

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعين PGCD :

a و b عددان طبيعيان غير معدومان ، D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .

$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ونرمز له بـ $PGCD(a,b)$

ملاحظات :

✍ $PGCD(a,a) = a$ ، ✍ $PGCD(1,a) = 1$ ، ✍ $PGCD(0,a) = a$ و a غير معدوم .

تمرين تطبيقي :

n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n-1$ و n^2+n+3 .

① بين أن a يقسم n^2-2n+1 . ، ② استنتج أن a يقسم $3n+2$.

③ بين إذن أن a يقسم 5 . ، ④ ماهي القيم الصحيحة الممكنة للعدد a .

حل التمرين التطبيقي :

① تبيين أن a يقسم n^2-2n+1 : نعلم أن $(n-1)^2 = n^2-2n+1$

لدينا $\begin{cases} a|n-1 \\ n-1|(n-1)^2 \end{cases}$ ومنه بالتعدي نجد $a|(n-1)^2$ ، ومنه $a|n^2-2n+1$.

② استنتاج أن a يقسم $3n+2$.

لدينا $\begin{cases} a|n^2+n+3 \\ a|n^2-2n+1 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} a|(n^2+n+3)(1) \\ a|(n^2-2n+1)(-1) \end{cases}$ ، ومنه $a|n^2+n+3-n^2+2n-1$

ومنه $a|3n+2$ ، و هو المطلوب .

③ تبيين إذن أن a يقسم 5 : لدينا $\begin{cases} a|n-1 \\ a|3n+2 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} a|(n-1)(-3) \\ a|(3n+2)(1) \end{cases}$.

ومنه $a|-3n+3+3n+2$ ، منه $a|5$.

④ القيم الصحيحة الممكنة للعدد a : هي القواسم الصحيحة للعدد 5 أي أن :

$$a \in \{-5;-1;1;5\}$$

خواص :

❶ a و b عددان طبيعيان غير معدومان حيث $b \geq a$ ، r باقي قسمة a على b .

✍ $PGCD(a,b) = PGCD(b,r)$

❷ القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات المتتابعة لخوارزمية إقليدس.

❸ a و b عددان طبيعيان غير معدومان ، k عدد طبيعي غير معدوم ، لدينا :

✍ $PGCD(ka,kb) = kPGCD(a,b)$.

❹ إذا كان $PGCD(a,b) = d$ ، فإن $d|a$ و $d|b$ أيضا : $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$.

تمرين تطبيقي :

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} a+b = 66 \\ PGCD(a,b) = 6 \end{cases}$.

حل التمرين التطبيقي :

لدينا : $d = 6$ ، ومنه $\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $6a'+6b' = 66$ ، ومنه $a'+b' = 11$

a'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b'	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
a	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
b	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6

ومنه الثنائيات (a,b) هي :

$$(a,b) = \{(6,60),(12,54),(18,48),(24,42),(30,36),(36,30),(42,24),(48,18),(54,12),(60,6)\}$$

تمرين تطبيقي :

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث : $\begin{cases} a \times b = 900 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$

حل التمرين التطبيقي :

لدينا $d = 6$ ، ومنه $\begin{cases} a = 5a' \\ b = 5b' \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $5a' \times 5b' = 900$ ، ومنه $a' \times b' = 36$

a'	1	2	3	4	6	9	12	18	36
b'	36	18	12	9	6	4	3	2	1
a	5			20		45			180
b	180			45		20			5

ومنه الثنائيات (a,b) هي :

$$(a,b) = \{(5,180),(20,45),(45,20),(180,5)\}$$

الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف : n عدد طبيعي غير معدوم.

القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n ، ونرمز $a \equiv b[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n .

أمثلة :

$83 \equiv 43[5]$ ، $58 \equiv 25[11]$ ، $-59 \equiv -3[8]$ ، $-91 \equiv 9[10]$

ملاحظة : من أجل كل عدد صحيح x ، $x \equiv 0[1]$.

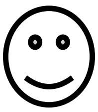
مبرهنة : n عدد طبيعي غير معدوم ، a و b عددان صحيحان.

a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـ n .

مثال : $28 \equiv 13[5]$ لأن $28-13=15$ و 15 مضاعف لـ 5 .

خواص :

1. n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$. كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بترديد n
2. n عدد طبيعي غير معدوم . من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a \equiv a[n]$.
3. n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$.
4. n عدد طبيعي غير معدوم . a ، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$
5. n عدد طبيعي غير معدوم . a ، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن $a+c \equiv b+d[n]$
6. n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن $ac \equiv bd[n]$
7. n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان ، من أجل كل عدد صحيح k ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ka \equiv kb[n]$.
8. n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان ، من أجل كل عدد صحيح k إذا كان $ka \equiv kb[n]$ و $PGCD(k,n)=1$ فإن $a \equiv b[n]$.
9. n و p عددان طبيعيين غير معدومين. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$



تمرين : a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$.

1. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a+b$ على 7 .
2. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2+3b^2 على 7 .
3. أ / تحقق أن $b \equiv -1[7]$.

ب / استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2025} و b^{1446} على 7 .

4 عين الأعداد الطبيعية n بحيث : $(a+b)^n + n \equiv 0[7]$.

حل التمرين :

1 تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a+b$ على 7 .

لدينا $a \equiv 2[7]$ ومنه $3a \equiv 6[7]$ ، ولدينا $b \equiv 6[7]$ ، ومنه نستنتج أن $3a+b \equiv 12[7]$.

أي أن $3a+b \equiv 5[7]$ ، ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a+b$ على 7 هو 5 .

2 تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2+3b^2 على 7 .

لدينا $a \equiv 2[7]$ ومنه $a^2 \equiv 4[7]$ .... (1).

ولدينا $b \equiv 6[7]$ ، ومنه $b^2 \equiv 36[7]$ ، ومنه $b^2 \equiv 1[7]$ ، ومنه $3b^2 \equiv 3[7]$ ...... (2).

بجمع (1) مع (2) نجد $a^2+3b^2 \equiv 7[7]$ ، ومنه $a^2+3b^2 \equiv 0[7]$.

ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2+3b^2 على 7 هو 0 أي أن العدد a^2+3b^2 مضاعف للعدد 7 .

3 أ / التحقق أن $b \equiv -1[7]$.

لدينا من جهة $b \equiv 6[7]$ ، ومن جهة أخرى $6 \equiv -1[7]$ ، ومنه بالتعدي $b \equiv -1[7]$.

ب / استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2025} و b^{1446} على 7 .

لدينا $b \equiv -1[7]$ ، ومنه $b^{2025} \equiv (-1)^{2025}[7]$ ، ومنه $b^{2025} \equiv -1[7]$ ، أي $\boldsymbol{b^{2025} \equiv 6[7]}$.

لدينا $b \equiv -1[7]$ ، ومنه $b^{1446} \equiv (-1)^{1446}[7]$ ، ومنه $\boldsymbol{b^{1446} \equiv 1[7]}$.

4 تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث : $(a+b)^n + n \equiv 0[7]$.

لدينا $a+b \equiv 8[7]$ ، ومنه $a+b \equiv 1[7]$ ، ومنه $(a+b)^n \equiv 1[7]$ ، ومنه بالتعويض نجد :

$1+n \equiv 0[7]$ ، ومنه $n \equiv -1[7]$ ، ومنه $n \equiv 6[7]$ ، ومنه $n = 7k+6$ ، حيث $k \in \mathbb{N}$.

تمرين :

1 جد باقي قسمة العدد 4^5 على 11 .

2 استنتج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد : 37^{5k} ، 37^{5k+1} ، 37^{5k+2} ، 37^{5k+3} ، 37^{5k+4} .
مع $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين :

1 إيجاد باقي قسمة العدد 4^5 على 11 .

لدينا $4^5 = 1024$ ، وكما نعلم أن $1024 = 11 \times 93 + 1$ ، ومنه $4^5 \equiv 1[11]$.

ومنه باقي قسمة العدد 4^5 على 11 هو 1 .

2 استنتاج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد :

لدينا $37 \equiv 4[11]$ ، ومنه $37^5 \equiv 4^5[11]$ ، ومنه $37^5 \equiv 1[11]$ ، ومنه $37^{5k} \equiv 1[11]$

ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k} على 11 هو 1 .

✍ لدينا : $\begin{cases}37^{5k} \equiv 1[11] \\ 37 \equiv 4[11]\end{cases}$ ، ومنه $37^{5k+1} \equiv 4[11]$ ، ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k+1} على 11 هو 4 .

✍ لدينا : $\begin{cases}37^{5k+1} \equiv 4[11] \\ 37 \equiv 4[11]\end{cases}$ ، ومنه $37^{5k+2} \equiv 16[11]$ ، ومنه $37^{5k+2} \equiv 5[11]$.

ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k+2} على 11 هو 5 .

✍ لدينا : $\begin{cases}37^{5k+2} \equiv 5[11] \\ 37 \equiv 4[11]\end{cases}$ ، ومنه $37^{5k+3} \equiv 20[11]$ ، ومنه $37^{5k+3} \equiv 9[11]$.

ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k+3} على 11 هو 9 .

✍ لدينا : $\begin{cases}37^{5k+3} \equiv 9[11] \\ 37 \equiv 4[11]\end{cases}$ ، ومنه $37^{5k+4} \equiv 36[11]$ ، ومنه $37^{5k+4} \equiv 3[11]$.

ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k+4} على 11 هو 3 .

تمرين :

❶ عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

❷ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{1446} على 5 .

حل التمرين :

❶ تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

$n = 0$ ، إذن $3^0 \equiv 1[5]$

$n = 1$ ، إذن $3^1 \equiv 3[5]$

$n = 2$ ، إذن $3^2 \equiv 4[5]$ ، ومنه بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 تشكل متتالية دورية

$n = 3$ ، إذن $3^3 \equiv 2[5]$ دورها 4 أي دور القسمة هو من الشكل $4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

$n = 4$ ، إذن $3^4 \equiv 1[5]$

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$n \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]

❷ استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{1446} على 5 .

لدينا : $1446 = 4 \times 361 + 2$ ، هي من الشكل $4k + 2$ ، ومنه من الجدول نستنتج أن $3^{1446} \equiv 4[5]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{1446} على 5 هو 4 .

التعداد

خاصية : ليكن x عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

و لتكن a_n ، a_{n-1} ، ... ، a_2 ، a_1 ، a_0 أعداد طبيعية أصغر تماما من x .

القول أن عدد N يكتب $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ في النظام ذي الأساس x يعني :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + \dots + a_2 \times x^2 + a_1 \times x^1 + a_0$$

ملاحظات :

- يمثل كل عدد طبيعي أصغر تماما من x برمز وحيد يسمى رقما .
- في كل نظام تعداد ذي الأساس x ، الرقمان 0 و 1 يمثلان على الترتيب العددين << صفر>> و << واحد >>
- مهما يكن الأساس x لدينا $x = 1 \times x + 0$ ، وعليه فإن العدد x يكتب في النظام ذي الأساس x هكذا $\overline{10}$
- عندما يكون الأساس << عشرة >> يكتب العدد N كمايلي : $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ عوضا عن $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$.
- النظام العشري : هو النظام المستعمل لدى البشر أساسه 10 وأرقامه 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 .
- النظام الثنائي : هو النظام المستعمل لدى الألات أساسه 2 وأرقامه 0 ، 1 .

تطبيق :

1. a عدد طبيعي يكتب $\overline{512}^8$ في النظام ذو الأساس 8 ، أكتب a في النظام العشري .
2. b عدد طبيعي يكتب $\overline{3104}^5$ في النظام ذو الأساس 5 ، أكتب b في النظام العشري .

حل التطبيق :

1. لدينا : $a = \overline{512}^8 = 5 \times 8^2 + 1 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 330$ ، ومنه a يكتب 330 في النظام العشري .
2. لدينا $b = \overline{3104}^5 = 3 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 4 \times 5^0 = 404$ ، ومنه b يكتب 404 في النظام العشري .

الإنتقال من الأساس x إلى الأساس y

N عدد طبيعي مكتوب في نظام أساسه x ، لكتابته في نظام أساسه y .

1- نحول N من النظام الذي أساسه x إلى النظام العشري .

2- نحول N من النظام العشري إلى النظام الذي أساسه y .

تطبيق : أكتب العدد 2007 في نظام التعداد ذي الأساس 8 .

2007 | 8
7 | 250 | 8
2 | 31 | 8
7 | 3 | 8
3 | 0

ومنه $2007 = \overline{3727}^8$

تطبيق : a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}^8$ في النظام ذو الأساس 8 .

❶ أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين :

أ/ بالمرور بالنظام العشري .

ب/ مباشرة .

❷ أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة

حل التطبيق :

❶ أ/ بالمرور بالنظام العشري .

$$a = \overline{643}^8 = 6 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 419$$

لكتابة 419 في النظام ذي الأساس 2 :

✍ نقوم بعملية القسمة الإقليدية التكرارية حتى يصبح حاصل القسمة معدوم.

✍ نقوم بترتيب بواقي القسمة الناتجة من آخر باقي تحصلنا عليه إلى أول باقي .

فينتج في الأخير $a = 419 = \overline{110100011}^2$

$$\begin{array}{cccccccccc}
419 & 2 & & & & & & & & \\
1 & 209 & 2 & & & & & & & \\
 & 1 & 104 & 2 & & & & & & \\
 & & 0 & 52 & 2 & & & & & \\
 & & & 0 & 26 & 2 & & & & \\
 & & & & 0 & 13 & 2 & & & \\
 & & & & & 1 & 6 & 2 & & \\
 & & & & & & 0 & 3 & 2 & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & 2\\
 & & & & & & & & 1 & 0
\end{array}$$

ب/ مباشرة . لدينا :

$$\begin{aligned}
a = \overline{643}^8 &= 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 \\
&= 3 \times 2 \times (2^3)^2 + 2^2 \times 2^3 + 2 + 1 \\
&= 3 \times 2 \times 2^6 + 2^5 + 2 + 1 \\
&= 3 \times 2^7 + 2^5 + 2 + 1 \\
&= (1 + 2) \times 2^7 + 2^5 + 2 + 1 \\
&= 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2 + 1
\end{aligned}$$

ومنه : $a = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$

ومنه a يكتب $a = \overline{110100011}^2$ في النظام ذي الأساس 2 .

❷ كتابة a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

$$\begin{aligned}
a = \overline{643}^8 &= 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 \\
&= 6 \times (2 \times 4)^2 + 4 \times 4 \times 2 + 3 \\
&= 6 \times 2^2 \times 4^2 + 4 \times 4 \times 2 + 3 \\
&= 6 \times 4^3 + 4^2 \times 2 + 3 \\
&= (2 + 4) \times 4^3 + 4^2 \times 2 + 3
\end{aligned}$$

$$= 4^4 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 3$$

ومنه : $a = 1 \times 4^4 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 0 \times 4 + 3$

إذن a يكتب $a = \overline{12203}^4$ في النظام ذي الأساس 4 .

تطبيق : العددان $\overline{6043}^x$ و $\overline{135}^x$ مكتوبان في النظام ذو الأساس x .

❶ ماهي أصغر قيمة ممكنة للعدد x .

❷ أنشر العددين وفق الأساس x .

حل التطبيق :

❶ أصغر قيمة ممكنة للعدد x .

نلاحظ أن أكبر رقم في العددين هو 6 ، هذا يعني أن $x > 6$ ، ومنه أصغر قيمة لـ x هي 7 .

❷ نشر العددين وفق الأساس x .

$$\overline{6043}^x = 6x^3 + 4x + 3$$
$$\overline{135}^x = x^2 + 3x + 5$$

تطبيق : n عدد طبيعي يكتب في النظام الثنائي $\overline{1101101}^2$.

ماهو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كمايلي $\overline{214}$ ؟

حل التطبيق :

لدينا من جهة : $\overline{1101101}^2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 = 109$

ومن جهة أخرى $\overline{214}^x$ حيث $x > 4$ ، ومنه : $\overline{214}^x = 2x^2 + x + 4$

ومنه : $2x^2 + x + 4 = 109$ ، ومنه $2x^2 + x - 105 = 0$

لدينا $\Delta = 841 > 0$ ، ومنه للمعادلة حلان متمايزان هما : $x_2 = 7 \; ; \; x_1 = \frac{15}{2}$

بما أن $\frac{15}{2} \notin \mathbb{N}$ فإن أساس التعداد الذي يكتب فيه n كمايلي $\overline{214}$ هو 7 وعليه $\overline{1101101}^2 = \overline{214}^7$

الأعداد الأولية

تعريف : القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه .

ملاحظات :

- العدد 0 غير أولي لأنه يقبل عدد غير منته من القواسم.
- العدد 1 غير أولي لأنه يقبل قاسما واحدا فقط هو 1 .
- العدد 2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي (أصغر عدد أولي).
- 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 هي الأعداد الأولية الأصغر من 30 .

خواص :

1. كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .
2. كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث : $a \leq \sqrt{n}$.
3. مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية .

طريقة : لمعرفة ما إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 أوليا أم لا ، نقوم بحساب $\sqrt{n}$.

1- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .

2- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب

- إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف ونقر أن n غير أولي .
- إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقر أن n أولي .

تطبيق : في كل حالة أذكر إن كان العدد أوليا أم لا : 961 ، 149 ، 341

حل التطبيق :

- لدينا : $\sqrt{961} = 31$ ومنه 961 مربع تام وبالتالي 961 غير أولي .
- لدينا : $\sqrt{149} \simeq 12{,}2$ ومنه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{149}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 .
  وبما أن العدد 149 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ومنه 149 عدد أولي .
- لدينا : $\sqrt{341} \simeq 18{,}46$ ومنه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{341}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 .
  لكن $31 \times 11 = 341$ أي أن 341 يقبل القسمة على 11 ، وبالتالي 341 غير أولي .

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعين PPCM :

a و b عددان طبيعيان غير معدومان ، M_a مجموعة مضاعفات a و M_b مجموعة مضاعفات b .
$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b . يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ بالمضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ونرمز له بـ $PPCM(a,b)$

أمثلة :

❖ مجموعة مضاعفات 3 هي : $M_3 = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; \dots.\}$.

❖ مجموعة مضاعفات 6 هي : $M_6 = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; \dots..\}$.

إذن $M_3 \cap M_6 = \{0; 6; 12; 18; 24; \dots\}$ ، وبالتالي : $PPCM(3,6) = 6$.

خواص :

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و k عدد صحيح غير معدوم ، لدينا :

❶ ✍ $PPCM(a,a) = a$ ، ✍ $PPCM(1,a) = a$ ، ✍ $PPCM(0,a) = 0$.

❷ إذا كان b يقسم a فإن $PPCM(a,b) = a$.

❸ $PPCM(ka,kb) = k \times PPCM(a,b)$.

❹ إذا كان a يقسم c و b يقسم c فإن : $PPCM(a,b)$ يقسم c .

نتيجة مهمة : تحديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين

a وb عددان صحيحين غير معدومين .

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a وb هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث : $m = PPCM(|a|,|b|)$

حساب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر والعلاقة بينهما :

❖ لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 .

نقوم بتحليل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية ثم نأخذ العوامل المشتركة مرة واحدة وبأصغر أس ونحسب جداءها .

❖ لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 .

نقوم بتحليل العددينa و b إلى جداء عوامل أولية ثم نأخذ العوامل المشتركة وغير المشتركة مرة واحدة وبأكبر أس ونحسب جداءها .

❖ a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1 ، إذن : $PPCM(a,b) \times PGCD(a,b) = a \times b$.

تطبيق : أوجد القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين : 825 و 7865 .

حل التطبيق :

لدينا : $825 = 3 \times 5^2 \times 11$ ، و $7865 = 5 \times 11^2 \times 13$.

ومنه : $PGCD(7865,825) = 5 \times 11 = 55$.

و : $PPCM(7865,825) = 3 \times 5^2 \times 11^2 \times 13 = 117975$.

تطبيق : عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية حلول الجملة : $\begin{cases} a \times b = 18000 \\ PPCM(a,b) = 600 \end{cases}$

حل التطبيق :

لدينا : $\begin{cases} PGCD(a,b) = d \\ PPCM(a,b) = m \end{cases}$ ، و نعلم أن : $m \times d = a \times b$ ، أي أن $d = \frac{a \times b}{m}$ ، أي $d = \frac{18000}{600} = 30$

ومنه : $PGCD(a,b) = 30$.

نضع : $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$ ، ومنه ، $a \times b = 18000$ ، أي أن $da' \times db' = 18000$.

أي أن : $900 \times a' \times b' = 18000$ ، ومنه $a' \times b' = 20$

a'	1	2	4	5	10	20
b'	20	10	5	4	2	1
a	30		120	150		600
b	600		150	120		30

ومنه الثنائيات (a,b) هي : $(a,b) = \{(30;600),(120,150),(150,120),(600,300)\}$

مبرهنة بيـزو

مبرهنة : يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v بحيث : $au + bv = 1$.

مثال : من أجل $a = 9$ و $b = 4$ ، $PGCD(9,4) = 1$ لدينا :

$$9 \times 1 + 4 \times (-2) = 1 \quad ، \quad 9 \times (-3) + 4 \times 7 = 1$$

نلاحظ أن الثنائية (u,v) ليست وحيدة .

خواص :

❶ إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث : $au + bv = d$.

❷ إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

❸ إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.

❹ إذا كان $PGCD(a,b) = 1$ فإن $PGCD(a,b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

❺ إذا كان $PGCD(a,b) = 1$ فإن $PGCD(a^n,b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

تمرين : ليكن n عددا صحيحا .

❶ أثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .

❷ أثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .

❸ استنتج أن $n+1$ و $6n^2+17n+12$ أوليان فيما بينهما .

حل التمرين :

❶ اثبات أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .

$$-2(n+1) + 1(2n+3) = 1$$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما لأنه يوجد ثنائية $(u,v) = (-2,1)$.

② اثبات أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .

$$-3(n+1)+1(3n+4)=1$$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما لأنه يوجد ثنائية $(u,v)=(-3,1)$.

③ استنتاج أن $n+1$ و $6n^2+17n+12$ أوليان فيما بينهما .

لدينا : $(2n+3)(3n+4)=6n^2+17n+12$.

تذكير : إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$.

بما أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما . و $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .

فإن $n+1$ أولي مع جدائهما ، أي أن $n+1$ أولي مع $6n^2+17n+12$.

مبرهنة غوص

مبرهنة : a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أولي مع b فإن a يقسم مع c .

خواص :

① a ، b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .

إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b .

② a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

إذا كان a مضاعف لـ b و c وكان b و c أوليان فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc .

تطبيق :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ..... $11x-5y=14$ ذات المجهولين الصحيحين x و y .

① تحقق أن الثنائية $(19;39)$ حلا للمعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلولها .

② بين انه توجد ثنائية وحيدة $(x_0;y_0)$ حلا للمعادلة (E) مع $0<x_0<5$.

حل التطبيق :

① التحقق أن الثنائية $(19;39)$ حلا للمعادلة (E) .

لدينا : $11(19)-5(39)=209-195=14$ ، ومنه الثنائية $(19;39)$ حلا للمعادلة (E) .

❖ استنتاج مجموعة حلولها .

لدينا : $\begin{cases} 11x-5y=14 \\ 11(19)-5(39)=14 \end{cases}$ بالطرح نجد $11(x-19)-5(y-39)=0$.

ومنه $11(x-19)=5(y-39)$.

لدينا : $\begin{cases} 11|5(y-39) \\ PGCD(11;5)=1 \end{cases}$ ، ومنه حسب مبرهن غوص فإن $11|y-39$ ، ومنه $y=11k+39$.

لدينا : $\begin{cases} 5|11(x-19) \\ PGCD(11;5)=1 \end{cases}$ ، ومنه حسب مبرهن غوص فإن $5|x-19$ ، ومنه $x=5k+19$.

إذن مجموعة حلول (E) هي : $\{(5k+19;11k+39)\}$ مع $k\in\mathbb{Z}$

تمارين محلولة من الكتاب المدرسي :

تمارين حول قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

تمرين 9 : عين كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها 13 قاسما للعدد $n+4$ و $|n|<22$.

حل التمرين 9 :

13 قاسما للعدد $n+4$ ، معناه يوجد عدد صحيح k بحيث : $n+4=13k$ ، أي أن : $n=13k-4$

لدينا : $|n|<22$ معناه $-22<|n|<22$ ، يكافئ $-24<13k<26$ ، ومعناه $-\frac{24}{13}<k<2$

أي أن : $k\in\{-1;0;1\}$ ، منه $n\in\{-17;-4;9\}$.

تمرين 10 : عين كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n+7$ قاسما لـ 12 .

حل التمرين 10 :

$5n+7$ قاسما لـ 12 معناه $(5n+7)\in\{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$

ومنه $5n\in\{-19;-13;-11;-10;-9;-8;-6;-5;-4;-3;-1;5\}$

بالقسمة على 5 مع مراعاة أن n عدد صحيح نجد أن : $n\in\{-2;-1;1\}$.

تمرين 11 : عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة n التي من أجلها يكون العدد $n+6$ يقبل القسمة على n .

حل التمرين 11 :

$n+6$ يقبل القسمة على n ، معناه يوجد عدد طبيعي k بحيث : $n+6=nk$ ، يكافئ $6=n(k-1)$.

إذن : n يقسم 6 ، وبالتالي $n\in\{1;2;3;6\}$. وبالعكس كل القيم المعينة تحقق المطلوب .

تمرين 12 : أ/ عين الأعداد الصحيحة n حيث يكون $5n+6$ يقسم 34 .

ب / عين كل الأعداد الصحيحة n التي من أجلها $5n+6$ قاسما للعدد $n+8$.

حل التمرين 12 :

أ/ $5n+6$ يقسم 34 معناه $5n+6\in\{-34;-17;-2;-1;1;2;17;34\}$.

ومنه $5n\in\{-40;-23;-8;-7;-5;-4;11;28\}$.

بالقسمة على 5 مع مراعاة أن n عدد صحيح نجد أن : $n\in\{-8;-1\}$.

ب / $5n+6$ قاسما للعدد $n+8$ ، ومنه $5n+6$ يقسم $5(n+8)$ ، أي أن $5n+6$ يقسم $5n+40$

و بما أن $5n+6$ يقسم $5n+6$ فإن $5n+6$ يقسم $(5n+40)-(5n+6)$ أي أن $5n+6$ يقسم 34

ومنه $n=-8$ أو $n=-1$.

وبالعكس إذا كان $n=-1$ فإن 1 يقسم 7 .

و إذا كان $n=-8$ فإن -34 يقسم 0 .

تمرين 13 : n عدد صحيح . نضع $a=3n+7$ و $b=n+1$

أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يكون قاسما للعدد 4 .

حل التمرين 13 :

إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يقسم a و $3b$ ، ومنه d يقسم $a-3b$ ، ومنه d يقسم 4

تمرين 14 : n عدد صحيح . نضع $a=3n+7$ و $b=7n+2$

أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يكون قاسما للعدد 43 .

حل التمرين 14 :

إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يقسم $7a$ و $3b$ ، ومنه d يقسم $7a-3b$ ، ومنه d يقسم 43

تمرين 15 : n عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن العدد 1 .

عين بدلالة n بعض القواسم للعدد n^3-n .

حل التمرين 15 :

لدينا : $n^3-n=n(n-1)(n+1)$ ، ومنه بعض القواسم للعدد n^3-n هي :

1 ، n ، $n-1$ ، $n+1$ ، n^2-n ، n^2+n n^2-1 ، n^3-n .

تمارين حول القسمة الإقليدية

تمرين 20 : a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث حاصل القسمة الإقليدية للعدد a على b هو 17

و باقيها هو 3 ، و $a-27=23b$. عين a و b .

حل التمرين 20 :

حاصل القسمة الإقليدية للعدد a على b هو 17 و باقيها هو 3 معناه : $a=17b+3\ldots(1)$ و $b>3$

ولدينا $a-27=23b$ ، معناه $a=23b+27\ldots(2)$

بطرح (2) من (1) نجد $6b-24=0$ ، ومنه $b=4$ و $a=71$.

تمرين 37 :

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث : $\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a,b)=9 \end{cases}$

حل التمرين 37 :

لدينا : $\boldsymbol{d=9}$ ، ومنه $\begin{cases} a=9a' \\ b=9b' \\ PGCD(a',b')=1 \end{cases}$ ، ومنه $9a'+9b'=72$ ، ومنه $a'+b'=8$

a'	1	2	3	4	5	6	7
b'	7	6	5	4	3	2	1
a	9		27		45		63
b	63		45		27		9

ومنه الثنائيات (a,b) هي : $(a,b)\in\{(9,63);(27,45);(45,27);(63,9)\}$

تمرين 38 :

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} a+b=420 \\ PGCD(a,b)=84 \end{cases}$

حل التمرين 38 :

لدينا : $\boldsymbol{d = 84}$ ، ومنه $\begin{cases} a = 84a' \\ b = 84b' \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $84a' + 84b' = 420$ ، ومنه $a' + b' = 8$.

a'	1	2	3	4
b'	4	3	2	1
a	84	168	252	336
b	336	252	168	84

ومنه الثنائيات (a,b) هي : $(a,b) \in \{(84,336);(168,252);(252,168);(336,84)\}$.

تمرين 39 :

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} ab = 360 \\ PGCD(a,b) = 6 \end{cases}$.

حل التمرين 39 :

لدينا : $\boldsymbol{d = 6}$ ، ومنه $\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $36a'b' = 360$ ، ومنه $a'b' = 10$.

a'	1	2	5	10
b'	10	5	2	1
a	6	12	30	60
b	60	30	12	6

ومنه الثنائيات (a,b) هي : $(a,b) \in \{(6,60);(12,30);(30,12);(60,6)\}$

تمرين 40 :

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} ab = 2700 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$.

حل التمرين 40 :

لدينا : $\boldsymbol{d = 5}$ ، ومنه $\begin{cases} a = 5a' \\ b = 5b' \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $25a'b' = 2700$ ، ومنه $a'b' = 108$.

a'	1	2	3	4	6	9	12	18	27	36	54	108
b'	108	54	36	27	18	12	9	6	4	3	2	1
a	5			20					135			540
b	540			135					20			5

ومنه الثنائيات (a,b) هي : $(a,b) \in \{(5,540);(20,135);(135,20);(540,5)\}$

تمرين 42 : في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين $PGCD(a,b)$ ، ثم ما يمكن قوله عن a و b

أ / $a = 55$ و $b = 36$.

ب/ $a = 14$ و $b = 165$.

جـ/ $a = 1155$ و $b = 872$.

حل التمرين 42 :

لدينا : $PGCD(55,36) = 1$ ، $PGCD(14,165) = 1$ و $PGCD(1155,872) = 1$

في كل حالة نقول أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

تمرين 43 :

1- عين $PGCD(140,143)$.

2- استنتج $PGCD(a,b)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ/ $a = 140 \times 34$ و $b = 143 \times 34$.

ب/ $a = 140 \times 82$ و $b = 143 \times 82$.

حل التمرين 43 :

1- $PGCD(140,143) = 1$.

2- أ/ $PGCD(140 \times 34,143 \times 34) = 34 \times PGCD(140,143) = 34$

ب/ $PGCD(140 \times 82,143 \times 82) = 82 \times PGCD(140,143) = 82$

تمرين 47 : ليكن n عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3 .

برهن أن : $n+5$ مضاعف لـ $n-2$ إذا وفقط إذا كان $n = 3$ أو $n = 9$.

حل التمرين 47 :

نعلم أن : $n+5 = n-2+7$.

$n+5$ مضاعف لـ $n-2$ ، معناه $n-2$ قاسم لـ $n+5$ ، أي أن $n-2$ قاسم لـ $n-2$ و $n-2$ قاسم لـ 7

لدينا $n-2$ قاسم لـ 7 معناه إما $n-2=1$ أو $n-2=7$ ، أي أن $n=3$ أو $n=9$.

✍ عكسيا : إذا كان $n=3$ أو $n=9$. فإن $n+5=8$ أو $n+5=14$ و $n-2=1$ أو $n-2=7$.

وبالتالي في كلا الحالتين $n+5$ مضاعف لـ $n-2$.

تمرين 56 :

1- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a = n^2+5n+4$ و $b = n^2+3n+2$.

بين أن العدد $n+1$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

2- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$.

حل التمرين 56 :

1- من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $a = (n+1)(n+4)$ و $b = (n+1)(n+2)$.

إذن العدد $n+1$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

2- لدينا : $3n^2+15n+20 = (n+1)(3n+12)+8$

إذن العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$ معناه العدد $n+1$ قاسما للعدد 8

ومنه $n+1 \in \{1;2;4;8\}$ أي $n \in \{0;1;3;7\}$.

تمارين حول الموافقات في $\mathbb{Z}$

تمرين 1 : برر صحة العبارات التالية :

أ / $45 \equiv 3[7]$ ، ب/ $152 \equiv 2[3]$ ، جـ/ $29 \equiv -1[6]$.

د / $137 \equiv -3[5]$ ، و/ $-13 \equiv 2[5]$ ، هـ/ $-17 \equiv -7[10]$.

حل التمرين 1 :

أ/ $45 - 3 = 42 = 7 \times 6$ ، إذن $45 \equiv 3[7]$.

ب/ $152 - 2 = 150 = 3 \times 50$ ، إذن $152 \equiv 2[3]$.

جـ/ $29 - (-1) = 30 = 6 \times 5$ ، إذن $29 \equiv -1[6]$.

د/ $137 - (-3) = 140 = 5 \times 28$ ، إذن $137 \equiv -3[5]$.

و / $-13 - 2 = -15 = -3 \times 5$ ، إذن $-13 \equiv 2[5]$.

هـ/ $-17 - (-7) = -10 = -10 \times 1$ ، إذن $-17 \equiv -7[10]$.

تمرين 3 : عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث : $n \equiv 4[7]$.

حل التمرين 3 :

لدينا $n \equiv 4[7]$ معناه $n = 7k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

$0 \le n \le 30$ ، معناه $0 \le 7k + 4 \le 30$ ، أي $-\frac{4}{7} \le k \le \frac{26}{7}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

أي أن مع $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ ، ومنه $n \in \{4; 11; 18; 25\}$.

تمرين 4 : n عدد صحيح يحقق $n \equiv 140[12]$.عين باقي قسمة العدد n على 12 .

حل التمرين 4 : لدينا $140 = 12 \times 11 + 8$

لدينا $n \equiv 140[12]$ و $140 \equiv 8[12]$ إذن $n \equiv 8[12]$

بما أن $0 \le 8 < 12$ فإن 8 هو باقي قسمة العدد n على 12 .

تمرين 5 : x عدد صحيح ، باقي قسمته على 7 هو 2 .

عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة التالية : $x + 5$، $x - 5$ ، $9x$ ، $-15x$ ، x^3 .

حل التمرين 5 :

x عدد صحيح ، باقي قسمته على 7 هو 2 معناه $x \equiv 2[7]$ ، ومنه :

$x + 5 \equiv 7[7]$ ومنه $x + 5 \equiv 0[7]$.

$x - 5 \equiv -3[7]$ ومنه $x - 5 \equiv 4[7]$.

$9x \equiv 18[7]$ ومنه $9x \equiv 4[7]$.

$-15x \equiv -30[7]$ ومنه $-15x \equiv 5[7]$.

$x^3 \equiv 8[7]$ ومنه $x^3 \equiv 1[7]$.

تمرين 7 : n و m عددان طبيعيان غير معدومين . a و b عددان صحيحان .
أثبت أن $a \equiv b[n]$ يكافئ $am \equiv bm[nm]$.

حل التمرين 7 :

$a \equiv b[n]$ معناه $a - b = kn$ مع $k \in \mathbb{N}$ ويكافئ $am - bm = knm$ ومعناه $am \equiv bm[nm]$.

تمرين 8 : n عدد طبيعي . A ، B ، C ، a ، b و c أعداد صحيحة .
برهن أنه إذا كانت الفوارق $A - a$ ، $B - b$ و $C - c$ تقبل القسمة على n فإن الفرق $(ABC - abc)$ يقبل كذلك القسمة على n .

حل التمرين 8 :

لدينا : $\begin{cases} A - a \equiv 0[n] \\ B - b \equiv 0[n] \\ C - c \equiv 0[n] \end{cases}$ هذا معناه : $\begin{cases} A \equiv a[n] \\ B \equiv b[n] \\ C \equiv c[n] \end{cases}$ ، إذن $ABC \equiv abc[n]$ أي $ABC - abc \equiv 0[n]$

تمرين 11 : كم كانت تشير الساعة حيث :
أ / بعد 112 الساعة أشارت الثالثة ؟
ب/ قبل 163 الساعة أشارت الثالثة ؟
مع ذكر صباحا أم مساء .

حل التمرين 11 : الساعة المطلوبة هي n حيث $0 \leq n < 24$.
أ/ $n \equiv 3 + 112[24]$ ، ومنه $n \equiv 115[24]$ أي $n \equiv 19[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى السابعة مساء .
ب/ $n \equiv 3 - 163[24]$ ، ومنه $n \equiv -160[24]$ أي $n \equiv 8[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى الثامنة صباحا .

تمرين 26 : أ/ x عدد صحيح . أتمم الجدول التالي :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2x \equiv$						[5]

ب/ استنتج مجموعة قيم العدد الصحيح x حيث : $2x \equiv 3[5]$.

حل التمرين 26 : أ/

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2x \equiv$	0	2	4	1	3	[5]

ب/ $2x \equiv 3[5]$ معناه $x \equiv 4[5]$ أي أن $x = 5k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

تمرين 27 : عين قيم الأعداد الطبيعية n ، التي يكون من أجلها العدد $n^3 + n - 2$ قابلا للقسمة على 7 .

حل التمرين 27 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^3 \equiv$	0	1	1	6	1	6	6	[7]
$n^3 + n - 2 \equiv$	5	5	1	0	3	2	5	[7]

$n^3 + n - 2 \equiv 0[7]$ معناه $n \equiv 3[7]$ أي أن $n = 7k + 3$ مع $k \in \mathbb{N}$.

تمرين 32 : حل في $\mathbb{Z}$ كل من الجملتين التاليتين :

أ / $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$. ب / $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$.

حل التمرين 32 :

أ / $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$. معناه $\begin{cases} x = 5\alpha + 3 \\ x = 6\beta + 1 \end{cases}$ ، إذن $5\alpha - 6\beta = -2$ ومنه $5\alpha = 6\beta - 2$ ومنه $5\alpha \equiv -2[6]$

أي $-\alpha \equiv -2[6]$ ، أي $\alpha \equiv 2[6]$ ، ويعني $\alpha = 6k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

بالتعويض نجد $5(6k+2) = 6\beta - 2$ ، معناه $6\beta = 30k + 12$ ، معناه أن $\beta = 5k + 2$.

إذن $x = 5(6k+2) + 3$ ، ومنه $x = 30k + 13$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ب / $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$. معناه $\begin{cases} x \equiv 1[2] \\ x \equiv 1[3] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 3x \equiv 3[6] \\ 2x \equiv 2[6] \end{cases}$ ومنه $x \equiv 1[6]$.

تمرين 58 : ماهما الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} ؟

حل التمرين 58 :

لدينا $51^2 = 2601$ ، ومنه $51^2 \equiv 1[100]$. إذن $(51^2)^{1004} \equiv 1[100]$ ، أي $51^{2008} \equiv 1[100]$

إذن الرقم الأخير هو 1 وما قبله 0 .

تمرين 67 : n عدد طبيعي . نضع $A = n^2 - n + 1$

أ / عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7 .

ب / استنتج قيم العدد الطبيعي n ، التي يكون من أجلها العدد A قابلا للقسمة على 7 .

جـ / نضع $B = 2753^2 - 2753 + 1$. عين باقي قسمة العدد B على 7 .

حل التمرين 67 :

أ / تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7 .

$A = n^2 - n + 1$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$1 \equiv$	1	1	1	1	1	1	1	[7]
$A \equiv$	1	1	3	0	6	0	3	[7]

ب / $A \equiv 0[7]$ معناه $n \equiv 3[7]$ أو $n \equiv 5[7]$.

جـ / نضع $B = 2753^2 - 2753 + 1$. عين باقي قسمة العدد B على 7 .

نعتبر $n = 2753$ ، و $n \equiv 2[7]$ إذن $A \equiv 3[7]$ وبالتالي $B \equiv 3[7]$.

ومنه باقي قسمة العدد B على 7 هو 3 .

تمرين 70 :

أ / أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 .

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي ، يكون العدد $7^n + 3n - 1$ قابلا للقسمة على 9 .

حل التمرين 70 :

أ / دراسة بـواقي القسـمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 .

من أجل $n=0$ ، $7^0 \equiv 1[9]$. من أجل $n=1$ ، $7^1 \equiv 7[9]$.

من أجل $n=2$ ، $7^2 \equiv 4[9]$. من أجل $n=3$ ، $7^3 \equiv 1[9]$.

ومنه بـواقي القسـمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 تشكل متتالية دورية دورها 3 .

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$n \in \mathbb{N}$
$7^n \equiv$	1	7	4	[9]

ومنه البواقي هي : 1 ، 7 و 4 .

ب/ البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي ، يكون العدد 7^n+3n-1 قابلا للقسمة على 9 .

نضع $A=7^n+3n-1$

✍ إذا كان $n=3k$ فإن $A=7^{3k}+9k-1$ ، ومنه $A \equiv 1+0-1[9]$ أي $A \equiv 0[9]$.

✍ إذا كان $n=3k+1$ فإن $A=7^{3k+1}+9k+2$ ، ومنه $A \equiv 7+0+2[9]$ أي $A \equiv 0[9]$.

✍ إذا كان $n=3k+2$ فإن $A=7^{3k+2}+9k+5$ ، ومنه $A \equiv 4+0+5[9]$ أي $A \equiv 0[9]$.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي ، فإن العدد 7^n+3n-1 قابلا للقسمة على 9 .

تمارين حول التعداد

تمرين 34 : أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس 6 .

$a=\overline{234}$ ، $b=\overline{1523}$ ، $c=\overline{503012}$

حل التمرين 34 :

$$a=\overline{234}=2\times 6^2+3\times 6+4=94$$
$$b=\overline{1523}=1\times 6^3+5\times 6^2+2\times 6+3=411$$
$$c=\overline{503012}=5\times 6^5+3\times 6^3+1\times 6+2=39536$$

تمرين 35 : أكتب في النظام ذي الأساس 7 الأعداد الطبيعية التالية :

$a=7^3+2\times 7^2+3\times 7+5$ ، $b=5\times 7^2+2\times 7$ ، $c=6\times 7^3+2\times 7+1$

حل التمرين 35 :

$$a=7^3+2\times 7^2+3\times 7+5=\overline{1235}^7$$
$$b=5\times 7^2+2\times 7=\overline{520}^7$$
$$c=6\times 7^3+2\times 7+1=\overline{6021}^7$$

تمرين 40 : ما هو أساس التعداد الذي يكون فيه $\overline{2003}=\overline{21}\times\overline{43}$ ؟

حل التمرين 40 :

$\overline{2003}=\overline{21}\times\overline{43}$ معناه $2x^3+3=(2x+1)(4x+3)$ مع $x \geq 5$.

أي أن $2x^3-8x^2-10x=0$ ، أي $2x^2-8x-10=0$ أي $x=10$.

تمرين 48 : أكتب في النظام ذي الأساس 12 العدد $\overline{6175}$ المكتوب في النظام ذي الأساس 9 .

حل التمرين 48 :

لدينا : $\overline{6175} = 6 \times 9^3 + 1 \times 9^2 + 7 \times 9 + 5$ ، ومنه $\overline{6175} = 4523$

$$\begin{array}{lllll}
4523 & \vert\ 12 & & & \\
11 & \vert\ 376 & \vert\ 12 & & \\
 & 4 & \vert\ 31 & \vert\ 12 & \\
 & & 7 & \vert\ 2 & \vert\ 12 \\
 & & & 2 & \vert\ 0
\end{array}$$

ومنه $4523 = \overline{274\alpha}^{12}$ ، حيث $\alpha = 11$.

تمرين 49 : أكتب في النظام ذي الأساس 7 العددين $\overline{234}$ و $\overline{1040}$ المكتوبين في النظام ذي الأساس 5

حل التمرين 49 :

لدينا $\overline{234} = 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 69$ ، ومنه $69 = \overline{126}^7$.

$$\begin{array}{llll}
69 & \vert\ 7 & & \\
6 & \vert\ 9 & \vert\ 7 & \\
 & 2 & \vert\ 1 & \vert\ 7 \\
 & & 1 & \vert\ 0
\end{array}$$

لدينا $\overline{1040} = 1 \times 5^3 + 4 \times 5 = 145$ ، ومنه $145 = \overline{265}^7$.

$$\begin{array}{llll}
145 & \vert\ 7 & & \\
5 & \vert\ 20 & \vert\ 7 & \\
 & 6 & \vert\ 2 & \vert\ 7 \\
 & & 2 & \vert\ 0
\end{array}$$

تمرين 51 : في النظام العشري ، A عدد طبيعي أكبر من 3 و S هو مجموعة أرقامه .

أثبت أن يقبل القسمة على 3 إذا وفقط إذا كان S يقبل القسمة على 3 .

حل التمرين 51 :

نفرض ان A يكتب في النظام ذي الأساس العشري كمايلي $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ حيث $0 \leq a_i \leq 9$

ومنه $A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_0$ ، ولدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $10^n \equiv 1[3]$ وبالتالي

$A \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0 [3]$ أي $A \equiv S[3]$ ، إذن $A \equiv 0[3]$ معناه $S \equiv 0[3]$.

تمارين حول الأعداد الأولية

تمرين 31 : العدد الطبيعي n يوافق 3 بالترديد 35 و بالترديد 28 .

أ / برهن أن $n-3$ هو مضاعف مشترك للعددين 35 و 28 .

ب / ماهي أصغر قيمة للعدد n .

حل التمرين 31 :

أ / لدينا : $\begin{cases} n \equiv 3[35] \\ n \equiv 3[28] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} n-3 \equiv 0[35] \\ n-3 \equiv 0[28] \end{cases}$ ، إذن $n-3$ هو مضاعف مشترك للعددين 35 و 28 .

ب / **أصغر قيمة للعدد n .**

أصغر قيمة للعدد $n-3$ هي $PPCM(35,28) = 140$ ، ومنه أصغر قيمة للعدد n هي 143 .

تمرين 33 : n عدد طبيعي غير معدوم . أحسب $PPCM(n, 2n+1)$.

حل التمرين 33 : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا $PGCD(n, 2n+1) = 1$.

ومنه $PPCM(n, 2n+1) = n(2n+1)$

تمرين 35 : n عدد طبيعي غير معدوم . عين $PPCM(a,b)$ حيث :

$a = (3^{2n}-1)(7^{2n}-1)$ و $b = (3^n+1)(7^n+1)$

حل التمرين 35 :

لدينا : $a = (3^n-1)(7^n-1)(3^n+1)(7^n+1)$ أي $a = b(3^n-1)(7^n-1)$

أي أن a مضاعف لـ b ومنه $PPCM(a,b) = a$.

تمرين 46 : n عدد طبيعي . أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ / $a = n$ و $b = 2n+1$.

ب / $a = 2n+3$ و $b = 3n+5$.

حل التمرين 46 :

أ / لدينا $-2a + b = 1$ ، ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

ب / لدينا $-3a + 2b = 1$ ، ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

تمرين 60 : نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $2045x - 64y = 1 \ldots\ldots(1)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

1- عين $PGCD(2045,64)$

2- استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم عين حلا خاصا للمعادلة (1) .

3- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

حل التمرين 60 :

1- تعيين $PGCD(2045,64)$. لدينا :

$2045 = 64 \times 31 + 61$ ، و $64 = 61 \times 1 + 3$ ، و $61 = 3 \times 20 + 1$ ، $3 = 1 \times 3 + 0$

ومنه $PGCD(2045,64)=1$.

2- استنتاج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$

بما أن $PGCD(2045,64)=1$ ، فإنه حسب مبرهنة بيزو المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

✍ تعيين حلا خاصا للمعادلة (1) .

لدينا : $\begin{cases}2045=64\times 31+61\\ 64=61\times 1+3\\ 61=3\times 20+1\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}61=2045-64(31)\\ 3=64-61(1)\\ 1=61-3(20)\end{cases}$

$$1=61-3(20)$$
$$1=2045-64(31)-[64-61](20)$$
$$1=2045-64(31)-64(20)+61(20)$$
$$1=2045-64(51)+61(20)$$
$$1=2045-64(51)+[2045-64(31)](20)$$
$$1=2045-64(51)+2045(20)-64(620)$$
$$1=2045(21)-64(671)$$

ومنه $(21,671)$ حلا خاصا للمعادلة (1) .

3- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

لدينا : $\begin{cases}2045x-64y=1\\ 2045(21)-64(671)=1\end{cases}$ بالطرح نجد $2045(x-21)-64(y-671)=0$

ومنه $2045(x-21)=64(y-671)$.

لدينا : $\begin{cases}2045|64(y-671)\\ PGCD(2045,64)=1\end{cases}$ ، ومنه حسب مبرهنة غوص فإن $2045|y-671$ ، ومنه $y=2045k+671$

لدينا : $\begin{cases}64|2045(x-21)\\ PGCD(2045,64)=1\end{cases}$ ، ومنه حسب مبرهنة غوص فإن $64|x-21$ ، ومنه $x=64k+21$

إذن مجموعة حلول (1) هي : $\{(64k+21;2045k+671)\}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

بيوت لا توقظ أبناءها لصلاة الفجر
وتوقظهم للمدارس .
بيوت لا خير فيها ولا بركة .

عندمت تتراخى قبضتك عن مصحفك تشتد قبضة الحياة حول عنقك