المعادلات من الدرجة الثانية والمتطابقات

الفريق الجزائري لأولمبياد الرياضيات

الجزائر، الخميس 8 أكتوبر - الأربعاء 14 أكتوبر 2020

المحتويات

١ طريقة حل معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعدلة ذات المجهول x :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

مع $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$
بقسمة المعادلة على a نجد:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

نكمل الطرف الأيسر إلى مربع تام بإضافة $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ إلى الطرفين

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

فتصبح المعادلة تكافئ:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

نضع $\Delta = b^2 - 4ac$.
إذا كان $\Delta \geq 0$ المعادلة تكافئ

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

ننقل $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ إلى الطرف الأيمن و نحلل فنحصل على

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

تكافئ

$$\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي

$$\boxed{S = \left\{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}}$$

العددان x_1 و x_2 يسميان جذرا العبارة $ax^2 + bx + c$.
ملاحظات:

- المعادلة تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $\Delta \geq 0$.

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن للمعادلة حلان في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

مثال:
حل المعادلة: $2x^2 + 8x - 42 = 0$
نحسب Δ :
$\Delta = 8^2 - 4(2)(-42) = 400$
$\Delta > 0$ ومنه للمعادلة حلان مختلفان: $x_1 = \frac{-8-\sqrt{400}}{2\times 2} = -7$ و $x_2 = \frac{-8+\sqrt{400}}{2\times 2} = 3$ إذن مجموعة حلول المعادلة هي:

$$S = \{-7, 3\}$$

٢ تحليل عبارة من الدرجة الثانية

لتكن العبارة $ax^2 + bx + c$ مع $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$. إذا كان جذرا هذه العبارة x_1 و x_2 حقيقيان، فإن العبارة تحلل، وتحليلها يعطى

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

مثال:
تحليل العبارة: $n^5 - 5n^3 + 4n$
لدينا:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n((n^2)^2 - 5(n^2) + 4)$$

ونعلم أن 1 و 4 هما جذرا العبارة: $x^2 - 5x + 4$

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$$

٣ مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعدلة ذات المجهول x :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

مع $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$
ليكن x_1 و x_2 حلا هذه المعادلة.
لدينا:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}}$$

برهان:
بنشر الشكل المحلل للعبارة نحصل على:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

بالمطابقة نجد $-a(x_1+x_2)=b$ و $ax_1x_2=c$ ومنه $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

مثال: حل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} 7x-3y=1 \\ xy=2 \end{cases}$$

هذه الجملة تكافئ

$$\begin{cases} 7x-3y=1 \\ (7x)(-3y)=-42 \end{cases}$$

وعليه، $7x$ و $-3y$ هما حلا المعادلة $t^2-t-42=0$.

نحسب مميز المعادلة $\Delta=1+4\cdot 42=13^2$. ومنه، مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{-6,7\}$.

نميز حالتين:

- $7x=7$ و $3y=-6$
- $7x=-6$ و $-3y=7$

إذن حلول الجملة هي

$$(x,y)\in\left\{(1,2),\left(-\frac{6}{7},-\frac{7}{3}\right)\right\}$$

٤ العلاقة بين جذور ومعاملات كثير حدود من الدرجة الثالثة

ليكن $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ كثير حدود من الدرجة الثالثة، مع $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ و a غير معدوم.

لتكن x_1,x_2,x_3 جذوره.

لدينا:

$$\boxed{P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$$

بنشر هذه العبارة نجد

$$P(x)=a\left(x^3-(x_1+x_2+x_3)\,x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\,x-x_1x_2x_3\right)$$

من جهة أخرى

$$P(x)=a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\right)$$

بمطابقة المعاملات نجد

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

٥ $a^3+b^3+c^3=3abc$

تكلمنا سابقا عن هذه المتطابقة، هذه المرة نهتم بحالة المساواة.
نعيد تحليل العبارة بطريقة أخرى. ليكن P كثير حدود من الدرجة الثالثة، معامله الأساسي 1، وجذوره الأعداد الحقيقية a, b و c. نعلم مما سبق أن P يكتب على الشكل:

$$P(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

بالتعويض بقيم a, b و c نجد

$$0=P(a)=a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc$$
$$0=P(b)=b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc$$
$$0=P(c)=c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc$$

بالجمع طرفا لطرف نحصل على

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc=0$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)(a+b+c)$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

ولدينا

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2\right)$$

ومنه

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$$

وعليه $a^3+b^3+c^3=3abc$ تكافئ

$$(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)=0$$

تكافئ

$$a+b+c=0$$

أو

$$\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)=0$$

لكننا نعلم أن **المربعات أعداد موجبة** ومجموع أعداد موجبة يكون معدوما إذا وفقط إذا كانت كلها معدومة.
وعليه

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

تكافئ

$$a-b=b-c=c-a=0$$

نستنتج مما سبق أن $a^3+b^3+c^3=3abc$ إذا وفقط إذا كان $a+b+c=0$ أو $a=b=c$.

مثال: حلل $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.

نلاحظ أن
$$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$$
ومنه
$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

مثال 2: لتكن a,b,c أعدادا حقيقية مختلفة مثنى مثنى. أثبت أن المساواة التالية لا يمكن أن تحقق:
$$\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}=0.$$

سنستعمل في حل هذا المثال نوعا من البرهان يسمى **البرهان بالخُلف** **Proof by contradiction** .

نفرض أن المساواة يمكن أن تحقق من أجل قيم ل a,b,c.

باستعمال المتطابقة السابقة نجد:
$$\sqrt[3]{a-b}^3+\sqrt[3]{b-c}^3+\sqrt[3]{c-a}^3=3\sqrt[3]{a-b}\sqrt[3]{b-c}\sqrt[3]{c-a}$$
ومنه
$$3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-a)}=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$
يستلزم أن $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. وعليه، من بين الأعداد a,b,c اثنان منهما على الأقل متساويان.

وهذا يتناقض مع كون الأعداد الثلاثة مختلفة. أي أن فرضيتنا كانت خاطئة.

نستنتج من هذا أن المساواة المعطاة لا يمكن أن تحقق.