ثانوية عبد المجيد مزيان — يوم: 2024/12/01

المستوى: 3 رياضي — المدة: ساعتان

اختبار مادة الرياضيات للفصل الأول للتلميذ:

التمرين الأول: .... 09 نقط

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{e^{-(\ln x)^2}} ; si : x \in]0;+\infty[\\ 0 ; si : x=0\end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. وحدة الطول هي $2cm$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ مفسرا النتيجة هندسيا.

2) هل الدالة f مستمرة عند: $x_0=0$ من اليمين.

3) أ / تحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $\dfrac{f(x)}{x}=\sqrt{e^{-(2+\ln x)\ln x}}$.

ب / أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند: $x_0=0$ من اليمين مفسرا النتيجة هندسيا.

4) أ / تحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x}\times f(x)$.

ب / أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

5) أ / تحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f(x)-x=x\times\left(\sqrt{e^{-(2+\ln x)\ln x}}-1\right)$.

ب / أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم: $(\Delta): y=x$.

6) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

التمرين الثاني: .... 03 نقط

أجب بـ " **صحيح** " أو " **خاطئ** " مع التعليل في كل حالة:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x\times\ln\left(x^2-1\right)\right]=0$.

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^{2025}-1}{x}=2025$.

التمرين الثالث: .... 08 نقط

الجزء 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف وفسر النتائج هندسيا.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f مشكلا جدول تغيراتها.
3. أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث: $0{,}56\leq\alpha\leq 0{,}57$.
4. أنشئ (C_f) .
5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=\frac{1}{m}+\frac{1}{\ln(m)}$.

الجزء 2:

نعتبر الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=2\times f(x^2)$.

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1. باستعمال مشتق دالة مركبة شكل جدول تغيرات الدالة g .
2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا: $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$.
3. أدرس الوضع النسبي لكل من المنحنيين (C_f) و (C_g) على المجال $]1;+\infty[$.
4. أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق.

بالتوفيق ان شاء الله في بكالوريا 2025

للتلميذ:

عن أستاذ المادة : تواتي عبد اللطيف

الإجابة النموذجية لاختبار مادة الرياضيات

التمرين الأول: .... 09 نقط

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{e^{-(\ln x)^2}} ; si : x\in]0;+\infty[\\ 0; si : x=0\end{cases}$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ مفسرا النتيجة هندسيا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}=0$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{cases}$

و المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا عند: $+\infty$ معادلته $y=0$ **(محور الفواصل)**.

2) استمرارية الدالة f عند: $x_0=0$ من اليمين:

لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}=0=f(0)$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(\ln x)^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{cases}$ والدالة f مستمرة عند: $x_0=0$ من اليمين.

3) أ / التحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $\dfrac{f(x)}{x}=\sqrt{e^{-(2+\ln x)\ln x}}$.

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}}{x}=\frac{\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}}{e^{\ln x}}=\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}\times e^{-\ln x}=\sqrt{e^{-(\ln x)^2}\times\left(e^{-\ln x}\right)^2}=\sqrt{e^{-(\ln x)^2-2\ln x}}=\sqrt{e^{-(2+\ln x)\ln x}}$$

ب / دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند: $x_0=0$ من اليمين مفسرا النتيجة هندسيا:

لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\sqrt{e^{-(2+\ln x)\ln x}}=0$ والدالة f قابلة للاشتقاق عند: $x_0=0$ من اليمين

والمنحني (C_f) يقبل نصف مماس أفقي معادلته: $y=0$. $(x\geq 0)$.

4) أ/ التحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x}\times f(x)$.

لدينا:

$$f'(x)=\frac{-\left[2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)\right]e^{-(\ln x)^2}}{2\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}}=\frac{-\left[\frac{1}{x}\times\ln(x)\right]e^{-(\ln x)^2}\times\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}}{\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}\times\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}}$$

$$=-\left[\frac{1}{x}\times\ln(x)\right]\times\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}=\frac{-\ln x}{x}\times f(x)$$

ب / دراسة تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $f'(x)=\frac{-\ln x}{x}\times f(x)$ أي أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-\ln x$ لأن $\frac{f(x)}{x}>0$ و منه ينتج:

$f'(x)=0$ معناه أن : $x=1$, و منه ينتج:

x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$

و منه الدالة f متزايدة تماما على $]0;1]$ و متناقصة تماما على $[1;+\infty[$ و **جدول تغيراتها** هو:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

5) أ / التحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f(x)-x=x\times\left(\sqrt{e^{-(2+\ln x)\ln x}}-1\right)$:

لدينا: $f(x)-x=\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}-x=x\left(\frac{1}{x}\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}-1\right)$ و منه ينتج :

$$f(x)-x=x\left(\sqrt{e^{\ln x^{-2}}}\sqrt{e^{-(\ln x)^2}}-1\right)=x\left(\sqrt{e^{-2\ln x-(\ln x)^2}}-1\right)=x\times\left(\sqrt{e^{-(2+\ln x)\ln x}}-1\right)$$

ب / أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم: $(\Delta):y=x$.

لدينا: $f(x)-x=x\times\left(\sqrt{e^{-(2+\ln x)\ln x}}-1\right)$ أي أن: $f(x)-x=0$ معناه: إما : $x=0$ أو

$\sqrt{e^{-(2+\ln x)\ln x}}-1=0$ أي أن : $-(2+\ln x)\ln x=0$ معناه: إما $\ln x=0$ أو $-(2+\ln x)=0$

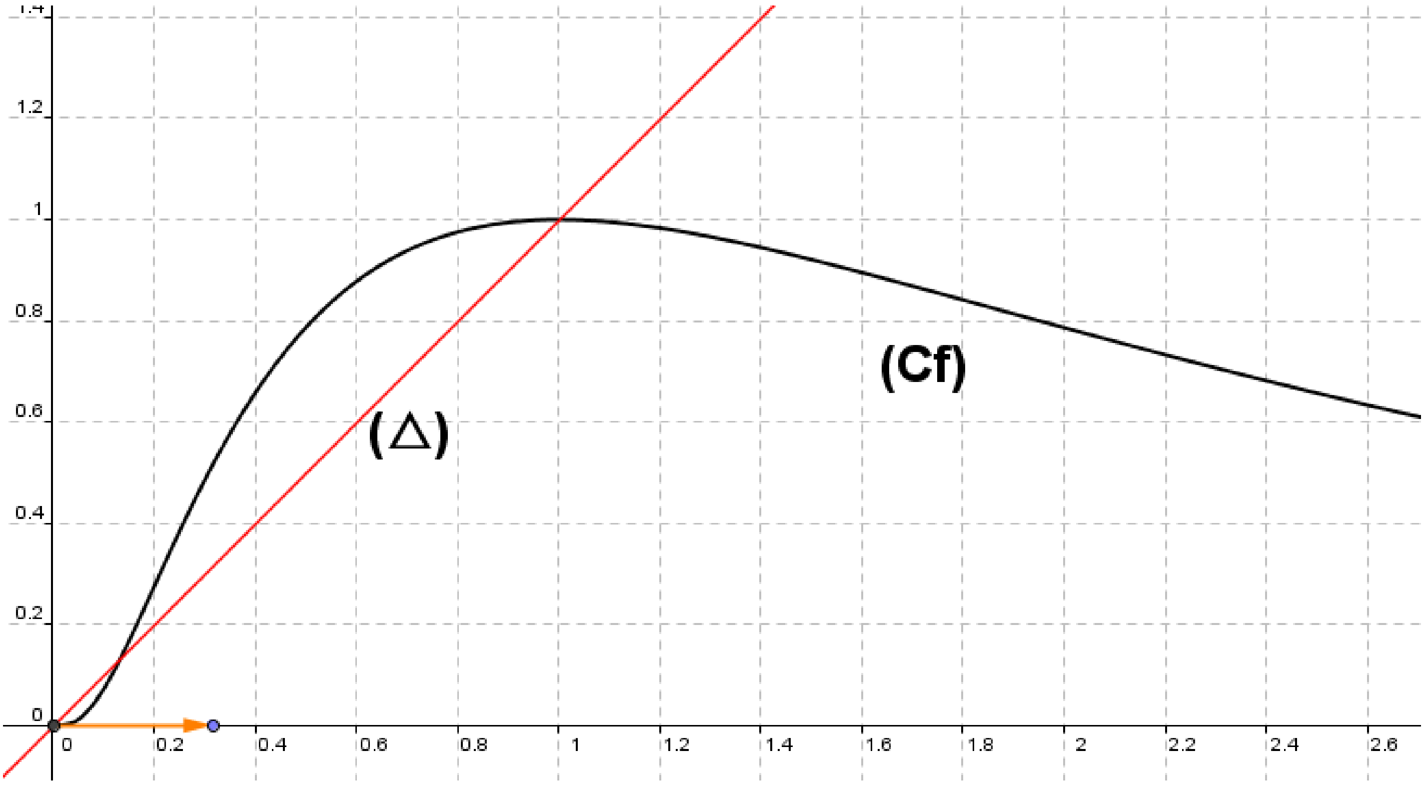
ينتج أن:

$$(C_f)\cap(\Delta)=\{0;e^{-2};1\}$$

المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) لما $x\in\left]0;e^{-2}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) لما $x\in\left]e^{-2};1\right[$.

6) إنشاء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):



التمرين الثاني: .... 03 نقط

أجب بـ أو " **خاطئ** " مع التعليل في كل حالة:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{x}\times\ln\left(x^{2}-1\right)\right]=0$. " **صحيح** " لأن :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[e^{x}\times\ln\left(x^{2}-1\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x^{2}-1\right)\times e^{x}\times\frac{\ln\left(x^{2}-1\right)}{\left(x^{2}-1\right)}\right]=0$$

لأن :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln\left(x^{2}-1\right)}{\left(x^{2}-1\right)}\right]=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln t}{t}\right]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x^{2}-1\right)\times e^{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x^{2}e^{x}-e^{x}\right]=0$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^{2025}-1}{x}=2025$. " **صحيح** " لأن :

بوضع: $f(x)=(x+1)^{2025}$ ينتج: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^{2025}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^{2025}-(0+1)^{2025}}{x-0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^{2025}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^{2025}-(0+1)^{2025}}{x-0}={\color{red}f'(0)=2025}$$

لأن: $f'(x)=2025(x+1)^{2024}$.

التمرين الثالث: .... 08 نقط

<u>الجزء 1</u>: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}$.

1. <u>حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف وفسر النتائج هندسيا:</u>

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}\right)=+\infty;;;;;;\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}\right)=0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} = \lim_{x\xrightarrow{>}1}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}\right)=+\infty;;;;;;\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}\right)=-\infty$$

$y=0$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$, $x=0$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) ,

$x=1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .

2. <u>دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها:</u>

من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(\ln x)^2}$:

لدينا: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(\ln x)^2}$.

لدينا: $f'(x)<0$ لأن على المجال

$]0;1[\cup]1;+\infty[$ لدينا: $-\frac{1}{x(\ln x)^2}<0$ و

$-\frac{1}{x^2}<0$. و منه الدالة f متناقصة تماما على

$]0;1[\cup]1;+\infty[$ و **جدول تغيراتها** هو:

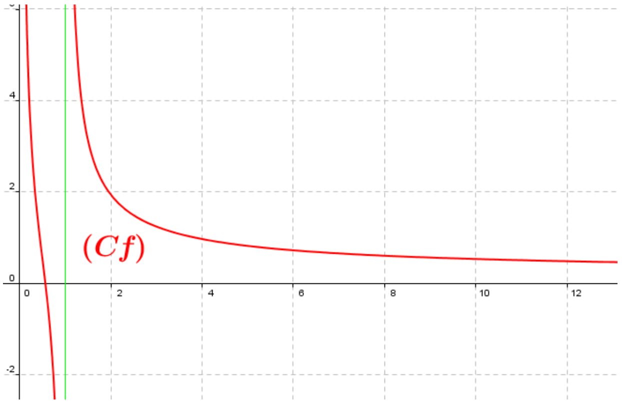
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			‖		
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

3. <u>إثبات أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث: $0,56\le\alpha\le0,57$:</u>

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;1[$ فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0.56;0.57[$ و لدينا: $f(0,56)\approx+0.06;f(0,57)\approx-0.02$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $0,56\le\alpha\le0,57$ و المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث $0,56\le\alpha\le0,57$.

4. <u>إنشاء (C_f) :</u> الصفحة الموالية

5. <u>مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=\frac{1}{m}+\frac{1}{\ln(m)}$:</u>



6. حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذو المعادلة: $y=f(m)$

ومنه ينتج أن: لما: $f(m)\le 0$ أي أن $m\in[\alpha;1[$: للمعادلة حل وحيد موجب. ولما: $f(m)>0$ أي أن $m\in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[$: للمعادلة حلان موجبان.

الجزء 2: الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=2f(x^2)$.

1. تشكيل جدول تغيرات الدالة g: لدينا $g'(x)=4x\times f'(x^2)$ ومنه: $g'(x)<0$ لأن $f'(x^2)<0;4x>0$

والدالة الدالة g متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و لدينا:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}\left[2f(x^2)\right]=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2f(x^2)\right]=0$ و **جدول تغيراتها** هو:

x	$1 \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

2. تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا : $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$:

لدينا:
$$f(x)-g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}-\left(\frac{2}{x^2}+\frac{2}{\ln x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{2\ln x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$$

3. دراسة الوضع النسبي لكل من المنحنيين (C_f) و (C_g) على المجال $]1;+\infty[$: من السؤال السابق لدينا:

$f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x(x-2)}{x^3}$ ينتج أن: $(C_f)\cap(C_g)=\{(2;f(2))\}$ والمنحني (C_f) يقع تحت المنحني (C_g) لما $x\in]1;2[$. والمنحني (C_f) يقع فوق المنحني (C_g) لما $x\in]2;+\infty[$.

4. إنشاء (C_g) في نفس المعلم السابق: