الحساب الحرفي (المتطابقات الشهيرة)

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الحساب الحرفي

عبد الحميد

1- المتطابقات الشهيرة:

المتطابقة رقم ①:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

المتطابقة رقم ②:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

المتطابقة رقم ③:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

2- التحليل:

- تحليل عبارة جبرية هو كتابتها على شكل جداء.
- لتحليل عبارة جبرية، نستعمل:
  - الخاصة التوزيعية (البحث عن العامل المشترك).
  - المتطابقات الشهيرة.

الخاصة التوزيعية:

$$ab + ac = a(b+c)$$

$$ab - ac = a(b-c)$$

$$a(c+d) + b(c+d) = (a+b)(c+d)$$

$$a(c+d) - b(c+d) = (a-b)(c+d)$$

أمثلة:

حلل العبارات التالية:

- $E = (2x+1)(5-2x) - (3-5x)(1+2x)$
- $G = (6-4x)(x+5) - (3-2x)(x-8)$
- $F = x^2 - 6x + 9$
- $P = 4x^2 - 1$

- العامل المشترك بارز في العبارة E وهو $2x+1$ لأن:

$$2x+1=1+2x$$

$$E=(2x+1)(5-2x)-(3-5x)(1+2x)$$
$$E=(2x+1)[(5-2x)-(3-5x)]$$
$$E=(2x+1)(5-2x-3+5x)$$
$$E=(2x+1)(3x+2)$$

- العامل المشترك غير بارز في العبارة G ونكتب:

$$6-4x=2(3-2x)$$

$$G=(6-4x)(x+5)-(3-2x)(x-8)$$
$$G=2(3-2x)(x+5)-(3-2x)(x-8)$$
$$G=(3-2x)[2(x+5)-(x-8)]$$
$$G=(3-2x)(2x+10-x+8)$$
$$G=(3-2x)(x+18)$$

- العبارة F من الشكل: a^2+b^2-2ab

وتكتب أيضا على الشكل: $(a-b)^2$.

$$F=x^2-6x+9$$
$$F=x^2-2\times 3x+3^2$$
$$F=(x-3)^2$$

- العبارة P من الشكل: a^2-b^2

وتكتب أيضا على الشكل: $(a-b)(a+b)$.

$$P=4x^2-1$$
$$P=(2x)^2-(1)^2$$
$$P=(2x-1)(2x+1)$$

الخلاصة:

لتحليل عبارة جبرية نتبع إحدى الطريقتين:

- استعمال الخاصة التوزيعية (البحث عن العامل المشترك).
- استخدام المتطابقات الشهيرة.

1) إذا وجد عامل مشترك بارز في كل حد، نستعمل الخاصة التوزيعية:

$$\begin{cases} ac+ab=a(c+b) \\ \text{أو} \\ ac-ab=a(c-b) \end{cases}$$

الحساب الحرفي
تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
عبد الحميد

2) إذا لم يكن العامل المشترك بارزا في كل حد، نقوم بتحليل كل حد إن أمكن بواسطة الخاصة التوزيعية أو المتطابقات الشهيرة.

أ) إذا كان العامل المشترك بارزا نستعمل الخاصة التوزيعية مرة أخرى.

$$\begin{cases} ac+ab=a(c+b) \\ \text{أو} \\ ac-ab=a(c-b) \end{cases}$$

ب) إذا لم يكن العامل المشترك بارزا نفكر في المتطابقات الشهيرة.

$$\begin{cases} (a+b)^2=a^2+b^2+2ab \\ \text{أو} \\ (a-b)^2=a^2+b^2-2ab \\ \text{أو} \\ (a-b)(a+b)=a^2-b^2 \end{cases}$$

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الحساب الحرفي
عبد الحميد

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الحساب الحرفي

عبد الحميد

سلسلة التمارين

التمرين رقم 01

A عدد حيث:

$$A = (2-\sqrt{3})^2$$

1) أنشر ثم بسط A.

لتكن العبارة الجبرية E حيث:

$$E = x^2 - (7-4\sqrt{3})$$

2) أحسب القيمة المضبوطة للعبارة E من أجل:

$$x = \sqrt{7}$$

3) حلل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين رقم 02

لتكن العبارة E حيث:

$$E = 2x - 10 - (x-5)^2$$

1) أنشر ثم بسط العبارة E.

2) حلل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين رقم 03

1) تحقق بالنشر أن:

$$(2x-1)(x-3) = 2x^2 - 7x + 3$$

لتكن العبارة A حيث:

$$A = 2x^2 - 7x + 3 + (2x-1)(3x+2)$$

2) أنشر ثم بسط العبارة A.

3) حلل A إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين رقم 04

لتكن العبارة E حيث:

$$E = (4x-1)^2 - (3x+2)(4x-1)$$

1) أنشر و بسط العبارة E.

2) حلل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين رقم 05

لتكن العبارة E حيث:

$$E = (2x+5)^2 - 36$$

1) تحقق بالنشر أن:

$$E = 4x^2 + 20x - 11$$

2) حلل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الحساب الحرفي
عبد الحميد

التمرين رقم 06

لتكن العبارة:

$$A = 3x - 5$$

حيث x عدد حقيقي.

1) أحسب القيمة المقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد A من أجل:

$$x = \sqrt{2}$$

2) أنشر ثم بسط العبارة B حيث:

$$B = (3x - 5)^2 + 9x^2 - 25$$

3) استنتج أن:

$$B = 6x(3x - 5)$$

التمرين رقم 07

تعطى العبارة:

$$F = (2x - 3)^2 - 16$$

1) تحقق بالنشر أن:

$$F = 4x^2 - 12x - 7$$

2) حلل F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) أحسب F من أجل: $x = 1 + \sqrt{2}$ واكتب النتيجة على الشكل $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b عددان نسبيان.

التمرين رقم 08

1) تحقق من صحة المساواة التالية:

$$5(2x + 1)(2x - 1) = 20x^2 - 5$$

2) حلل العبارة A إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى بحيث:

$$A = (2x + 1)(3x - 7) - (20x^2 - 5)$$

التمرين رقم 09

لتكن العبارة P حيث:

$$P = (1 - 3x)(3x + 3) - 2(3x + 3)$$

1) أنشر وبسط العبارة P.

2) حلل العبارة P إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين رقم 10

1) تحقق من المساواة التالية:

$$(3x + 1)(x - 4) = 3x^2 - 11x - 4$$

2) حلل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

$$E = 3x^2 - 11x - 4 + (3x + 1)^2$$

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
عبد الحميد
الحساب الحرفي

الحلول المفصلة

الحل رقم 01

1) نشر وتبسيط A:

تذكر أن:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

ومنه نكتب:

$$A = (2-\sqrt{3})^2$$
$$= 2^2 + \sqrt{3}^2 - 2(2\sqrt{3})$$
$$= 4 + 3 - 4\sqrt{3}$$
$$= 7 - 4\sqrt{3}$$

$$A = 7 - 4\sqrt{3}$$

2) حساب القيمة المضبوطة للعبارة E من أجل $x = \sqrt{7}$:

$$E = x^2 - (7 - 4\sqrt{3})$$

بالتعويض نكتب:

$$E = \sqrt{7}^2 - (7 - 4\sqrt{3})$$
$$= 7 - (7 - 4\sqrt{3})$$
$$= 7 - 7 + 4\sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3}$$

$$E = 4\sqrt{3}$$

3) تحليل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

لدينا من المعطيات:

$$E = x^2 - (7 - 4\sqrt{3})$$

ولدينا من السؤال 1):

$$(2-\sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$$

ومنه:

$$E = x^2 - (2-\sqrt{3})^2$$

تذكر أن:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

فنكتب:

$$E = x^2 - (2-\sqrt{3})^2$$
$$= [x-(2-\sqrt{3})][x+(2-\sqrt{3})]$$
$$= (x-2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$$
$$E = (x-2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$$

الحل رقم 02

1) نشر وتبسيط العبارة E:

$$E = 2x - 10 - (x-5)^2$$

تذكر أن:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

ومنه نكتب:

$$E = 2x - 10 - (x-5)^2$$
$$= 2x - 10 - (x^2 + 5^2 - 2(5x))$$
$$= 2x - 10 - (x^2 + 25 - 10x)$$
$$= 2x - 10 - x^2 - 25 + 10x$$
$$= -x^2 + 12x - 35$$
$$E = -x^2 + 12x - 35$$

2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

لاحظ أن:

$$2x - 10 = 2(x-5)$$

ومنه نكتب:

$$E = 2(x-5) - (x-5)^2$$

نستخرج العامل المشترك $(x-5)$ من العبارة E فنكتب:

$$E = 2(x-5) - (x-5)^2$$
$$= (x-5)[2-(x-5)]$$
$$= (x-5)(2-x+5)$$
$$= (x-5)(-x+7)$$
$$E = (x-5)(-x+7)$$

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الحل الشرعي
عبد الحميد

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الصف الرابع متوسط
عبد الحميد

ملاحظة:

يمكن التحقق بنشر العبارة E مرة أخرى كما يلي:

$$E = (x-5)(-x+7)$$
$$= -x^2 + 7x + 5x - 35$$
$$= -x^2 + 12x - 35$$
$$E = -x^2 + 12x - 35$$

وهي نفس نتيجة السؤال 1).

الحل رقم 03

1) التحقق بالنشر أن: $(2x-1)(x-3) = 2x^2 - 7x + 3$

نكتب:

$$(2x-1)(x-3) = (2x)(x) - (2x)(3) - (1)(x) + (1)(3)$$
$$= 2x^2 - 6x - x + 3$$
$$= 2x^2 - 7x + 3$$
$$(2x-1)(x-3) = 2x^2 - 7x + 3$$

2) نشر وتبسيط العبارة A:

$$A = 2x^2 - 7x + 3 + (2x-1)(3x+2)$$
$$= 2x^2 - 7x + 3 + 6x^2 + 4x - 3x - 2$$
$$= (2x^2 + 6x^2) + (-7x + 4x - 3x) + (3-2)$$
$$= 8x^2 - 6x + 1$$
$$A = 8x^2 - 6x + 1$$

3) تحليل A إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

$$A = 2x^2 - 7x + 3 + (2x-1)(3x+2)$$

لدينا من السؤال 1):

$$2x^2 - 7x + 3 = (2x-1)(x-3)$$

ومنه نكتب:

$$A = (2x-1)(x-3) + (2x-1)(3x+2)$$

نستخرج العامل المشترك $(2x-1)$ كما يلي:

$$A=(2x-1)(x-3)+(2x-1)(3x+2)$$
$$A=(2x-1)[(x-3)+(3x+2)]$$
$$=(2x-1)(x-3+3x+2)$$
$$=(2x-1)(4x-1)$$
$$A=(2x-1)(4x-1)$$

ملاحظة:

يمكن التحقق بنشر العبارة A مرة أخرى كما يلي:

$$A=(2x-1)(4x-1)$$
$$=8x^2-2x-4x+1$$
$$=8x^2-6x+1$$
$$A=8x^2-6x+1$$

وهي نفس نتيجة السؤال 2).

الحل رقم 04

1) نشر وتبسيط العبارة E:

$$E=(4x-1)^2-(3x+2)(4x-1)$$

تذكر أن:

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

ومنه نكتب:

$$E=(4x-1)^2-(3x+2)(4x-1)$$
$$=(4x)^2+1^2-2(4x)(1)-(12x^2-3x+8x-2)$$
$$=16x^2+1-8x-(12x^2+5x-2)$$
$$=16x^2+1-8x-12x^2-5x+2$$
$$=4x^2-13x+3$$
$$E=4x^2-13x+3$$

2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

$$E=(4x-1)^2-(3x+2)(4x-1)$$

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الحساب الحرفي
عبد الحميد

نستخرج العامل المشترك $(4x-1)$ كما يلي:

$$E=(4x-1)^2-(3x+2)(4x-1)$$
$$=(4x-1)[(4x-1)-(3x+2)]$$
$$=(4x-1)(4x-1-3x-2)$$
$$=(4x-1)(x-3)$$
$$E=(4x-1)(x-3)$$

ملاحظة:

يمكن التحقق بنشر العبارة E مرة أخرى كما يلي:

$$E=(4x-1)(x-3)$$
$$=4x^2-12x-x+3$$
$$=4x^2-13x+3$$
$$E=4x^2-13x+3$$

وهي نفس نتيجة السؤال 1).

الحل رقم 05

1) التحقق بالنشر أن:

$$E=4x^2+20x-11$$

تذكر أن:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

ومنه نكتب:

$$E=(2x+5)^2-36$$
$$=(2x)^2+5^2+2(2x)(5)-36$$
$$=4x^2+25+20x-36$$
$$=4x^2+20x-11$$
$$E=4x^2+20x-11$$

2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

$$E=(2x+5)^2-36$$

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الحساب الحرفي
عبد الحميد

لاحظ أن:

$$36 = 6^2$$

فنكتب:

$$E = (2x+5)^2 - 6^2$$

وتذكر أن:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

نستعين بهذه المتطابقة لتحليل العبارة E كما يلي:

$$\begin{aligned} E &= (2x+5)^2 - 6^2 \\ &= (2x+5+6)(2x+5-6) \\ &= (2x+11)(2x-1) \end{aligned}$$

$$E = (2x+11)(2x-1)$$

ملاحظة:

يمكن التحقق بنشر العبارة E مرة أخرى كما يلي:

$$\begin{aligned} E &= (2x+11)(2x-1) \\ &= 4x^2 - 2x + 22x - 11 \\ &= 4x^2 + 20x - 11 \end{aligned}$$

$$E = 4x^2 + 20x - 11$$

وهي نفس نتيجة السؤال 1).

الحل رقم 06

1) حساب القيمة المقربة إلى 10^{-2} بالنقصان لـ A من أجل $x = \sqrt{2}$:

$$A = 3x - 5$$

بالتعويض نكتب:

$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{2} - 5 \\ &= 3 \times 1{,}41 - 5 \\ &= 4{,}23 - 5 \\ &= -0{,}77 \end{aligned}$$

$$A = -0{,}75$$

2) نشر وتبسيط العبارة B:

$$B = (3x-5)^2 + 9x^2 - 25$$

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الجزء الثاني

تذكر أن:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

ومنه نكتب:

$$\begin{aligned} B &= (3x-5)^2 + 9x^2 - 25 \\ &= (3x)^2 + 5^2 - 2(3x)(5) + 9x^2 - 25 \\ &= 9x^2 + 25 - 30x + 9x^2 - 25 \\ &= 18x^2 - 30x \end{aligned}$$

$$B = 18x^2 - 30x$$

3) استنتاج أن:

$$B = 6x(3x-5)$$

لدينا من السؤال 2):

$$B = 18x^2 - 30x$$

ونكتب أيضا:

$$B = (6x)(3x) - (6x)(5)$$

نستخرج العامل المشترك $(6x)$ كما يلي:

$$\begin{aligned} B &= (6x)(3x) - (6x)(5) \\ &= 6x(3x-5) \end{aligned}$$

$$B = 6x(3x-5)$$

الحل رقم 07

1) التحقق بالنشر أن:

$$F = 4x^2 - 12x - 7$$

تذكر أن:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

ومنه نكتب:

$$\begin{aligned} F &= (2x-3)^2 - 16 \\ &= (2x)^2 + 3^2 - 2(2x)(3) - 16 \\ &= 4x^2 + 9 - 12x - 16 \\ &= 4x^2 - 12x - 7 \end{aligned}$$

$$F = 4x^2 - 12x - 7$$

2) تحليل العبارة F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

$$F = (2x-3)^2 - 16$$

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الجزء الثاني

لاحظ أن:

$$16 = 4^2$$

فنكتب:

$$F = (2x-3)^2 - 4^2$$

وتذكر أن:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

نستعين بهذه المتطابقة لتحليل العبارة F كما يلي:

$$\begin{aligned} F &= (2x-3)^2 - 4^2 \\ &= (2x-3+4)(2x-3-4) \\ &= (2x+1)(2x-7) \end{aligned}$$

$$F = (2x+1)(2x-7)$$

ملاحظة:

يمكن التحقق بنشر العبارة F مرة أخرى كما يلي:

$$\begin{aligned} F &= (2x+1)(2x-7) \\ &= 4x^2 - 14x + 2x - 7 \\ &= 4x^2 - 12x - 7 \end{aligned}$$

$$F = 4x^2 - 12x - 7$$

وهي نفس نتيجة السؤال 1).

3) حساب F من أجل $x = 1 + \sqrt{2}$:

$$F = 4x^2 - 12x - 7$$

بالتعويض نكتب:

$$\begin{aligned} F &= 4(1+\sqrt{2})^2 - 12(1+\sqrt{2}) - 7 \\ &= 4(1+2+2\sqrt{2}) - 12 - 12\sqrt{2} - 7 \\ &= 4(3+2\sqrt{2}) - 19 - 12\sqrt{2} \\ &= 12 + 8\sqrt{2} - 19 - 12\sqrt{2} \\ &= (12-19) + (8-12)\sqrt{2} \\ &= -7 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$F = -7 - 4\sqrt{2}$$

النتيجة مكتوبة على الشكل $a + b\sqrt{2}$ حيث $a = -7$ و $b = -4$.

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الحل الشرح
عبد الحميد

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الحساب الحرفي
عبد الحميد

الحل رقم 08

1) التحقق من صحة المساواة التالية:

$$5(2x+1)(2x-1) = 20x^2 - 5$$

تذكر أن:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

نستعين بهذه المتطابقة للتحقق من صحة المساواة كما يلي:

$$\begin{aligned} 5(2x+1)(2x-1) &= 5[(2x)^2 - 1^2] \\ &= 5(4x^2 - 1) \\ &= 20x^2 - 5 \end{aligned}$$

$$5(2x+1)(2x-1) = 20x^2 - 5$$

2) تحليل العبارة A إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

$$A = (2x+1)(3x-7) - (20x^2 - 5)$$

لدينا من السؤال 1):

$$5(2x+1)(2x-1) = 20x^2 - 5$$

ومنه نكتب:

$$A = (2x+1)(3x-7) - 5(2x+1)(2x-1)$$

لاحظ العامل المشترك $(2x+1)$ في العبارة A:

$$A = (2x+1)(3x-7) - 5(2x+1)(2x-1)$$

فنكتب:

$$\begin{aligned} A &= (2x+1)[(3x-7) - 5(2x-1)] \\ &= (2x+1)(3x-7-10x+5) \\ &= (2x+1)(-7x-2) \end{aligned}$$

$$A = (2x+1)(-7x-2)$$

الحل رقم 09

1) نشر وتبسيط العبارة P:

$$P = (1-3x)(3x+3) - 2(3x+3)$$

باستعمال النشر نكتب:

$$P = (1-3x)(3x+3) - 2(3x+3)$$
$$= 3x + 3 - 9x^2 - 9x - 6x - 6$$
$$= -9x^2 + (3x - 9x - 6x) + (3 - 6)$$
$$= -9x^2 - 12x - 3$$

$$P = -9x^2 - 12x - 3$$

2) تحليل العبارة P إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

$$P = (1-3x)(3x+3) - 2(3x+3)$$

لاحظ العامل المشترك $(3x+3)$ في العبارة P:

$$P = (1-3x)(3x+3) - 2(3x+3)$$

فنكتب:

$$P = (1-3x)(3x+3) - 2(3x+3)$$
$$P = (3x+3)[(1-3x) - 2]$$
$$P = (3x+3)(1-3x-2)$$
$$P = (3x+3)(-3x-1)$$

$$P = (3x+3)(-3x-1)$$

ملاحظة:

يمكن التحقق بنشر العبارة P مرة أخرى كما يلي:

$$P = (3x+3)(-3x-1)$$
$$= -9x^2 - 3x - 9x - 3$$
$$= -9x^2 - 12x - 3$$

$$P = -9x^2 - 12x - 3$$

وهي نفس نتيجة السؤال 1).

الحل رقم 10

1) التحقق من صحة المساواة:

$$(3x+1)(x-4) = 3x^2 - 11x - 4$$

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
عبد الحميد
الجبر الحرفي

باستعمال النشر نكتب:

$$(3x+1)(x-4) = 3x^2 - 12x + x - 4$$

$$(3x+1)(x-4) = 3x^2 - 11x - 4$$

$$(3x+1)(x-4) = 3x^2 - 11x - 4$$

2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى:

$$E = 3x^2 - 11x - 4 + (3x+1)^2$$

لدينا من السؤال 1):

$$(3x+1)(x-4) = 3x^2 - 11x - 4$$

ومنه نكتب:

$$E = (3x+1)(x-4) + (3x+1)^2$$

لاحظ العامل المشترك $(3x+1)$ في العبارة E:

$$E = (3x+1)(x-4) + (3x+1)^2$$

فنكتب:

$$E = (3x+1)[(x-4) + (3x+1)]$$
$$= (3x+1)(x-4+3x+1)$$
$$= (3x+1)(4x-3)$$

$$E = (3x+1)(4x-3)$$

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد
الحساب الحرفي
عبد الحميد
ـ جميع الحقوق محفوظة ـ