مجلة المفيد في الرياضيات

المتتاليات العدديـــــة

لتلاميذ الثالثة ثانوي شعب علمية

- ملخص الدرس
- تمارين محلولة
- تمارين مقترحة

للأستاذ بلجودي حمو

ملـــخـــص الـــدرس

المتتالية العددية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n $(n \geq n_0)$ العدد $u(n)$. يسمى u_n الحد العام للمتتالية u و يسمى u_{n_0} حدها الأول.

المتتاليات الحسابية

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r $(r \in \Re)$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$.

الحد العام:	$u_n = u_p + (n-p)r$ $\quad$ $u_n = u_0 + nr$
مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :	$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$
الوسط الحسابي :	u_a ، u_b و u_c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية : $u_a + u_c = 2u_b$

المتتاليات الهندسية

نقول أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_0 و أساسها q $(q \in \Re^*)$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = v_n \times q$

الحد العام :	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ $\quad$ $v_n = v_0 \times q^n$
مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:	$S = v_p + v_{p+1} + v_{p+2} + ... + v_n = \frac{v_p}{1-q}(1 - q^{n-p+1})$ مع $q \neq 1$. إذا كان $q = 1$ ، $S = (n-p+1) \times v_p$
الوسط الهندسي :	v_a ، v_b و v_c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن $v_a \times v_c = v_b^2$

المتتاليات التراجعية من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

إذا كان	$a = 0$ أو $a = 1$ و $b = 0$	$a = 1$ و $b \neq 0$	$a \neq 0$ و $a \neq 1$ و $b = 0$
فـــإن	(u_n) ثابتة.	(u_n) حسابية أساسها b .	(u_n) هندسية أساسها a .

إذا كان $a \neq 0$ و $a \neq 1$ و $b \neq 0$ فإن (u_n) ليست لا حسابية و لا هندسية و لدراستها نستعين بمتتالية مساعدة (v_n) ذات الحد العام $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

نهاية متتالية:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[A;+\infty[$ حيث A عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

نهاية متتالية معرفة بعبارة تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ و متقاربة:

إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد l حيث $f(l) = l$.

اتّجاه تغيّر متتالية عددية:

إذا كان	$u_{n+1} - u_n \geq 0$	$u_{n+1} - u_n \leq 0$	$u_{n+1} - u_n = 0$
فإن	المتتالية (u_n) متزايدة	المتتالية (u_n) متناقصة	المتتالية (u_n) ثابتة

- يمكن كذلك أن نقارن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1
- أو ندرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $[n_0;+\infty[$ في حالة متتالية حدها العام $u_n = f(n)$
- أو استنتاجه انطلاقا من الأساس.

اتجاه تغير متتالية حسابية انطلاقا من أساسها :

(u_n) متتالية حسابية معرفة على N ، حدها الأول u_0 و أساسها r .

- إذا كان $r \prec 0$ فإن المتتالية متناقصة.
- إذا كان $r \succ 0$ فإن المتتالية متزايدة.
- إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

اتجاه تغير متتالية هندسية انطلاقا من أساسها :

(u_n) متتالية هندسية معرفة على N ، حدها الأول u_0 و أساسها q .

- إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.
- إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.
- إذا كان $q < 0$ فإن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

تقارب متتالية عددية:

(u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

- إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة.
- إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ أو النهاية غير موجودة فإن المتتالية (u_n) متباعدة.

متتالية محدودة:

(u_n) متتالية عددية معرفة على N .

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \ge A$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

الرتابة و التقارب:

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

متتاليتان متجاورتان:

تكون متتاليتان عدديتان (u_n) و (v_n) متجاورتين إذا و فقط إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و كانت $\lim(u_n - v_n) = 0$.

الاستدلال بالتراجع:

$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n . n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

تمـــــاريـــــن

التمرين -1-

(u_n)متتالية حسابية حدها الأول هو $u_0=2$ وأساسها $r=-3$

1.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية(u_n).

2.احسبu_{10} وu_{20}.

3.عين اتجاه تغير المتتالية(u_n) .

4.احسب نهاية المتتالية (u_n) . هل المتتالية(u_n)متقاربة ؟ علل؟

5.أحسب المجموع S_n بدلالةnحيث : $S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_n$.

6.أحسب المجموع S حيث : $S=u_{10}+u_{11}+u_{12}+......+u_{20}$.

التمرين -2-

(u_n)متتالية عددية معرفة على N حيث: $u_n=\frac{2}{3}n-1$

1.برهن أن(u_n)متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2.بين أن 39 حد من حدود المتتالية(u_n).

3.أحسب المجموع S_n بدلالةnحيث : $S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_n$.

4.عين قيمة n حتى يكون: $S_n=0$.

التمرين -3-

(u_n)متتالية حسابية حيث : $\begin{cases}u_0+2u_1+u_2=12\\ u_1+u_2=5\end{cases}$

1.أحسب u_1 ثم u_2 وu_0 و r أساس المتتالية.

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية(u_n).

التمرين -4-

(v_n)متتالية هندسية حدها الأول هو $v_0=2$ وأساسها $q=3$

1.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية(v_n).

2.احسب v_1 و v_2.

3.عين اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

4.احسب نهاية المتتالية (v_n) . هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟ علل؟

5.أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

التمرين -5-

(v_n) متتالية عددية معرفة على N حيث : $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1.برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2.احسب نهاية المتتالية (v_n) . هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟ علل؟

3.بين أن $\frac{3}{256}$ حد من حدود المتتالية (v_n).

4.عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $v_n \geq \frac{3}{8}$.

التمرين -6-

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما أساسها q و حدها الأول u_1 حيث : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1.أحسب u_2 و q ثم استنتج u_1 .

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n).

3.أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

التمرين -7-

1.لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2$

أ. احسب u_1 و u_2.

ب. برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ -6$

ج.ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

د.استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

2.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n + 6$.

أ.أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب.أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n . ثم تأكد من صحة جوابك على السؤال (1- د).

ج.أحسب، بدلالة n ، المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

التمرين -8-

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}$

1.عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب في هذه الحالة، بدلالة n ، المجموع $S=u_0+u_1+........+u_n$.

2.نفرض $\alpha=2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-1$

أ.أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب.أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

ج.ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n)؟

د.أحسب، بدلالة n ، المجموع $S=u_0+u_1+........+u_n$.

التمرين -9-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$

1.أ.برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\succ 1$.

ب.ادرس اتجاه تغير (u_n) واستنتج تقاربها .

2. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على كما يلي : $v_n=\ln(u_n-1)$

أ.اثبت ان (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول.

ب.اكتب (v_n) بدلالة ثم استنتج أن : $u_n=1+\frac{12}{5^n}$. احسب عندئذ نهايتها.

ج.بين أن : $(u_0-1)(u_1-1)(u_2-1)\times....\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

التمرين -10-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2u_n+n+1$ ،

1.أ. احسب u_1 و u_2.

2.لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=u_n+n+\alpha$.

➢عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3.نفرض $\alpha=2$.

أ.عين أساس المتتالية (v_n) وحدها الأول.

ب.اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n.

ج. احسب المجاميع التالية و الجداء : $S_1=v_0+v_1+...+v_n$ ، $S_2=v_0{}^2+v_1{}^2+...+v_n{}^2$ ، $P=v_0\times v_1\times...\times v_n$ ،

$S_3=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+.......+\frac{1}{v_n}$ ، $S_4=u_0+u_1+...+u_n$

التمرين -11-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و $u_1=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$

1.أ. احسب u_2 و u_3.

2.لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=u_{n+1}-u_n$

أ.بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب.احسب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

ج.احسب المجموع S_n بدلالة u_n باستعمال العبارة $v_n=u_{n+1}-u_n$.

د.عبر عن u_n بدلالة S_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

التمرين -12-

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-2$

1.أ. أرسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على $\Re$

بـ: $f(x)=\frac{1}{3}x-2$.

ب. باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدن حساب الحدود u_3,u_2,u_1,u_0 .

ج.ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2.أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\geq -3$

ب. تحقق أن (u_n) متناقصة .

ج. هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

3..نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+3$

أ.أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب.أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

التمرين -13-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

1.بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2-\frac{3}{u_n+2}$.

2.برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-1\leq u_n\leq 1$.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

4.لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n+1}{1-u_n}$.

أ.بيين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب.أكتب v_n ثم استنتج u_n بدلالة n. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ج.أحسب المجموع : $S_n = \frac{2}{v_1} + \frac{2}{v_2} + ... + \frac{2}{v_n}$.

التمرين -14-

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{5x}{x+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في م.م.م.

1.أ.ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;4]$.

ب.أنشئ (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$.

ج. بين أنه إذا كان $x \in [0;4]$ فإن $f(x) \in [0;4]$.

2.نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

ا.مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n).

ب.ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n).

ج.برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي ، $0 \le u_n \le 4$.

د.ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)،

هـ.استنتج تقارب المتتالية (u_n)، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين -15-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$.

1. أ-برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ -2$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$.

التمرين -16-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_1 = e^3$ ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_{n+1} = 2\sqrt{\frac{u_n}{e}}$

1.احسب كل من u_2 ، u_3.

2.اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن: $u_n > \frac{4}{e}$.

3.برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n).

4.استنتج أن متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5.نضع من أجل كل $n \in N^*$: $v_n = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n$

أ.بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدهاالأول.

ب.عبر عن v_n بدلالة n، ثم استنتج v_n بدلالة n. تأكد من $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$،

التمرين -17-

I) لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = e + \sqrt{u_n - e}$.

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $e \prec u_n \prec e+1$.

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - e)(e+1-u_n)}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3. استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها.

II) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = e\ln(u_n - e)$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

2.عبر عن v_n بدلالة n، ثم بين أن: $u_n = e\left(1 + e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}\right)$ أحسب نهاية (u_n) مرة ثانية.

3.نضع: $S_n = \ln(3-e) + \ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\dots + \ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و $P_n = \left(\frac{u_0}{e} - 1\right)\times\left(\frac{u_1}{e} - 1\right)\times\left(\frac{u_2}{e} - 1\right)\times \dots\dots\dots \times\left(\frac{u_n}{e} - 1\right)$.

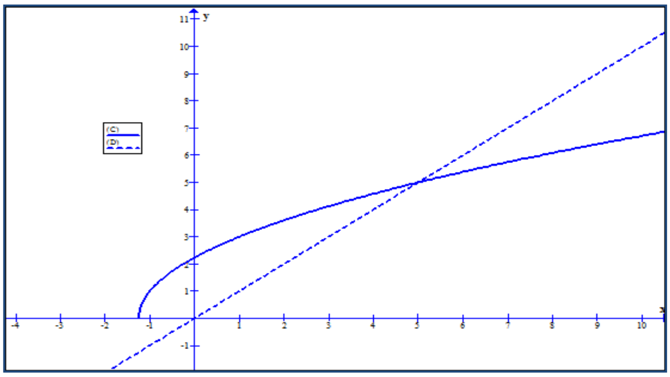
≺احسب S_n ثم بين أن: $P_n = e^{S_n - n - 1}$.

التمرين -18-

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

g الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right[$ بـــــ: $g(x) = \sqrt{4x+5}$ و (C) تمثيلها البياني و (D) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل).



نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على N كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

1.أ.أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2 و v_0, v_1, v_2 (دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء)

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n) و تقاربهما .

2. أ. اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 5$ و $5 \le v_n \le 8$.

ب.أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

ج.استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتين ، ثم استنتج نهاية كل منهما .

3.أ. اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le 5 - u_{n+1} \le \frac{4}{5}(5 - u_n)$ و $0 \le v_{n+1} - 5 \le \frac{4}{5}(v_n - 5)$.

ب. استنتج من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \le 5 - u_n \le 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ و $0 \le v_n - 5 \le 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n}$.

ج.استنتج مرة ثانية نهاية كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

3. هل (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ برر .

التمرين -19-

f الدالة العددية معرفة على $[0;+\infty[$ ب : $f(x) = \frac{2x}{ex+1}$

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة معرفة بـ : $u_0 = \frac{5}{4e}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1. أ.برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \succ \frac{1}{e}$

ب . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{eu_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{eu_n + 1}$

استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبرر تقاربها .

2.(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{eu_n}{eu_n - 1}$

. برهن أن (v_n) هندسية أساسها 2 ؛ معينا حدها الأول ثم اكتب عبارة v_n .

3. أ .تحقق أنه من أجل كل $n\in N$ فإن : $v_n=1+\frac{1}{eu_n-1}$ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ب . احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

التمرين -20-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$.

1. عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+4}$.

ثم برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2<u_n<1$.

2. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أنها متقاربة .

3.لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$.

أ.بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب.أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين -21-

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3u_n-4}{u_n-1}$.

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3-\frac{1}{u_n-1}$.

1) ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 2$.

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=e^{\frac{u_n}{u_n-2}}$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 يطلب تعيين حدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) احسب بدلالة n المجموع s_n: $s_n=\ln\left(e^{-2}\times v_0\right)^{u_0}+\ln\left(e^{-1}\times v_1\right)^{u_1}+......+\ln\left(e^{n-2}\times v_n\right)^{u_n}$.

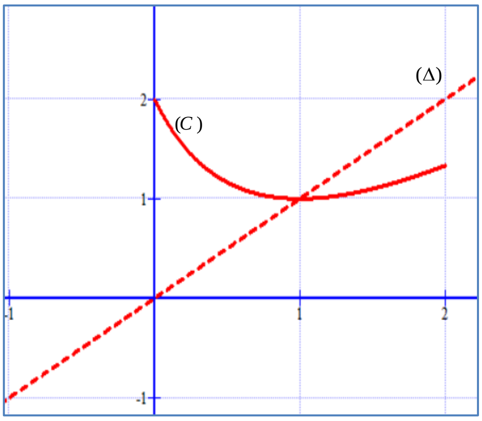
التمرين -22-

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1}$ و ليكن (C) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.(انظر الشكل)

نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ) انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) مبرزا خطوط الانشاء .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .



2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \prec u_n \leq 2$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و استنتج تقاربها.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-1=\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n+1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \prec \dfrac{u_n-1}{u_n+1} \leq \dfrac{1}{3}$ ثم استنتج أن $0 \prec u_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{3}(u_n-1)$.

جـ) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي: $0 \prec u_n-1 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين -23-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}$.

2.برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 5$.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .

4.لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=\dfrac{u_n-\alpha}{u_n+1}$.حيث $\alpha \in \Re-\{3;-1\}$.

أ.عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية ، ثم عين أساسها و حدها الأول .

ب.أكتب v_n ثم استنتج u_n بدلالة n.احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج.أحسب المجموع S_n بدلالة n: $S_n=\dfrac{1}{u_0+1}+\dfrac{1}{u_1+1}+.....+\dfrac{1}{u_n+1}$

حلـــــــول التماريـــــن

حل التمرين -1-

1.عبارة الحد العام:

$u_n = u_0 + nr = 2 - 3n = -3n + 2$

2.حساب u_{10} و u_{20} :

$u_{10} = -3(10) + 2 = -28$ $\qquad$ $u_{20} = -3(20) + 2 = -58$

3.اتجاه تغير المتتالية:

بما أن $r = -3 \prec 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4.حساب نهاية المتتالية:

$\lim u_n = \lim(-3n+2) = -\infty$ و بالتالي فالمتتالية (u_n) ليست متقاربة ((u_n) متباعدة).

5.حساب المجموع Sn :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(2 - 3n + 2) = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$$

6.حساب المجموع S :

$$S = u_{10} + u_{11} + u_{12} + ... + u_{20} = \frac{20-10+1}{2}(u_{10} + u_{20}) = \frac{11(-28-58)}{2} = -473$$

حل التمرين -2-

1. البرهان أن *(Un)* متتالية حسابية :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}(n+1) - 1 - \left(\frac{2}{3}n - 1\right) = \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} - 1 - \frac{2}{3}n + 1 = \frac{2}{3}$$

إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $u_0 = \frac{2}{3}(0) - 1 = -1$

2.تبيين أن 39 حد من حدود المتتالية :

$u_n = 39$ تعني $\frac{2}{3}n - 1 = 39$ و منه $n = 40 \times \frac{3}{2} = 60 \in N$.إذن 39 حد من حدود المتتالية (u_n).

3.حساب المجموع Sn :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}\left(-1 + \frac{2}{3}n - 1\right)$$
$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2}{3}n - 2\right) = \frac{(n+1)(n-3)}{3}$$

4.عين قيمة n حتى يكون Sn=0:

$S_n = 0$ تعني $\frac{(n+1)(n-3)}{3} = 0$ و منه $(n+1)(n-3) = 0$ للمعادلة حلان هما 1- و 3 (1- مرفوض) . إذن $n = 3$.

حل التمرين -3-

1حساب U1 :

$$\begin{cases} u_0 + 2u_1 + u_2 = 12......(1) \\ u_1 + u_2 = 5.......... ....(2) \end{cases}$$

العدد u_1 الوسط الحسابي للعددين u_0 و u_2 ومنه $u_0 + u_2 = 2u_1$.

المعادلة (1) تعني $2u_1 + 2u_1 = 12$ و منه $4u_1 = 12$ إذن $u_1 = 3$.

حساب U0 وU2 و r :

نعوض قيمة u_1 في المعادلة (2) نجد $3 + u_2 = 5$ إذن $u_2 = 2$

نعوض قيمة u_1 و u_2 في المعادلة (1) نجد $u_0 + 2(3) + 2 = 12$ إذن $u_0 = 4$.

$u_2 - u_1 = u_1 - u_0 = -1$ إذن $r = -1$

2. عبارة الحد العام:

$$u_n = u_0 + nr = 4 - n$$

حل التمرين -4-

1.عبارة الحد العام:

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3^n$$

2.حساب v_1 و v_2 :

$$v_1 = 2 \times 3^1 = 6 \qquad v_2 = 2 \times 3^2 = 18$$

3.اتجاه تغير المتتالية:

بما أن $q = 3 \succ 1$ و $v_0 = 2 \succ 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة.

4.حساب نهاية المتتالية:

بما أن $q \succ 1$ و $v_0 \succ 0$ فإن $\lim v_n = +\infty$ و بالتالي فالمتتالية (v_n) ليست متقاربة ((v_n) متباعدة).

5.حساب المجموع Sn :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = \frac{v_0}{1-q}\left(1 - q^{n+1}\right) = \frac{2}{1-3}\left(1 - 3^{n+1}\right) = -1(1 - 3^{n+1}) = 3^{n+1} - 1$$

حل التمرين -5-

1. البرهان أن (Vn) متتالية هندسية :

$$v_{n+1}=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}\times3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=3\left(\frac{1}{2}\right)^0=3$

2. حساب نهاية المتتالية (Vn):

بما أن $0\prec q\prec1$ فإن $\lim v_n=0$ و بالتالي فالمتتالية (v_n) متقاربة نحو 0 .

3. تبين أن 3/256 حد من حدود المتتالية (Vn):

$v_n=\frac{3}{256}$ تعني $3\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{3}{256}$ و منه $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{256}$ و منه $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^8$ و منه $n=8\in N$. إذن $\frac{3}{256}$ حد من حدود المتتالية (v_n).

في هذا السؤال قمنا بحل المعادلة $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{256}$ ومنه $\left(\frac{1}{2}\right)^8=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ إذن $n=8$.

4. عين قيم n التي من أجلها يكون $v_n\geq\frac{3}{8}$:

$v_n\geq\frac{3}{8}$ تعني $3\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq\frac{3}{8}$ و منه $\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq\frac{1}{8}$ و منه $\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq\ln\frac{1}{8}$ و منه $-n\ln2\geq-\ln8$ ومنه $n\leq\frac{-\ln8}{-\ln2}$ إذن $n\leq3$. قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $v_n\geq\frac{3}{8}$ هي : 3،2،1،0.

حل التمرين -6-

1. حساب U2 :

لدينا $u_1\times u_2\times u_3=216$ حسب الوسط الهندسي $\left(u_2{}^2=u_1\times u_3\right)$: $u_2{}^2\times u_2=216$ و منه $u_2{}^3=216$ و منه $u_2{}^3=6^3$ ومنه $u_2=6$.

حساب q:

نعوض قيمة u_2 في المعادلة (1) نجد : $u_1+u_3=20$ و لدينا $u_3=q\times u_2$ و $u_1=\frac{u_2}{q}$ ومنه المعادلة $u_1+u_3=20$ تعني $\frac{u_2}{q}+q\times u_2=20$ ومنه $\frac{u_2}{q}+q\times u_2=20$ ومنه $\frac{6}{q}+6q=20$ ومنه $\frac{6+6q^2}{q}=20$ ومنه $6+6q^2-20q=0$ ومنه $3q^2-10q+3=0$ المعادلة تقبل حلان هما 3 و $\frac{1}{3}$ ، لكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما و منه $q=3$.

استنتاج U1:

$$u_1=\frac{u_2}{q}=\frac{6}{3}=2$$

2. عبارة الحد العام:

$$u_n=u_1\times q^{n-1}=2\times3^{n-1}$$

3. حساب المجموع Sn :

$$S_n=u_1+u_2+......+u_n=\frac{u_1}{q-1}\left(q^n-1\right)=\frac{2}{3-1}\left(3^{n+1}-1\right)=3^{n+1}-1$$

حل التمرين -7-

1. أ.حساب: u_1 و u_2 :

$$\bullet u_1=\frac{2}{3}u_0-2=\frac{2}{3}\times 2-2=\frac{-2}{3} \quad \bullet u_2=\frac{2}{3}u_1-2=\frac{2}{3}\times\frac{-2}{3}-2=-\frac{22}{9}$$

ب.البرهان بالتراجع أن Un>-6:

لتكن هذه الخاصية : $p(n)$

- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$. لدينا $u_0=2\succ -6$ محققة .
- نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $u_n\prec -6$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}\succ -6$.

لدينا فرضا $u_n\succ -6$ ومنه $\frac{2}{3}u_n\succ -4$ ومنه $\frac{2}{3}u_n-2\succ -6$ أي $u_{n+1}\succ -6$

حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي ، $u_n\succ -6$.

ج.اتجاه تغير المتتالية(Un) :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n-2-u_n=\left(\frac{2}{3}-1\right)u_n-2=-\frac{1}{3}u_n-2$$

مما سبق،من أجل كل عدد طبيعي ، $u_n\succ -6$ و منه $-\frac{1}{3}u_n\prec 2$ و منه $-\frac{1}{3}u_n-2\prec 0$ أي

$u_{n+1}-u_n\prec 0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

د.استنتاج أن المتتالية(Un)متقاربة :

مما سبق،من أجل كل عدد طبيعي $u_n\succ -6$ ، معناه أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -6 .

و بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما إذن هي متقاربة .

استنتاج النهاية :

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد l حيث $\lim u_n=\lim u_{n+1}=l$.

و منه $l=\frac{2}{3}l-2$ و منه $l-\frac{2}{3}l=-2$ و منه $\frac{1}{3}l=-2$ و منه $l=-6$ إذن $\lim u_n=-6$.

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n+6$.

أ.البرهان أن (Vn) متتالية هندسية :

$$v_{n+1}=u_{n+1}+6=\frac{2}{3}u_n-2+6=\frac{2}{3}u_n+4=\frac{2}{3}(u_n+6)=\frac{2}{3}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0=u_0+6=2+6=8$

ب.عبارة Vn بدلالة n :

$$v_n=v_0\times q^n=8\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2^{n+3}}{3^n}$$

استنتاج Un بدلالة n :

لدينا: $v_n = u_n + 6$ ومنه $u_n = v_n - 6 = 8\times\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6$.

التحقق من السؤال 1-د:

$$\lim u_n = \lim\left(8\times\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6\right) = -6$$ لأن $$\left(\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0\right)$$

ج.حساب المجموع Sn :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n = (v_0 - 6) + (v_1 - 6) + (v_2 - 6) + \dots\dots + (v_n - 6)$$
$$= (v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n) - \underbrace{(6 + 6 + 6 + \dots\dots + 6)}_{n+1} = \frac{8}{1-\frac{2}{3}}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - 6(n+1) = 24\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - 6(n+1)$$

حل التمرين -8-

1.تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية ثابتة :

المتتالية (u_n) ثابتة معناه : $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ أي $\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}$ أي $u_0 = \frac{1}{4}u_0 + \frac{3}{4}$ ومنه $\alpha - \frac{1}{4}\alpha = \frac{3}{4}$ ومنه $\frac{3}{4}\alpha = \frac{3}{4}$ ومنه $\alpha = 1$.

حساب المجموع في هذه الحالة:

المتتالية (u_n) ثابتة و بالتالي: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n = (n+1)\times u_0 = n+1$

2.نضع $\alpha = 2$ أي $u_0 = 2$:

أ.إثبات أن (Vn) هندسية و تعيين أساسها و حدها الأول:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\underbrace{(u_n - 1)}_{v_n} = \frac{1}{4}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$.

ب.عبارة Vn بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 1\times\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

استنتاج Un بدلالة n :

لدينا: $v_n = u_n - 1$ ومنه $u_n = v_n + 1$ إذن $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$

ج.اتجاه تغير المتتالية(Un):

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 1 - \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n\times\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \prec 0$$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

د.حساب المجموع Sn :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ...+ u_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + (v_2 + 1) + ...+ (v_n + 1)$$

$$= (v_0 + v_1 + v_2 + ...+ v_n) + \underbrace{1+1+1+......+1}_{n+1} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + (n+1) = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + n + 1$$

حل التمرين -9-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

1.أ.البرهان أن $Un>1$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$: لدينا $u_0 = 13 \succ 1$ محققة .
- نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $u_n \succ 1$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} \succ 1$.

لدينا $u_n \succ 1$ ومنه $\frac{1}{5}u_n \succ \frac{1}{5}$ ومنه $\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \succ 1$ أي $u_{n+1} \succ 1$.

حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \succ 1$.

ب.اتجاه التغير :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5}$$

من السؤال السابق : $u_n \succ 1$ ومنه $-\frac{4}{5}u_n \prec -\frac{4}{5}$ ومنه $-\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} \prec 0$ اي $u_{n+1} - u_n \prec 0$

اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

استنتاج تقاربها :

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـــالعدد 1 فهي متقاربة .

3.إثبات أن (Vn) متتالية حسابية :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}(u_n - 1)\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n - 1) = v_n - \ln 5$$

اذن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -\ln(5)$ و حدها الأول : $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(13 - 1) = \ln(12)$

ب.عبارة Vn:

$$v_n = v_0 + nr = -n\ln(5) + \ln(12) = \ln(12) - \ln(5^n) = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$$

استنتاج أن : $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$:

لدينا $v_n = \ln(u_n - 1)$ و منه $e^{v_n} = e^{\ln(u_n - 1)}$ و منه $e^{\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)} = u_n - 1$ إذن $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

حساب النهاية :

$\lim u_n = \lim(1 + \frac{12}{5^n}) = 1$ لأن : $\left[\lim(\frac{12}{5^n}) = 0\right]$

ج.تبيين أن $(u_0-1)(u_1-1)(u_2-1)\times....\times(u_n-1)=\left(\dfrac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$:

لدينا : $u_n=1+\dfrac{12}{5^n}$ و منه :

$$(u_0-1)(u_1-1)(u_2-1)\times....\times(u_n-1)=\left(1+\frac{12}{5^0}-1\right)\left(1+\frac{12}{5^1}-1\right)\left(1+\frac{12}{5^2}-1\right)\times....\times\left(1+\frac{12}{5^n}-1\right)$$

$$=\left(\frac{12}{5^0}\right)\left(\frac{12}{5^1}\right)\left(\frac{12}{5^2}\right)\times....\times\left(\frac{12}{5^n}\right)=12^{n+1}\times\left(\frac{1}{5^0\times5^1\times...\times5^n}\right)=12^{n+1}\times\frac{1}{5^{0+1+....+n}}=12^{n+1}\times\frac{1}{5^{\frac{n}{2}\times(n+1)}}=\times\frac{12^{n+1}}{\left(5^{\frac{n}{2}}\right)^{n+1}}=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$$

حل التمرين -10-

1. حساب: u_1 و u_2 :

$\bullet u_2=2u_1+(2)+1=2(4)+(2)+1=11$ $\bullet u_1=2u_0+(1)+1=2(1)+(1)+1=4$

2.تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (Vn)هندسية :

المتتالية (v_n) هندسية معناه $v_{n+1}=q\times v_n$ حيث q هو أساس المتتالية (v_n).

$v_{n+1}=u_{n+1}+n+1+\alpha=2u_n+n+1+n+1+\alpha=2u_n+2n+2+\alpha=2\left(u_n+n+1+\dfrac{\alpha}{2}\right)$ المتتالية (v_n) هندسية تعني $u_n+n+1+\dfrac{\alpha}{2}=v_n$

أي $u_n+n+1+\dfrac{\alpha}{2}=u_n+n+\alpha$ و منه $1+\dfrac{\alpha}{2}=\alpha$ و منه $\alpha=2$.

3. $\alpha=2$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=u_n+n+2$.

أ.تعيين أساس المتتالية و حدها الأول:

لدينا مما سبق $v_{n+1}=2\times v_n$ من أجل $\alpha=2$. إذن أساس المتتالية (v_n) هو $q=2$

كما و حدها الأول : $v_0=u_0+0+2=1+2=3$.

ب.عبارة Vn بدلالة n :

$$v_n=v_0\times q^n=3\times2^n$$

استنتاج Un بدلالة n :

لدينا: $v_n=u_n+n+2$ ومنه $u_n=v_n-n-2$ إذن $u_n=3\times2^n-n-2$

ج.حساب المجاميع و الجداء:

$$\bullet\ S_1=v_0+v_1+...+v_n=\frac{v_0}{q-1}\left(q^{n+1}-1\right)=\frac{3}{2-1}\left(2^{n+1}-1\right)=3\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$\bullet S_2=v_0{}^2+v_1{}^2+...+v_n{}^2=\left(3\times2^0\right)^2+\left(3\times2^1\right)^2+...+\left(3\times2^n\right)^2=$$

$$3^2\times\left(2^2\right)^0+3^2\times\left(2^2\right)^1+...+3^2\times\left(2^2\right)^n=9\times4^0+9\times4^1+...+9\times4^n$$

S_2 هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها 4 و حدها الأول 9 إذن: $\bullet S_2=\dfrac{9}{4-1}\left(4^{n+1}-1\right)=3\left(4^{n+1}-1\right)$

$$\bullet P = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n = \left(3\times 2^0\right)\times\left(3\times 2^1\right)\times\left(3\times 2^2\right)\times\ldots\times\left(3\times 2^n\right)$$

$$= \underbrace{3\times 3\times \ldots \times 3}_{n+1} \times 2^0\times 2^1\times 2^2\times\ldots\times 2^n = 3^{n+1}\times 2^{1+2+\ldots+n} = 3^{n+1}\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\bullet S_3 = \frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\ldots\ldots+\frac{1}{v_n} = \frac{1}{3\times 2^0}+\frac{1}{3\times 2^1}+\ldots\ldots+\frac{1}{3\times 2^n} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+\ldots\ldots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

S_3 هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $\frac{1}{3}$ إذن: $\bullet S_3 = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$$\bullet S_4 = u_0+u_1+\ldots+u_n = \left(v_0-0-2\right)+\left(v_1-1-2\right)+\ldots+\left(v_2-2-2\right) = \underbrace{\left(v_0+v_1+\ldots+v_n\right)}_{S1}-\left(0+1+\ldots+n\right)-\underbrace{\left(2+2+\ldots+2\right)}_{n+1} = S_1-\frac{n(n+1)}{2}-2(n+1)$$

حل التمرين -11-

1.حساب u_2 و u_3 :

$\bullet u_3 = 3u_2-2u_1 = 3\times 10-2\times 4 = 22$ $\qquad$ $\bullet u_2 = 3u_1-2u_0 = 3\times 4-2\times 1 = 10$

2.لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_{n+1}-u_n$

أ.إثبات أن (Vn) هندسية و تعيين أساسها و حدها الأول:

$$v_{n+1} = u_{n+2}-u_{n+1} = 3u_{n+1}-2u_n-u_{n+1} = 2u_{n+1}-2u_n = 2(u_{n+1}-u_n) = 2v_n$$

اذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول : $v_0 = u_1-u_0 = 4-1 = 3$

ب.حساب المجموع Sn بدلالة n:

$$\bullet S_n = v_0+v_1+\ldots+v_{n-1} = \frac{v_0}{q-1}\left(q^{n-1-0+1}-1\right) = \frac{3}{2-1}\left(2^n-1\right) = 3\times 2^n-3$$

ج.حساب المجموع Sn بدلالة Un:

لدينا $v_n = u_{n+1}-u_n$ ومنه :

$$\bullet S_n = v_0+v_1+\ldots+v_{n-1} = \left(u_1-u_0\right)+\left(u_2-u_1\right)+\left(u_3-u_2\right)+\ldots+\left(u_n-u_{n-1}\right) = u_n-u_0 = u_n-1$$

دعبارة Un بدلالة Sn :

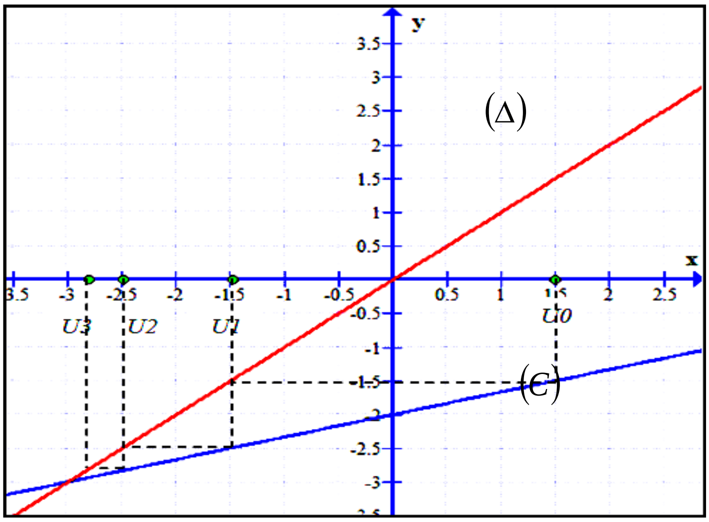
لدينا $S_n = u_n-1$ ومنه : $u_n = S_n+1$.

استنتاج عبارة Un بدلالة n :

لدينا $S_n = u_n-1$ و من جهة أخرى $S_n = 2^n-1$ ومنه $u_n-1 = 3\times 2^n-3$ إذن $u_n = 3\times 2^n-2$

حل التمرين -12-

1.أ.ب. رسم (C) و (Δ) و تمثيل الحدود :



ج. تخمين حول اتجاه تغير المتتالية(Un)و تقاربها:

المتتالية (u_n)متناقصة و متقاربة نحو 3- .(3- هي فاصلة نقطة تقاطع(Δ) و (C)).

2.أ. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $u_n \ge -3$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$: لدينا $u_0 = \frac{3}{2} \ge -3$محققة .
- نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $u_n \ge -3$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} \ge -3$.

لدينا $u_n \ge -3$ومنه $\frac{1}{3}u_n \ge -1$ ومنه: -3 U0 $\frac{1}{3}u_n$ أي: $u_{n+1} \ge -3$

حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \ge -3$

ب. التحقق أن *(Un)*متناقصة :

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - 2 - u_n = -\frac{2}{3}u_n - 2$ و بما أن $u_n \ge -3$ فإن : $-\frac{2}{3}u_n \le 2$ فإن : $-\frac{2}{3}u_n - 2 \le 0$ أي : $u_{n+1} - u_n \le 0$ إذن :

المتتالية (u_n)متناقصة.

ج.التقارب :

بما أن المتتالية(u_n)متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3.نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 3$

أ.إثبات أن *(Vn)* هندسية و تعيين أساسها و حدها الأول:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$$

اذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول : $v_0 = u_0 + 3 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$

ب.عبارة *Un* بدلالة *n* :

لدينا: $v_n = u_n + 3$ و منه: $u_n = v_n - 3$ و منه: $u_n = v_0 \times q^n - 3$ و منه: $u_n = \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

استنتاج نهاية (*Un*):

بما أن : $0 \prec q = \frac{1}{3} \prec 1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ومنه : $\lim_{n\to+\infty}\frac{9}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 = -3$

حل التمرين -13-

1.تبيين انه من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n+2}$:

$$2 - \frac{3}{u_n+2} = \frac{2u_n+4-3}{u_n+2} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} = u_{n+1}$$

2.البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $-1 \le u_n \le 1$:

- لدينا $-1 \le u_0 = \frac{1}{2} \le 1$ محققة .
- نفرض أن $-1 \le u_n \le 1$ و نبرهن أن $-1 \le u_{n+1} \le 1$.

لدينا فرضا $-1 \le u_n \le 1$ و منه $1 \le u_n+2 \le 3$ و منه $\frac{1}{3} \le \frac{1}{u_n+2} \le 1$ و منه $-3 \le \frac{-3}{u_n+2} \le -1$ و منه $-1 \le 2 - \frac{3}{u_n+2} \le 1$ أي $-1 \le u_{n+1} \le 1$

. إذن حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل عدد طبيعي n فإن $-1 \le u_n \le 1$.

3.دراسة اتجاه تغير المتتالية (Un) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2} - u_n = \frac{2u_n+1-u_n^2-2u_n}{u_n+4} = \frac{-u_n^2+1}{u_n+4} = -\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+4}$$

لما $-1 \le u_n \le 1$ يكون $1+u_n \ge 0$ و $1-u_n \ge 0$ و $u_n+2 \succ 0$ إذن $u_{n+1}-u_n \ge 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

استنتاج أن المتتالية (Un) متقاربة :

بما أن المتتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة .

4.لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n+1}{1-u_n}$.

أ.تبيين أن المتتالية (Vn) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+1}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2}+1}{1-\frac{2u_n+1}{u_n+2}} = \frac{\frac{2u_n+1+u_n+2}{u_n+2}}{\frac{u_n+2-2u_n-1}{u_n+2}} = \frac{3u_n+3}{1-u_n} = 3\left(\frac{u_n+1}{1-u_n}\right) = 3v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0+1}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$

ب.كتابة (Vn) بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 3\times 3^n = 3^{n+1}$$

استنتاج (Un) بدلالة n :

لدينا $v_n = \frac{u_n+1}{1-u_n}$ أي أن $v_n - u_nv_n = u_n+1$ و منه $u_n + u_nv_n = v_n - 1$ ومنه $u_n(1+v_n) = v_n - 1$ ومنه $u_n = \frac{v_n-1}{1+v_n}$ إذن :

$u_n = \frac{3^{n+1}-1}{1+3^{n+1}}$.

حساب النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}-1}{1+3^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{3^{n+1}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+1\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\overbrace{\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}^{0}}{\underbrace{\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}_{0}+1}=1$$

ج.حساب المجموع :

$$S_n=\frac{2}{v_1}+\frac{2}{v_2}+.....+\frac{2}{v_n}=2\times\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+.....+\frac{1}{v_n}\right)=2\times\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

$$=2\times\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+.....+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\frac{1}{3}}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)-2+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

حل التمرين -14-

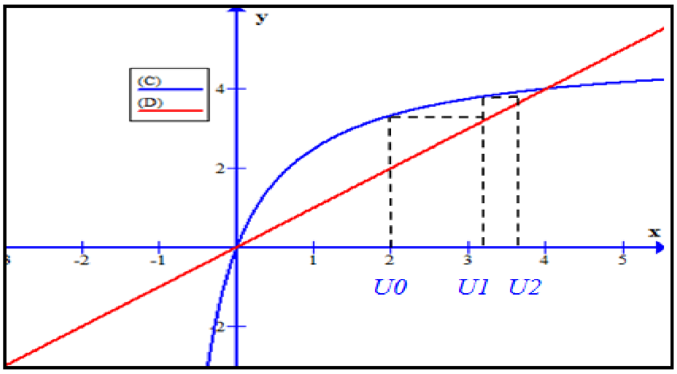
1.أ.دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;4]$ و لدينا ، $f'(x)=\frac{5(x+1)-5x}{(x+1)^2}=\frac{5}{(x+1)^2}\succ 0$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$.

ب.أنشاء (C) و (D):

في المجال $[0;4]$ يكون (C) يقع فوق (D) .



ج.تبيين أنه إذا كان $x\in[0;4]$ فإن $f(x)\in[0;4]$:

لدينا $f(0)=0$ و $f(4)=4$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ فأنه لما $x\in[0;4]$ فإن $f(x)\in[f(0);f(4)]$ أي $f(x)\in[0;4]$.

2.أ.التمثيل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية:

ب.تخمين حول اتجاه تغير المتتالية و تقاربها :

يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 4 .

ج.البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي، $0\le u_n\le 4$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$: لدينا $0 \le u_0 = 2 \le 4$ محققة .
- نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $0 \le u_n \le 4$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le 4$.

لدينا لما $x \in [0;4]$ فإن $f(x) \in [0;4]$ و منه لما $0 \le u_n \le 4$ فإن $0 \le f(u_n) \le 4$ أي $0 \le u_{n+1} \le 4$. أذن حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل عدد طبيعي n فإن $0 \le u_n \le 4$.

د.دراسة اتجاه تغير المتتالية(Un):

لدينا في المجال $[0;4]$ يكون (C) يقع فوق (D) معناه لما $x \in [0;4]$ فإن $f(x) - x \le 0$

و منه لما $0 \le u_n \le 4$ فإن $f(u_n) - u_n \le 0$ فإن $u_{n+1} - u_n \le 0$. اذن المتتالية (u_n) متزايدة.

هـ.استنتج تقارب المتتالية:

بما أن (u_n) متزايدة ومحـدودة من الاعلى بـ 4 فهي متقاربة.

حساب النهاية:

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ إذن $f(l) = l$ ومنه $l = \frac{5l}{l+1}$ ومنه $l^2 - 4l = 0$ هذه المعادلة تقبل حلان هما 0 و 4 و بما أن المتتالية متزايدة فإن $l = 4$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

حل التمرين -15-

1.أ.البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي Un>-2 :

- لدينا $u_0 = 1 \succ -2$ محققة .
- نفرض أن $u_n \succ -2$ و نبرهن أن $u_{n+1} \succ -2$.

لدينا فرضا $u_n \succ -2$ و منه $u_n + 5 \succ 3$ و منه $\frac{1}{u_n+5} \prec \frac{1}{3}$ و منه $\frac{-9}{u_n+5} \succ -3$ و منه $1 - \frac{9}{u_n+5} \succ -2$ أي $u_{n+1} \succ -2$.

إذن حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل عدد طبيعي n ، $u_n \succ -2$.

ب.إثبات المتتالية(*Un*)متناقصة تماما :

$$u_{n+1} - u_n == 1 - \frac{9}{u_n+5} - u_n = \frac{u_n - 4}{u_n+5} - u_n = \frac{u_n - 4 - u_n^2 - 5u_n}{u_n+5} = \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n+5} = \frac{-(u_n+2)^2}{u_n+5}$$

لما $-1 \le u_n \le 1$ يكون $u_n + 5 \succ 0$ و $-(u_n+2)^2 \prec 0$ إذن $u_{n+1} - u_n \prec 0$.

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

استنتاج أن المتتالية(*Un*) متقاربة :

بما أن المتتالية متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد 2- فهي متقاربة .

2.لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{1}{u_n+2}$.

أ-تبيين أن المتتالية (Vn) حسابية أساسها 1/3 و تعيين حدها الأول:

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+2}=\frac{1}{1-\frac{9}{u_n+5}+2}=\frac{1}{3-\frac{9}{u_n+5}}=\frac{1}{\frac{3u_n+6}{u_n+5}}=\frac{u_n+5}{3u_n+6}=\frac{1}{3}\times\frac{u_n+5}{u_n+2}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{u_n+2+3}{u_n+2}=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{3}{u_n+2}\right)=\frac{1}{u_n+2}+\frac{1}{3}=v_n+\frac{1}{3}$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول: $v_0=\frac{1}{u_0+2}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$

3. كتابة (Vn) بدلالة n :

$$v_n=v_0+nr=\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}$$

استنتاج (Un) بدلالة n :

لدينا $v_n=\frac{1}{u_n+2}$ أي أن $u_nv_n+2v_n=1$ ومنه $u_n=\frac{1-2v_n}{v_n}$ و منه : $u_n=\frac{1}{v_n}-2$ إذن: $u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}}-2=\frac{3}{n+1}-2$

حساب النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n+1}-2\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{3}{n}\right)}_{0}-2\right)=-2$$

4. المجموع :

$$u_nv_n=u_n\times\frac{1}{u_n+2}=\frac{u_n}{u_n+2}=\frac{\frac{3}{n+1}-2}{\frac{3}{n+1}-2+2}=\frac{\frac{3}{n+1}-2}{\frac{3}{n+1}}=\frac{\frac{3-2n-2}{n+1}}{\frac{3}{n+1}}=\frac{1-2n}{3}=\frac{-2}{3}n+\frac{1}{3}$$

ومنه فإن المجموع $(u_0v_0+u_1v_1+u_2v_2+....+u_nv_n)$ هو مجموع $n+1$ حدا متعاقبة من متتالية حسابية أساسها $\frac{-2}{3}$ و حدها الأول $\frac{1}{3}$.

$$u_0v_0+u_1v_1+u_2v_2+....+u_nv_n=\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}\right)=\frac{n+1}{2}\left(\frac{2-2n}{3}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{1-n}{3}\right)=\frac{1}{3}(1+n)(1-n)=\frac{1}{3}(1-n^2)$$

حل التمرين -16-

1. حساب u_2 ، u_3 :

- $u_2=2\sqrt{\frac{u_1}{e}}=2\sqrt{\frac{e^3}{e}}=2e$
- $u_3=2\sqrt{\frac{u_2}{e}}=2\sqrt{\frac{2e}{e}}=2\sqrt{2}$

2. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n>\frac{4}{e}$:

نسمي $p(n)$ هذهالخاصية .

- نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=1$ لدينا: $u_1=e^3\succ\frac{4}{e}$ محققة.
- نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_n>\frac{4}{e}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}>\frac{4}{e}$.

لدينا : $u_n > \frac{4}{e}$ ومنه $\frac{u_n}{e} > \frac{4}{e^2}$ ومنه $\sqrt{\frac{u_n}{e}} > \sqrt{\frac{4}{e^2}}$ أي $\sqrt{\frac{u_n}{e}} > \frac{2}{e}$ ومنه $2\sqrt{\frac{u_n}{e}} > \frac{4}{e}$ ومنه $u_{n+1} > \frac{4}{e}$. إذن $u_n > \frac{4}{e}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

3.تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$:

من أجل كل n غير معدوم لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\sqrt{\frac{u_n}{e}}}{u_n} = \frac{\frac{2}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{\frac{2}{\sqrt{e}}}{\sqrt{u_n}}$

لدينا : $u_n > \frac{4}{e}$ ومنه : $\sqrt{u_n} > \frac{2}{\sqrt{e}}$ ومنه : $\frac{1}{\sqrt{u_n}} \prec \frac{\sqrt{e}}{2}$ ومنه : $\frac{2}{\sqrt{e}} \times \frac{\sqrt{e}}{2} \prec \frac{\frac{2}{\sqrt{e}}}{\sqrt{u_n}}$ أي : $\frac{\frac{2}{\sqrt{e}}}{\sqrt{u_n}} \prec 1$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية:

لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ و $u_n \succ 0$ ومنه $u_{n+1} < u_n$ ومنه $u_{n+1} - u_n \prec 0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

4.استنتاج التقارب :

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{4}{e}$ فهي متقاربة.

حساب النهاية:

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$

إذن $f(l) = l$ ومنه $l = 2\sqrt{\frac{l}{e}}$ ومنه $l^2 = 4\frac{l}{e}$ ومنه $l = \frac{4}{e}$ $(l \in [1;+\infty[)$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{e}$.

5.نضع من أجل كل $n \in N^*$ **:** $v_n = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n$

أ-البرهان على أن (Vn) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_{n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(2\sqrt{\frac{u_n}{e}}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{u_n}{e}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4}\ln(u_n) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4}\ln(u_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(u_n)\right) = \frac{1}{4}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_1 = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_1 = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln e^3 = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{3}{2} = 2 - \ln 2$

ب.كتابة عبارة (Vn) بدلالة n :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = (2 - \ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

استنتاج عبارة (Un) بدلالة n:

من أجل كل $n \in N^*$: $v_n = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n$ و منه $v_n - \frac{1}{2} + \ln 2 = \frac{1}{2}\ln u_n$ و منه $2v_n - 1 + 2\ln 2 = \ln u_n$ و منه:

$u_n = e^{2v_n - 1 + 2\ln 2}$ و منه: $u_n = e^{-1} \times e^{2\ln 2} \times e^{2v_n}$ و منه $u_n = \frac{1}{e} \times e^{\ln 4} \times e^{2v_n}$ و منه $u_n = \frac{1}{e} \times 4 \times e^{2v_n}$ ومنه

$$u_n = \frac{4}{e} e^{2v_n}$$

التأكد من النهاية :

لدينا $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ لأن $0 \prec q = \frac{1}{2} \prec 1$ و منه : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{4}{e} \underbrace{e^{2v_n}}_{1} = \frac{4}{e}$

حل التمرين -17-

I) لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = e + \sqrt{u_n - e}$

1.البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي e< Un <e+1 :

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$. لدينا $e \prec u_0 = 3 \prec e+1$ محققة .
- نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $e \prec u_n \prec e+1$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $e \prec u_{n+1} \prec e+1$

لدينا $e \prec u_n \prec e+1$ ومنه $0 \prec u_n - e \prec 1$ ومنه $0 \prec \sqrt{u_n - e} \prec 1$ ومنه $e \prec e + \sqrt{u_n - e} \prec e+1$

أي $e \prec u_{n+1} \prec e+1$. حسب الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $e \prec u_n \prec e+1$

2.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - e)(e+1-u_n)}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e}$:

$$u_{n+1} - u_n = e + \sqrt{u_n - e} - u_n = \frac{(+\sqrt{u_n - e} - (u_n - e))(+\sqrt{u_n - e} + (u_n - e))}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e} = \frac{(u_n - e) - (u_n - e)^2}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e}$$

$$= \frac{(u_n - e) - (u^2_n - 2eu_n + e^2)}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e} = \frac{-u^2_n - (2e+1)u_n - e^2 - e}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e} = \frac{(u_n - e)(e+1-u_n)}{\sqrt{u_n - e} + u_n - e}$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية(Un) :

لدينا $\sqrt{u_n - e} + u_n - e \succ 0$

ولدينا $u_n \succ e$ ومنه $u_n - e \succ 0$

و لدينا $u_n \prec e+1$ ومنه $-u_n \prec -e-1$ ومنه $1 + e - u_n \succ 0$

إذن $u_{n+1} - u_n \succ 0$ ومنه فإن (u_n) متزايدة تماما .

3.استنتاج أن(Un) متقاربة :

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـــ: $e+1$ فهي متقاربة .

حساب نهايتها :

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = l$

إذن $f(l)=l$ ومنه $l=e+\sqrt{l-e}$ ومنه $l-e=\sqrt{l-e}$ ومنه $l^2-2e\times l+e^2=l-e$ ومنه $l^2-(2e+1)\times l+e^2+e=0$ للمعادلة حلان هما $e+1$

و e لكن (u_n) متزايدة و بالتالي $l=e+1$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e+1$.

II) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=e\ln(u_n-e)$.

1.تبيين أن المتتالية (Vn) هندسية أساسها 1/2:

$$v_{n+1}=e\ln(u_{n+1}-e)=e\ln((e+\sqrt{u_n-e})-e)=e\ln(\sqrt{u_n-e})=e\frac{1}{2}\ln(u_n-e)=\frac{1}{2}e\ln(u_n-e)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=e\ln(u_0-e)=e\ln(3-e)$.

2.عبارة Vn بدلالة n:

$$v_n=v_0\times q^n=e\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

تبيين أن $u_n=e\left(1+e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}\right)$ **:**

لدينا $v_n=e\ln(u_n-e)$ ومنه $\frac{v_n}{e}=\ln(u_n-e)$ ومنه $e^{\frac{v_n}{e}}=e^{\ln(u_n-e)}$ ومنه $e^{\frac{v_n}{e}}=u_n-e$ ومنه $u_n=e^{\frac{v_n}{e}}+e$ ومنه $u_n=e(e^{\frac{v_n}{e}-1}+1)$ ومنه

$$u_n=e\left(e^{\frac{e\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{e}-1}+1\right)\quad\text{ومنه:}\quad u_n=e\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}+1\right)$$

حساب النهاية مرة ثانية.

$$\lim e\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}+1\right)=e(e^{-1}+1)=e\left(\frac{e+1}{e}\right)=e+1$$

حساب Sn:

$$S_n=\ln(3-e)+\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)+\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots\dots+\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\ln(3-e)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=\ln(3-e)\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left((\frac{1}{2})^{n+1}-1\right)\right]=\ln(3-e)\left[2\left((\frac{1}{2})^{n+1}-1\right)\right]$$

$$S_n=2\ln(3-e)\times\left((\frac{1}{2})^{n+1}-1\right)$$

تبيين أن $P_n=e^{S_n-n-1}$ **:**

$$P_n=\left(\frac{u_0}{e}-1\right)\times\left(\frac{u_1}{e}-1\right)\times\left(\frac{u_2}{e}-1\right)\times\dots\dots\times\left(\frac{u_n}{e}-1\right)$$

$$=\left(\frac{e\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^0-1}+1\right)}{e}-1\right)\times\left(\frac{e\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)-1}+1\right)}{e}-1\right)\times\dots\dots\dots\dots\times\left(\frac{e\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}+1\right)}{e}-1\right)$$

$$=\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^0-1}+1-1\right)\times\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1-1}+1-1\right)\times\dots\dots\dots\dots\times\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}+1-1\right)$$

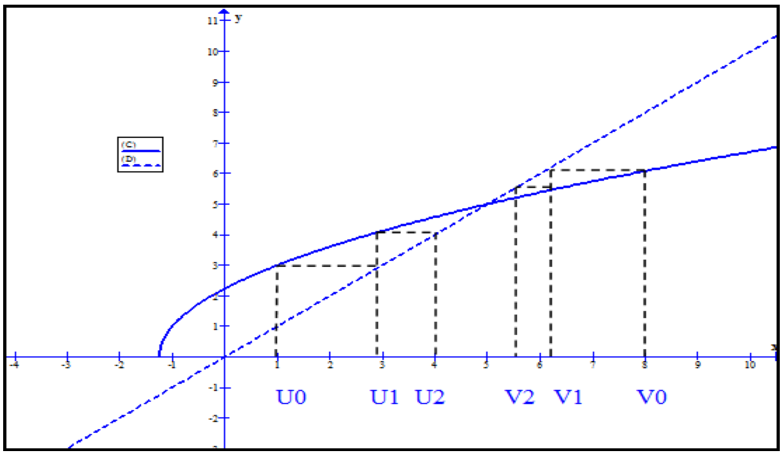
$$=\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^0-1}\right)\times\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1-1}\right)\times\dots\dots\times\left(e^{\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}\right)$$

$$=e^{(\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^0-1)+(\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1-1)+\dots+(\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1)}=e^{(\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^0)+(\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1)+\dots+(\ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n)-1-1-\dots\dots-1}$$

$$P_n=e^{S_n-n-1}$$

حل التمرين -18-

1.أ-تمثيل الحدود على محور الفواصل :



ب.تخمين حول اتجاه تغير كل من (vn) و(Un):

يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 5 و (u_n) متناقصة و متقاربة نحو 5 .

2.أ.إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي، $1\le u_n\le 5$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$. لدينا $1\le u_0=1\le 5$ محققة .
- نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $1\le u_n\le 5$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 5$

لدينا $1\le u_n\le 5$ ومنه $4\le 4u_n\le 20$ ومنه $9\le 4u_n+5\le 25$ ومنه $1\le 3\le \sqrt{4u_n+5}\le 5$

ومنه $1\le\sqrt{4u_n+5}\le 5$ أي $1\le u_{n+1}\le 5$.

حسب الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 5$

إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي، $5 \le v_n \le 8$:

نعتبر $p(n)$ هذه الخاصية .

- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$.لدينا $5 \le u_0 = 8 \le 8$ محققة .
- نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $5 \le v_n \le 8$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $5 \le v_{n+1} \le 8$

لدينا $5 \le v_n \le 8$ ومنه $20 \le 4v_n \le 32$ ومنه $25 \le 4v_n + 5 \le 37$ ومنه $5 \le \sqrt{4v_n + 5} \le \sqrt{37} \le 8$

ومنه $5 \le \sqrt{4v_n + 5} \le 8$ أي $5 \le v_{n+1} \le 8$.

حسب الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $5 \le v_n \le 8$

ب.دراسة اتجاه تغير المتتالية (Un):

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{4u_n + 5} - u_n = \frac{\left(\sqrt{4u_n + 5} - u_n\right)\left(\sqrt{4u_n + 5} + u_n\right)}{\sqrt{4u_n + 5} + u_n} = \frac{4u_n + 5 - u_n{}^2}{\sqrt{4u_n + 5} + u_n} = \frac{4u_n + 5 - u_n{}^2}{\sqrt{4u_n + 5} + u_n} = \frac{(u_n + 1)(5 - u_n)}{\sqrt{4u_n + 5} + u_n}$$

لدينا $1 \le u_n \le 5$ ومنه $2 \le u_n + 1 \le 6$ أي $u_n + 1 \succ 0$ كذلك $-5 \le -u_n \le -1$ ومنه $0 \le 5 - u_n \le 4$ أي $5 - u_n \ge 0$ ومنه

$u_{n+1} - u_n \ge 0$ ، المتتالية (u_n) متزايدة .

دراسة اتجاه تغير المتتالية (Vn):

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{4v_n + 5} - v_n = \frac{\left(\sqrt{4v_n + 5} - v_n\right)\left(\sqrt{4v_n + 5} + v_n\right)}{\sqrt{4v_n + 5} + v_n} = \frac{4v_n + 5 - v_n{}^2}{\sqrt{4v_n + 5} + v_n} = \frac{4v_n + 5 - v_n{}^2}{\sqrt{4v_n + 5} + v_n} = \frac{(v_n + 1)(5 - v_n)}{\sqrt{4v_n + 5} + v_n}$$

لدينا $5 \le v_n \le 8$ ومنه $3 \le v_n + 1 \le 9$ أي $v_n + 1 \succ 0$ كذلك $-8 \le -v_n \le -5$ ومنه $-3 \le 5 - v_n \le 0$ أي $5 - v_n \le 0$ ومنه

$v_{n+1} - v_n \le 0$ ، المتتالية (v_n) متناقصة .

ج.استنتاج أن المتتاليتين (Un) و (Vn) متقاربتين :

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 5 فهي متقاربة .

المتتالية (v_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 5 فهي متقاربة .

استنتاج نهاية كل منهما:

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

إذن $f(l) = l$ ومنه $l = \sqrt{4l + 5}$ ومنه $l^2 = 4l + 5$ ومنه $l^2 - 4l - 5 = 0$ للمعادلة حلان هما -1 و 5 ، لكن $1 \le u_n \le 5$ و بالتالي $l = 5$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

بما أن (v_n) متقاربة فإن $\lim v_{n+1} = v_n = l'$

إذن $f(l') = l'$ ومنه $l' = \sqrt{4l' + 5}$ ومنه $l'^2 = 4l' + 5$ ومنه $l'^2 - 4l' - 5 = 0$ للمعادلة حلان هما -1 و 5 لكن $5 \le v_n \le 8$ و بالتالي $l' = 5$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 5$.

3.أ.إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $0 \le 5 - u_{n+1} \le \frac{4}{5}(5 - u_n)$:

$$5-u_{n+1}=5-\sqrt{4u_n+5}=\frac{\left(5-\sqrt{4u_n+5}\right)\left(5+\sqrt{4u_n+5}\right)}{5+\sqrt{4u_n+5}}=\frac{25-4u_n-5}{5+\sqrt{4u_n+5}}=\frac{20-4u_n}{5+\sqrt{4u_n+5}}=\frac{4}{5+\sqrt{4u_n+5}}(5-u_n)$$

و اضح أن $\frac{4}{5+\sqrt{4u_n+5}}\le\frac{4}{5}$ و منه $\frac{4}{5+\sqrt{4u_n+5}}(5-u_n)\le\frac{4}{5}(5-u_n)$ أي $5-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(5-u_n)$....(1) و لدينا : $u_{n+1}\le 5$ و منه : $-u_{n+1}\ge -5$

و منه : $5-u_{n+1}\ge 0$ ....(2)

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 5-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(5-u_n)$.

إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $0\le v_{n+1}-5\le\frac{4}{5}(v_n-5)$:

$$v_{n+1}-5=\sqrt{4v_n+5}-5=\frac{\left(\sqrt{4v_n+5}-5\right)\left(\sqrt{4v_n+5}+5\right)}{5+\sqrt{4v_n+5}}=\frac{4v_n+5-25}{5+\sqrt{4v_n+5}}=\frac{4v_n-20}{5+\sqrt{4v_n+5}}=\frac{4}{5+\sqrt{4v_n+5}}(v_n-5)$$

و اضح أن $\frac{4}{5+\sqrt{4v_n+5}}\le\frac{4}{5}$ و منه $\frac{4}{5+\sqrt{4v_n+5}}(v_n-5)\le\frac{4}{5}(v_n-5)$ أي $v_{n+1}-5\le\frac{4}{5}(v_n-5)$....(3) و لدينا : $v_{n+1}\ge 5$ و منه :

$v_{n+1}-5\ge 0$ ....(4)

من (3) و (4) نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le v_{n+1}-5\le\frac{4}{5}(v_n-5)$.

ب. استنتاج من اجل كل عدد طبيعي: $0\le 5-u_n\le 5\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 5-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(5-u_n)$ ومنه $0\le 5-u_1\le\frac{4}{5}(5-u_0)$ و $0\le 5-u_2\le\frac{4}{5}(5-u_1)$ و

$0\le 5-u_3\le\frac{4}{5}(5-u_2)$ و........... و $0\le 5-u_n\le\frac{4}{5}(5-u_{n-1})$

بضرب المتراجحات طرفا إلى طرف نجد : $0\le(5-u_1)\times(5-u_2)\times(5-u_3)\times....\times(5-u_n)\le\frac{4}{5}(5-u_0)\times\frac{4}{5}(5-u_1)\times\frac{4}{5}(5-u_2)\times.....\times\frac{4}{5}(5-u_{n-1})$ بعد

الاختزال نجد : $0\le 5-u_n\le\underbrace{\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times.....\times\frac{4}{5}}_{n}\times(5-u_0)$ و منه : $0\le 5-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times 4$

و منه : $0\le 5-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times\frac{4}{5}\times 5$ و منه : $0\le 5-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

استنتاج من اجل كل عدد طبيعي $0\le v_n-5\le 3\times\left(\frac{4}{5}\right)^n$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le v_{n+1}-5\le\frac{4}{5}(v_n-5)$ ومنه $0\le v_1-5\le\frac{4}{5}(v_0-5)$ و $0\le v_2-5\le\frac{4}{5}(v_1-5)$ و $0\le v_3-5\le\frac{4}{5}(v_2-5)$

و........... $0\le v_n-5\le\frac{4}{5}(v_{n-1}-5)$

بضرب المتراجحات طرفا إلى طرف نجد : $0\le (v_1-5)\times(v_2-5)\times(v_3-5)\times....\times(v_n-5)\times\le \frac{4}{5}(v_0-5)\times\frac{4}{5}(5-v_1)\times\frac{4}{5}(5-v_2)\times.....\times\frac{4}{5}(5-v_{n-1})$ بعد الاختزال نجد : $0\le v_n-5\le \underbrace{\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times.....\times\frac{4}{5}}_{n}\times(v_0-5)$ و منه : $0\le v_n-5\le 3\times\left(\frac{4}{5}\right)^n$

هل (Un)و (Vn) متجاورتان:

(u_n) و (v_n)متجاورتان لأن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية.

حل التمرين -19-

1.أ.إثبات أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\succ\frac{1}{e}$

نضع : $p(n)............u_n\succ\frac{1}{e}$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{5}{4e}\succ\frac{1}{e}$ ومنه $p(0)$ صحيحة .

نفرض أن $u_n\succ\frac{1}{e}$ ونبرهن أن $u_{n+1}\succ\frac{1}{e}$

لدينا $u_n\succ\frac{1}{e}$ وبما أن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإن : $f(u_n)\succ f\left(\frac{1}{e}\right)$ ومنه $u_{n+1}\succ\frac{1}{e}$.

نستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $u_n\succ\frac{1}{e}$.

ب ـ إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{eu_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{eu_n+1}-u_n=\frac{2u_n-eu_n{}^2-u_n}{eu_n+1}=\frac{u_n-eu_n{}^2}{eu_n+1}=\frac{eu_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتبرير تقاربها :

لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{eu_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$ومنه إشارة $u_{n+1}-u_n$ من إشارة $\frac{1}{e}-u_n$ وبما أن $u_n\succ\frac{1}{e}$ فإنه ينتج $\frac{1}{e}-u_n\prec 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\prec 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

تبرير التقارب:

بما أن (u_n) محدودة من أسفل ومتناقصة فهي متقاربة .

2.(v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{eu_n}{eu_n-1}$

*** إثبات أن (v_n) هندسية أساسها 2 ؛ تعيين حدها الأول :**

$$v_{n+1}=\frac{eu_{n+1}}{eu_{n+1}-1}=\frac{\frac{2eu_n}{eu_n+1}}{\frac{2eu_n}{eu_n+1}-1}=\frac{2eu_n}{eu_n+1}\times\frac{eu_n+1}{2eu_n-eu_n-1}=\frac{2eu_n}{eu_n-1}=2v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0=\frac{eu_0}{eu_0-1}=\frac{e\left(\frac{5}{4e}\right)}{e\left(\frac{5}{4e}\right)-1}=\frac{5}{4}\times 4=5$

وكتابة عبارة v_n :

$v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=5\times 2^n$

3. أ . التحقق أنه من أجل كل n فإن $v_n=1+\frac{1}{eu_n-1}$:

لدينا : $\frac{eu_n}{eu_n-1}=\frac{eu_n-1+1}{eu_n-1}=1+\frac{1}{eu_n-1}$ ومنه $v_n=1+\frac{1}{eu_n-1}$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$v_n=1+\frac{1}{eu_n-1}$ ومنه $v_n-1=\frac{1}{eu_n-1}$ ومنه $\frac{1}{v_n-1}=eu_n-1$ ومنه $u_n=\frac{1}{e(v_n-1)}+\frac{1}{e}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e(v_n-1)}+\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$$

ب . حساب بدلالة n المجموع S_n:

$S_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ومنه $S_n=5\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ ومنه $S_n=5\left(2^{n+1}-1\right)$

حل التمرين -20-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$.

1.تعيين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+4}$:

$\frac{au_n+4a+b}{u_n+4}=a+\frac{b}{u_n+4}$ بالمطابقة نجد $a=3$ و $b=-10$

من أجل كل عدد طبيعي : $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$

البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2<u_n<1$.

لدينا $u_0=\frac{1}{4}$ و منه $-2<u_0<1$ محققة

نفرض أن $-2<u_n<1$ و لنبرهن أن $-2<u_{n+1}<1$

لدينا $-2<u_n<1$ و منه $2<u_n+4<5$ و منه $\frac{1}{5}<\frac{1}{u_n+4}<\frac{1}{2}$ و منه $-5<-\frac{10}{u_n+4}<-2$ و منه $-2<3-\frac{10}{u_n+4}<1$ أي

$-2<u_{n+1}<1$ ، إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2<u_n<1$

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\frac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$

بما أن $-2<u_n<1$ فإن $u_{n+1}-u_n\succ 0$ اذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

استنتاج أن (u_n) متقاربة :

بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$.

تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول :

لدينا
$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2}{1-\frac{3u_n+2}{u_n+4}}=\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4-3u_n-2}=\frac{5u_n+10}{-2u_n+2}=\frac{5}{2}\left(\frac{u_n+2}{1-u_n}\right)=\frac{5}{2}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0+2}{1-u_0}=\frac{\frac{1}{4}+2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{9}{3}=3$

كتابة v_n و u_n بدلالة n :

$$v_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

لدينا $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$ أي ان $v_n-u_nv_n=u_n+2$ و منه $u_n+u_nv_n=v_n-2$ أي ان $u_n(1+v_n)=v_n-2$ و منه

$$u_n=\frac{v_n-2}{1+v_n}=\frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\left(\frac{5}{2}\right)^n}.$$

حساب النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\left(\frac{5}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}=1$$

حل التمرين -21-

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-4}{u_n-1}$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3-\dfrac{1}{u_n-1}$.

$$3-\frac{1}{u_n-1}=\frac{3(u_n-1)-1}{u_n-1}=\frac{3u_n-4}{u_n-1}=u_{n+1}$$

1) ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \succ -2$.

$n=0$: $u_0=3\succ 2$.

1) $u_n\succ 2$ و منه $u_n\succ 2$ و منه $u_n-1\succ 1$ و منه $\dfrac{1}{u_n-1}\prec 1$ و منه $\dfrac{-1}{u_n-1}\succ -1$ و منه $3-\dfrac{1}{u_n-1}\succ 2$ و منه $u_{n+1}\succ 2$

اذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\succ 2$.

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-4}{u_n-1}-u_n=\frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n-1}=\frac{-(u_n-2)^2}{u_n-1}\prec 0$$ المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N

(u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل اذن هي **متقاربة** .

2) أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 يطلب تعيين حدها الأول .

$$v_{n+1}=e^{\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2}=\frac{\dfrac{3u_n-4}{u_n-1}}{\dfrac{3u_n-4}{u_n-1}-2}=\frac{\dfrac{3u_n-4}{u_n-1}}{\dfrac{u_n-2}{u_n-1}}=2+\left(\frac{3u_n-4}{u_n-2}-2\right)=2+\frac{u_n}{u_n-2}$$

$$v_{n+1}=e^{\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2}}=e^{2+\frac{u_n}{u_n-2}}=e^2\times e^{\frac{u_n}{u_n-2}}=e^2v_n$$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 و حدها الأول $v_0=e^{\frac{u_0}{u_0-2}}=e^3$.

ب) أكتب v_n بدلالة n:

$$v_n=v_n\times q^n=e^3\times\left(e^2\right)^n=e^3\times e^{2n}=e^{2n+3}$$

ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

$$v_n=e^{\frac{u_n}{u_n-2}}\Rightarrow\ln v_n=\ln e^{\frac{u_n}{u_n-2}}\Rightarrow\ln v_n=\frac{u_n}{u_n-2}\Rightarrow(u_n-2)\ln v_n=u_n$$

$$\Rightarrow u_n\ln v_n-2\ln v_n=u_n\Rightarrow u_n\left(\ln v_n-1\right)=2\ln v_n$$

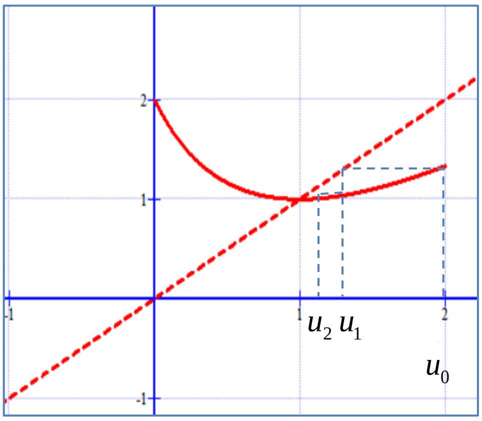
$$u_n\left(\ln v_n-1\right)=\frac{2\ln v_n}{\ln v_n-1}=\frac{2\ln e^{3n+2}}{\ln e^{3n+2}-1}=\frac{2(3n+2)}{3n+2-1}=\frac{6n+4}{3n+1}$$

3) احسب بدلالة n: $s_n=\ln\left(e^{-2}\times v_0\right)^{u_0}+\ln\left(e^{-1}\times v_1\right)^{u_1}+......+\ln\left(e^{n-2}\times v_n\right)^{u_n}$.

$$\ln\left(e^{n-2}\times v_n\right)^{u_n}=u_n\ln\left(e^{n-2}\times e^{2n+3}\right)=u_n\ln\left(e^{2n+3+n-2}\right)=u_n\ln\left(e^{3n+1}\right)=u_n\left(3n+1\right)=\frac{6n+4}{3n+1}\left(3n+1\right)=6n+4$$

s_n هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية : $s_n=\dfrac{n+1}{2}(6n+4+4)=\dfrac{n+1}{2}(6n+10)=(n+1)(3n+5)$

حل التمرين -22-



1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى:

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

نلاحظ أن المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو 1 ،

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \le 2$.

$n=0$: $1 \prec u_0 = 2 \le 2$.

$1 \prec u_n \le 2$ و f متزايدة على المجال $[1;2]$ و منه $f(1) \prec f(u_n) \le f(2)$ و منه

$1 \prec u_{n+1} \le \frac{4}{3} \le 2$ اذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$1 \prec u_n \le 2$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و استنتج تقاربها.

$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n+1}{u_n+1}$ لدينا $-u_n+1 \prec 0$ و $u_n+1 \succ 0$ اذن $u_{n+1}-u_n \prec 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-1=\frac{(u_n-1)^2}{u_n+1}$

$$u_{n+1}-1=\frac{u_n^2-u_n+2}{u_n+1}-1=\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n+1}=\frac{(u_n-1)^2}{u_n+1}$$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \prec \frac{u_n-1}{u_n+1} \le \frac{1}{3}$: $\frac{u_n-1}{u_n+1}=1-\frac{2}{u_n+1}$

من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \prec u_n \le 2$ و منه $2 \prec u_n+1 \le 3$ و منه $-1 \prec \frac{-2}{u_n+1} \le \frac{-2}{3}$ و منه $0 \prec 1-\frac{12}{u_n+1} \le \frac{1}{3}$.

ثم استنتج أن $0 \prec u_{n+1}-1 \le \frac{1}{3}(u_n-1)$.

$u_{n+1}-1=\frac{(u_n-1)^2}{u_n+1}=\frac{(u_n-1)}{u_n+1}(u_n-1)$ و لدينا $0 \prec \frac{u_n-1}{u_n+1} \le \frac{1}{3}$ و منه : $0(u_n-1) \prec \frac{(u_n-1)}{u_n+1}(u_n-1) \le \frac{1}{3}(u_n-1)$ أي

$0 \prec u_{n+1}-1 \le \frac{1}{3}(u_n-1)$.

جـ) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي: $0 \prec u_n-1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا $0 \prec u_{n+1}-1 \le \frac{1}{3}(u_n-1)$. و منه $0 \prec u_1-1 \le \frac{1}{3}(u_0-1)$ و $0 \prec u_2-1 \le \frac{1}{3}(u_1-1)$ و........ و $0 \prec u_n-1 \le \frac{1}{3}(u_{n-1}-1)$

بضرب المتباينات طرفا لطرف : $0 \prec u_n-1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_0-1)$ اي : $0 \prec u_n-1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا : $0 \prec u_n-1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$ و منه : $1 \prec u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n+1$ و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+1=1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

حل التمرين -23-

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{u_n+3}$.

2.برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 5$.

$$u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{u_n+3}=3-\frac{8}{u_n+3}$$

- لدينا $1\le u_0=5\le 5$ محققة .
- نفرض أن $1\le u_n\le 5$ و نبرهن أن $1\le u_{n+1}\le 5$.

لدينا فرضا $1\le u_n\le 5$ ومنه $4\le u_n+3\le 8$ و منه $\frac{1}{8}\le\frac{1}{u_n+3}\le\frac{1}{4}$ و منه $-1\le\frac{-8}{u_n+3}\le -2$ و منه $1\le 3-\frac{3}{u_n+2}\le 2\le 5$ أي $1\le u_{n+1}\le 5$. إذن حسب الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل عدد طبيعي n فإن $1\le u_n\le 5$.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n=\frac{3u_n+1-u_n^2-3u_n}{u_n+3}=\frac{-u_n^2-2u_n+1}{u_n+3}=\frac{1-u_n^2}{u_n+3}=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$$

لدينا $1\le u_n\le 5$ ومنه $1+u_n\succ 0$ و $u_n+3\succ 0$

و $1\le u_n\le 5$ و $-5\le -u_n\le -1$ و $-4\le 1-u_n\le 0$ أي $1-u_n\le 0$

إذن $u_{n+1}-u_n\le 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة .

استنتاج أن المتتالية (Un) متقاربة :

بما أن المتتالية متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

4.لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=\frac{u_n-\alpha}{u_n+1}$. حيث $\alpha\in\Re-\{3;-1\}$.

أ.عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية ، ثم عين أساسها و حدها الأول .

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-\alpha}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1}=\frac{\frac{3u_n+1-\alpha u_n-3\alpha}{u_n+3}}{\frac{3u_n+1+u_n+3}{u_n+3}}$$

$$=\frac{3u_n+1-\alpha u_n-3\alpha}{3u_n+1+u_n+3}=\frac{(3-\alpha)u_n+1-3\alpha}{4u_n+4}=\frac{(3-\alpha)}{4}\times\frac{u_n+\frac{1-3\alpha}{3-\alpha}}{u_n+1}$$

(v_n) هندسية معناه $\frac{1-3\alpha}{3-\alpha}=-\alpha$ معناه $1-3\alpha=-3\alpha+\alpha^2$ و منه $1=\alpha^2$ معناه $\alpha=1$ أو $\alpha=-1$ مرفوض .

اذن $\alpha=1$ حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{3-\alpha}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ و $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

ب.أكتب v_n :

$$v_n=v_0\times q^n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ثم استنتج u_n بدلالة n.

لدينا $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ أي أن $u_nv_n+v_n=u_n-1$ و منه $-u_n+u_nv_n=-v_n-1$ ومنه $u_n(1-v_n)=v_n+1$ ومنه

$u_n=\frac{v_n+1}{1-v_n}$: إذن $u_n=\frac{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{1-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: $\lim u_n = \lim \dfrac{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{1-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{1} = 1$ لأن $\lim \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

ج.أحسب المجموع $S_n = \dfrac{1}{u_0+1}+\dfrac{1}{u_1+1}+.....+\dfrac{1}{u_n+1}$:

$$\frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{v_n+1}{1-v_n}+1} = \frac{1}{\frac{v_n+1+1-v_n}{1-v_n}} = \frac{1}{\frac{2}{1-v_n}} = \frac{1}{2}(1-v_n)$$

$$S_n = \frac{1}{u_0+1}+\frac{1}{u_1+1}+.....+\frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{2}(1-v_0)+\frac{1}{2}(1-v_1)+....+\frac{1}{2}(1-v_n)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1-v_0)+(1-v_1)+....+(1-v_n)\right] = \frac{1}{2}\left[1\times(n+1)-(v_0+v_1+....+v_n)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1\times(n+1)-\frac{v_0}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[n+1-\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right]$$

تمـــارين مقترحة

التمرين -1-

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1- عين قيمة u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2- نفرض $u_0=6$:

أ) أحسب u_1 و u_2 .

ب) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n=\alpha u_n-2$, حيث $\alpha\in IR^*$.

عين قيمة العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية .

ت) نضع $\alpha=-1$:

- عبر بدلالة n عن كل من v_n و u_n .
- أحسب بدلالة n المجموع : S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين -2-

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2+3u_n \end{cases}$

1.احسب u_1، u_2

2.نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\dfrac{2}{u_n+1}$

أ.بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب.احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

ج.احسب المجموع: $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$

3.نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n'=v_0^2+v_1^2+....+v_{n-1}^2$ -بين أن: $S_n'=\frac{9}{8}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

4- .بدلالة n الجداء: $P_n=v_0\times v_1\times....\times v_n$

التمرين -3-

(u_n)متتالية عددية معرفة على N كما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

1.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن: $2 \le u_n \le 4$

2.بين ان المتتالية(u_n)متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.

أ.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن: $4 - u_{n+1} \le \frac{4 - u_n}{2}$

ب.استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي: $0 \le 4 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

التمرين -4-

(u_n)متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n}$

1-عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون: $u_{n+1} = a + \frac{b}{4 - u_n}$

2-برهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n: $-1 \le u_n \le 3$

3-ادرس رتابة المتتالية(u_n)و استنتج أنها متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

4-نعتبر المتتالية(v_n)المعرفة على N كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$

-اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

-احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

وفقكم الله في

بكالوريا 2024