♣

1 180101 122024

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية جيجل — الموسم الدراسي: 2025-2024

ثانوية راشدي محمد -سيدي معروف — المستوى: الثالثة -علوم تجريبية

اختبار الفصل الأول في مادة: الرياضيات — المدة: ساعتان

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

لكل حالة مما يأتي خيار واحد صحيح، حدّده مع التعليل:	(أ)	(ب)	(جـ)
(1) أحسن تقريب تآلفي للدالة f في جوار العدد 1 حيث $f(x)=x-1-2\ln x$ هو:	$f(x)\simeq x$	$f(x)\simeq -x+1$	$f(x)\simeq -x$
(2) عبارة الدالة f حل المعادلة التفاضلية $y'=2y-1$ التي تحقق $f(0)=e$ هي:	$f(x)=(e+1)e^x+1$	$f(x)=(e-1)e^x+1$	$f(x)=(e+1)e^x-1$
(3) نهاية الدالة $x\longmapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ عند 0 هي:	-1	1	2

التمرين الثاني: (06.5 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $]-2;2[$ بـ: $f(x)=\ln(4-x^2)+\ln(x^2+1)$ ،
وليكن (C_f)تمثيلها البياني في المستوب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ ، وفسّر النتيجتين هندسيا.

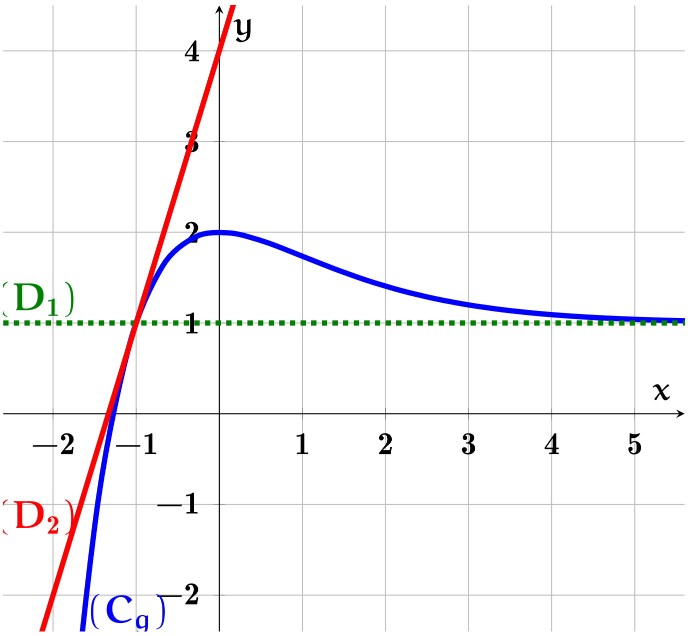
2/ ا/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-2;2[$: $f'(x)=\dfrac{-2x(2x^2-3)}{(4-x^2)(x^2+1)}$.

ب/ أُدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ حل المعادلة $f(x)=0$ ، ماذا تستنتج فيما يخص المنحنى (C_f)؟

4/ بيّن أن الدالة f دالة زوجية، ثم أنشئ المنحنى (C_f).

التمرين الثالث: (09 نقاط)



الجزء الأول: لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$g(x) = (ax+b)\,e^{-x} + 1$ حيث a و b عددان حقيقيان.
الدالة g تقبل العدد 2 كقيمة حدية محلية عند $x = 0$.

في الشكل المقابل: (C_g) هو التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، (D_1) مستقيم مقارب لـ (C_g) في جوار $+\infty$ معادلته $y = 1$ ، و (D_2) مماس لـ (C_g) عند $A(-1;1)$.

/1 بقراءة بيانية، أجب عن ما يلي:

ا/ عين نهايتي الدالة g عن $-\infty$ و $+\infty$.

ب/ عيّن: $g(0)$ ، $g(-1)$ ، $g'(0)$ و $g'(-1)$.

ج/ اعتمادا على ماسبق، عيّن كلا من a و b .

/2 نضع فيما يلي $a = b = 1$.

ا/ أثبت وجود عدد حقيقي وحيد α حل للمعادلة $g(x) = 0$ على المجال $]-1.4;-1.2[$.

ب/ شكّل جدول إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

/3 h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (|x|+1)\,e^{-x} + 1$.

- أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة، ثم أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند 0 وفسّر النتائج هندسيا.

الجزء الثاني: نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+2)e^{-x}$ ،
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

/1 ا/ أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (نذكر أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$)

ب/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

ج/ أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

/2 ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

/3 بيّن أن (C_f) يقبل مماسا موازيا لـ (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له.

/4 بيّن أن $f(\alpha) = \alpha + 1 + \dfrac{1}{\alpha+1}$ ، ثم جِد حصرا لـ $f(\alpha)$.

/5 ا/ أحسب $f(0)$ ثم أنشئ كلا من (Δ) و (T) و (C_f).

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

ثانوية راشدي محمد - سيدي معروف / الموسم الدراسي 2025/2024 / المستوى: 03 علوم تجريبية

- إجابة الاختبار الأول في مادة الرياضيات -

التمرين الأول:

(1) ⟸ (ب) $f(x) \simeq -x+1$ ،

التعليل: أحسن تقريب تآلفي للدالة f في جوار 1 هو: $f(x) \simeq f'(1)(x-1)+f(1)$.

لدينا من أجل كل x من $]0,+\infty[$:

$f'(x)=1-\frac{2}{x} \overset{\text{ومنه}}{\Longrightarrow} f'(1)=1-\frac{2}{1}=-1$

ولدينا $f(1)=1-1=0$.

وعليه، $f(x) \underset{x\simeq 1}{\simeq} -(x-1)=-x+1$

(2) ⟸ (ب) $f(x)=(e-1)e^x+1$.

التعليل: حلول المعادلة التفاضلية $y'=y-1$ هي الدوال: $f(x)=ce^x+1$

وبما أن: $f(0)=e$ معناه: $c+1=e$ أي $c=e-1$

ومنه، $f(x)=(e-1)e^x+1$

(3) ⟸ (جـ) النهاية عند 0 هي 2 .

التعليل: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0} e^{-x}\left(2\times\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)$

$= e^0\times2\times1=2$ ، لأن

[لأن: $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$.]

التمرين الثاني:

$f(x)=\ln(4-x^2)+\ln(x^2+1)$ $\quad D_f=]-2;2[$

1- حساب النهايات:

• $\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\left(\ln(4-x^2)+\ln(x^2+1)\right)$

$=-\infty$

لأن: $\begin{cases}\lim_{x\to-2^+}\ln(4-x^2)=\lim_{t\to0^+}\ln t=-\infty \\ \text{و} \\ \lim_{x\to-2^+}\ln(x^2+1)=\ln(5).\end{cases}$

• $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left[\ln(4-x^2)+\ln(x^2+1)\right]$

$=-\infty$

لأن: $\begin{cases}\lim_{x\to2^-}\ln(4-x^2)=\lim_{t\to0^+}\ln(t)=-\infty \\ \lim_{x\to2^-}\ln(x^2+1)=\ln 5\end{cases}$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما $x=2$ و $x=-2$.

2- أ- المشتق: من أجل كل x من $]-2;2[$:

$f'(x)=\frac{-2x}{4-x^2}+\frac{2x}{x^2+1}$

$=\frac{-2x(x^2+1)+2x(4-x^2)}{(4-x^2)(x^2+1)}$

$=\frac{2x(4-x^2-x^2-1)}{(4-x^2)(x^2+1)}$

$=\frac{-2x(2x^2-3)}{(4-x^2)(x^2+1)}$. م.ه.و

ب- اتجاه التغير:

لدينا $2x^2-3=0$ معناه $x^2=\frac{3}{2}$ (أي) $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ أو $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

وعليه

x	-2		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		2
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x^2-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖

فالدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-2;-\sqrt{\frac{3}{2}}]$ و $[0;\sqrt{\frac{3}{2}}]$، ومتناقصة تماما على المجالين: $[-\sqrt{\frac{3}{2}};0]$ و $[\sqrt{\frac{3}{2}};2[$.

جدول تغيراتها:

x	-2		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		2
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2\ln(\frac{5}{2})$	↘	$2\ln 2$	↗	$2\ln(\frac{5}{2})$	↘	$-\infty$ ‖

$f(0)=\ln 4-\ln 1=2\ln 2\simeq 1,4$

$f(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\ln(4-\frac{3}{2})+\ln(\frac{3}{2}+1)=2\ln(\frac{5}{2})=f(+\frac{\sqrt{3}}{2})\simeq 1,8$

3- حل المعادلة $f(x)=0$؛ تكافئ:

$\ln(4-x^2)+\ln(x^2+1)=0$

معناه، $\ln(4-x^2)=-\ln(x^2+1)$

أي، $\ln(4-x^2)=\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

ومنه، $4-x^2=\frac{1}{x^2+1}$

إذن؛ $(4-x^2)\cdot(x^2+1)=1$

أي، $4x^2+4-x^4-x^2-1=0$

ومنه، $-x^4+3x^2+3=0$

بوضع: $x^2=t$ تصبح،

$-t^2+3t+3=0$

ومنه، $\Delta=21$

$\Rightarrow t_1=\frac{+3+\sqrt{21}}{2}$ و $t_2=\frac{+3-\sqrt{21}}{2}$

وعليه، $x^2=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ أو $x^2=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$ (سالب) ليس لها حلول في $\mathbb{R}$

ومنه، $x=\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}$ أو $x=-\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}$

الإستنتاج: المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما:

$x_1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\simeq 1,9$ و $x_2=-\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\simeq -1,9$

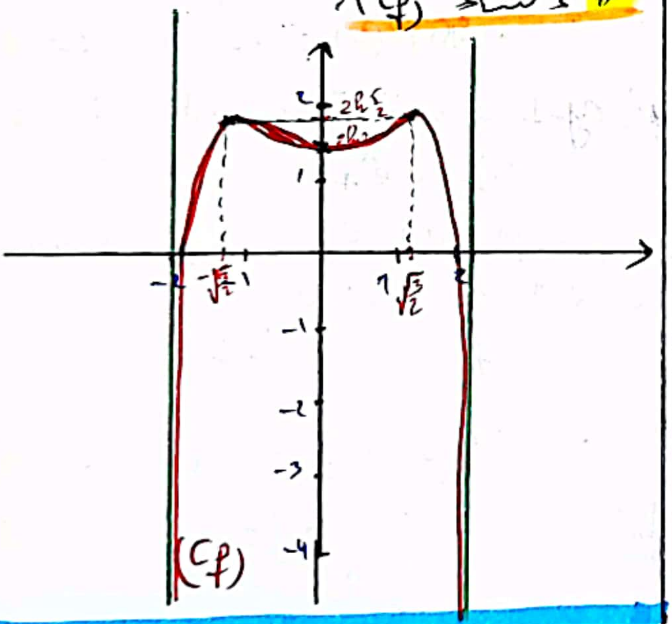
4- تبيان أن f زوجية؛

لدينا $D_f=]-2;2[$ متناظر بالنسبة إلى 0، ومن أجل كل x من $]-2;2[$:

$f(-x)=\ln(-(-x)^2+4)+\ln((-x)^2+1)$
$=\ln(4-x^2)+\ln(x^2+1)=f(x)$

إذن الدالة f دالة زوجية، إذن تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.

إنشاء (C_f):



التمرين الثالث:

الجزء الأول:

$g(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

1) ذروة المنحنى عند $(0;2)$

• $g(0)=2$ • $g'(0)=0$

• $g(-1)=1$ • $g'(-1)=\frac{4-1}{0-(-1)}=\frac{3}{1}=3$

$A(-1;1)\in(C_g)$ ؛ معامل توجيه (D_2)

أ- النهايات:

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$; $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

جـ- لدينا $g(0)=b+1=2$

ومنه $\boxed{b=2-1=1}$

ولدينا $g(-1)=(-a+b)e^{1}+1=1$

ومنه $(-a+1)e=0$

أي $-a+1=0$ ؛ ومنه $\boxed{a=1}$

2- $a=b=1$ أي $g(x)=(x+1)e^{-x}+1$

أ- وجود وحدانية الحل:

لدينا في المجال $]-1{,}4;-1{,}2[$ الدالة g مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) ولدينا

$g(-1{,}4)\simeq-0{,}6<0$

و $g(-1{,}2)\simeq 0{,}3>0$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1{,}4;-1{,}2[$.

ب- جدول إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

3- $h(x)=(|x|+1)e^{-x}+1$

$$h(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-x}+1 & ; \ x\geq 0\\ (-x+1)e^{-x}+1 & ; \ x\leq 0\end{cases}$$

دراسة قابلية الاشتقاق عند 0:

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{(x+1)e^{-x}+1-2}{x}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{xe^{-x}}{x}+\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\underset{1}{e^{-x}}-\underset{1}{\dfrac{e^{-x}-1}{-x}}\right)=0$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\dfrac{(-x+1)e^{-x}+1-2}{x}\right)$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\underset{-1}{-e^{-x}}-\underset{1}{\dfrac{e^{-x}-1}{-x}}\right)$

$=-1-1=-2$

إذن الدالة h تقبل الاشتقاق على يمين ويسار العدد 0 حيث $\boxed{h'_d(0)=0}$ و $\boxed{h'_g(0)=-2}$

وبما أن $\boxed{h'_g(0)\neq h'_d(0)}$ فإن h لا تقبل الاشتقاق عند 0.

الجزء الثاني:

$f(x)=x-(x+2)e^{-x}$

1- أ/ حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{x+2}{e^{x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underset{+\infty}{x}-\overset{0}{\dfrac{x}{e^{x}}}+\overset{0}{\dfrac{2}{e^{x}}}\right)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-(x+2)e^{-x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1-\left(\dfrac{x+2}{x}\right)e^{-x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\underset{-\infty}{x}\left(1-\underset{-\infty}{\left(1+\overset{0}{\dfrac{2}{x}}\right)\underset{+\infty}{e^{-x}}}\right)$

$=-\infty$

1- ب- المقارب المائل:

لدينا $f(x)=x-\dfrac{x+2}{e^{x}}$

حيث $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x+2}{e^{x}}\right)=0$ ، حسب ما سبق نجد

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$

مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

جـ- الوضعية النسبية:

$f(x)-x=-(x+2)e^{-x}$

ومنه:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان $(-2;-2)$	(C_f) تحت (Δ)

2- أ- المشتقة: من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x)=1-\left(e^{-x}-e^{-x}(x+2)\right)$

$=1-e^{-x}(1-x-2)$

$=1-e^{-x}(-1-x)$

$=(x+1)e^{-x}+1$

$f'(x)=g(x)$ م.ه.و

جـ1- اتجاه التغير:

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3- تبيان أن المماس (T) الموازي لـ (Δ)

نحل المعادلة، $f'(x)=1$

ومنه، $(x+1)e^{-x}+1=1$

أي $(x+1)e^{-x}=0$ أي $x+1=0$

إذن، $\boxed{x=-1}$

وإذن (C_f) يقبل مماسا موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة -1 معادلته:

$(T): y = f'(-1)\left(x-(-1)\right)+f(-1)$

$= 1(x+1)+(-1-e)$

$\boxed{f'(-1)=g(-1)=1 \quad f(-1)=-1-e \approx -3{,}7}$

$\boxed{(T): y = x-e}$

4- تعيين $f(\alpha)$:

لدينا $f'(\alpha)=0$ معناه $(\alpha+1)e^{-\alpha}+1=0$

أي $\boxed{(\alpha+1)e^{-\alpha}=-1}$ ، $e^{-\alpha}=\frac{-1}{\alpha+1}$

ومنه، $f(\alpha)=\alpha-(\alpha+2)e^{-\alpha}$

$=\alpha-(\alpha+1)e^{-\alpha}-e^{-\alpha}$

$\boxed{f(\alpha)=\alpha+1+\frac{1}{\alpha+1}}$

• حصر $f(\alpha)$، لدينا $-1{,}4<\alpha<-1{,}2$

ومنه، $\boxed{-0{,}4<\alpha+1<-0{,}2}$

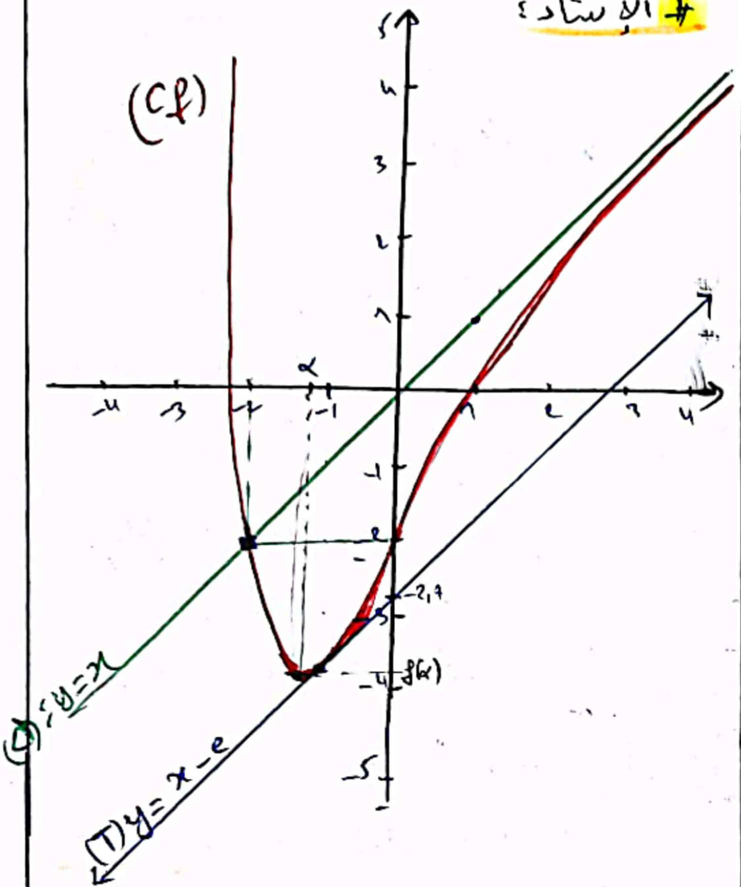
ومنه، $\boxed{-\frac{1}{0{,}2}<\frac{1}{\alpha+1}<-\frac{1}{0{,}4}}$

ومنه، $-0{,}4-\frac{1}{0{,}2}<\alpha+1+\frac{1}{\alpha+1}<-0{,}2-\frac{1}{0{,}4}$

أي $-5{,}4<f(\alpha)<-2{,}7$

5- أ- $f(0)=0-(0+2)e^{0}=-2.$

الإنشاء:



ب- المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=x+m$. وعليه:

قيم m:	عدد حلول المعادلة:
$m<-e$	ليس لها حلول
$m=-e$	حل واحد.
$0<m<-e$	حلان.
$m\geq 0$	حل وحيد.

انتهى