10 تمارين نموذجية في محور

المرجح في المستوي

للسنة الثانية ثانوي

كتابة الأستاذ :

حنــاش نبيــل

Avril 2022

التمرين رقم 01 :

I- ABC مثلث من المستوي . I و J نقطتان حيث : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $6\overrightarrow{BJ}-2\overrightarrow{CJ}=\vec{0}$.

1) أنشئ النقطتين I و J ، ثم بين أن I مرجح للنقطتين A و B بمعاملين يطلب تعيينهما .

2) G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;3),(C;-1)\}$.

- ✓ بين أن G نقطة تلاقي المستقيمين (CI) و (AJ) .
- ✓ أنشئ النقطة G .
- ✓ بين أن الشعاع $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M ؛

ثم بين أن : $\vec{v}=4\overrightarrow{CI}$.

- ✓ عين ثم أنشئ المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|6\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$$

- ✓ عين ثم أنشئ المجموعة (Δ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right\|$$

II- لتكن G_k مرجح الجملة المثقلة $\{(A;k),(B;-k)(C;1)\}$ حيث k عدد حقيقي .

1) هل النقطة G_k موجودة من أجل كل عدد حقيقي k ؟ علل .

2) بين أن : $\overrightarrow{CG_k}=-k\overrightarrow{AB}$.

3) عين ثم أنشئ مجموعة النقط G_k لما k يمسح $\mathbb{R}$.

4) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(1;2)$ ، $B(0;-2)$ و $C(-1;3)$.

- ✓ عين بدلالة k إحداثيي النقطة G_k .
- ✓ عين قيمة k حتى تنتمي النقطة G_k إلى المستقيم (D) الذي $y=3x$ معادلة له .

حل مقترح :

الجزء الأول :

1- لإنشاء النقطة I نستعمل المدور و بالإستعانة بمبرهنة طالس لتقسيم القطعة المستقيمة $[AB]$ إلى 4 أجزاء متقايسة .

و من العلاقة الشعاعية $6\overrightarrow{BJ}-2\overrightarrow{CJ}=\vec{0}$ فإن النقطة J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B;6),(C;-2)\}$ و باستعمال علاقة شال نجد

$6\overrightarrow{BJ}-2\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{BJ}=\vec{0}$ أي $4\overrightarrow{BJ}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ و منه $\boxed{\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}}$ ؛ إذن لإنشاء النقطة J نعين منتصف القطعة المستقيمة $[CB]$ و باستعمال المدور نأخذ 3 أجزاء متقايسة إنطلاقا من النقطة C .

- نبين أن I مرجح للنقطتين A و B بمعاملين يطلب تعيينهما :

لدينا $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ معناه $4\overrightarrow{AI}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ و بإدخال النقطة I بعلاقة شال نجد : $4\overrightarrow{AI}-3\overrightarrow{AI}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{AI}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و منه $\boxed{\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{BI}=\vec{0}}$ ؛ إذن النقطة I هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و 3 على الترتيب

2) G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;3),(C;-1)\}$.

✓ نبين أن G هي نقطة تلاقي المستقيمين (CI) و (AJ) :

من السؤال 1) نعلم أن النقطة I هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;3)\}$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(I;4),(C;-1)\}$ و بالتالي النقط I ، C و G في استقامية ، و منه ينتج :

$G\in(CI)$ ......(1) . و من جهة أخرى ؛ النقطة J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B;6),(C;-2)\}$ ، **و نعلم أن ضرب المعاملات في العدد الحقيقي غير المعدوم k لا يغير المرجح** ، و بالتالي من أجل $\boxed{k=1/2}$ فإن النقطة J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B;3),(C;-1)\}$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(J;2)\}$ و بالتالي النقط A ، J و G في استقامية ، و منه ينتج : $G\in(AJ)$ ......(2)

من (1) و (2) لدينا $G\in(CI)\cap(AJ)$ ؛ و بالتالي G هي نقطة تلاقي المستقيمين (CI) و (AJ) .

✓ يمكن إنشاء النقطة G إنطلاقا من العلاقة الشعاعية $\boxed{\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$ أو برسم المستقيمين (CI) و (AJ) و تعيين نقطة تقاطعهما و هي النقطة G .

✓ إثبات أن الشعاع $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M و أن :

نعلم أن النقطة I هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;3)\}$ ، و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن $\boxed{\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MI}}$ ، و منه ينتج $\vec{v}=4\overrightarrow{MI}-4\overrightarrow{MC}$ أي $\vec{v}=4(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MC})$ و منه $\vec{v}=4(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MI})$ و منه $\vec{v}=4\overrightarrow{CI}$ و هو المطلوب . ($\vec{v}$ مستقل عن النقطة M)

طريقة -2- : باستعمال علاقة شال ندخل النقطة A مثلا فنجد :

$\vec{v}=\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{AC}$ معناه $\vec{v}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$ معناه $\vec{v}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CA}$ و بإدخال النقطة I بعلاقة شال نجد $\vec{v}=3\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{CI}+4\overrightarrow{IA}$ أي $\vec{v}=\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{CI}$ لأن $3\overrightarrow{AI}+4\overrightarrow{IA}=-3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IA}$ ؛ لكن نعلم أن I هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;3)\}$ و بالتالي $\boxed{\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}}$ ؛ إذن $\vec{v}=4\overrightarrow{CI}$ و هو المطلوب .

✓ تعيين ثم إنشاء المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|6\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$$

بما أن النقطة I هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;3)\}$ فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي ينتج : $\boxed{\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MI}}$ ، و كذلك النقطة J هي مرجح الجملة $\{(B;6),(C;-2)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن $\boxed{6\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MJ}}$ ؛ إذن $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|6\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MJ}\right\|$ معناه $\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$ أي $\boxed{MI=MJ}$.

إذن مجموعة النقط (Γ) هي المستقيم المحوري للقطعة $[IJ]$.

✓ تعيين ثم إنشاء المجموعة (Δ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right\|$$

بما أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;3),(C;-1)\}$ فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن $\boxed{\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}}$ ، و لاحظ أن $\boxed{\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}=\vec{v}=4\overrightarrow{CI}}$

إذن $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{CI}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|$ معناه $\boxed{MG={}^4\!/_3\,CI}$ (المقدار ${}^4\!/_3\,CI$ ثابت) ؛ إذن مجموعة النقط (Δ) هي الدائرة التي مركزها النقطة G و نصف قطرها $r={}^4\!/_3\,CI$.

الجزء الثاني :

1) من أجل كل عدد حقيقي k لدينا : $k+(-k)+1=1$ و $\boxed{1\neq 0}$ ؛ إذن النقطة G_k موجودة من أجل كل $k\in\mathbb{R}$.

2) إثبات أن : $\overrightarrow{CG_k}=-k\overrightarrow{AB}$.

G_k مرجح الجملة المثقلة $\{(A;k),(B;-k)(C;1)\}$ ؛ إذن نكتب $k\overrightarrow{G_kA}-k\overrightarrow{G_kB}+\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$ ، و باستعمال علاقة شال ندخل

النقطة B فنجد $k\overrightarrow{G_kB}+k\overrightarrow{BA}-k\overrightarrow{G_kB}+\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$ معناه $k\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$ أي $k\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CG_k}=\vec{0}$ و منه نجد $\overrightarrow{CG_k}=k\overrightarrow{BA}$ أي

$\boxed{\overrightarrow{CG_k}=-k\overrightarrow{AB}}$ و هو المطلوب .

3) تعيين ثم إنشاء مجموعة النقط G_k لما k يمسح $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $\overrightarrow{CG_k}=-k\overrightarrow{AB}$ ؛ إذن الشعاعان $\overrightarrow{CG_k}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا ، و منه مجموعة النقط G_k لما k يمسح $\mathbb{R}$ هي المستقيم (E) الذي يشمل النقطة C و $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه له .

4) أ- تعيين بدلالة k إحداثيي النقطة G_k :

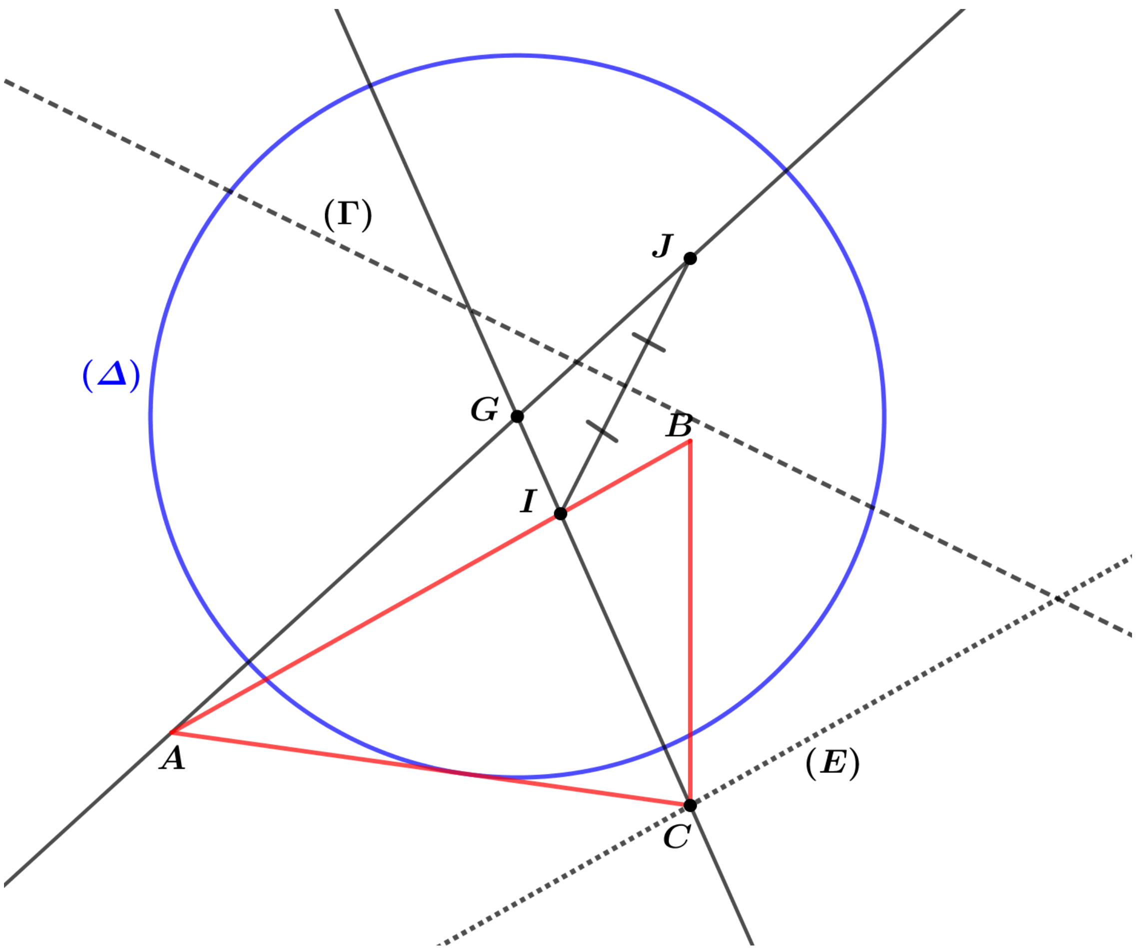
من أجل كل $k\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} x_{G_k}=\dfrac{k(1)-k(0)+1(-1)}{k+(-k)+1} \\ y_{G_k}=\dfrac{k(2)-k(-2)+1(3)}{k+(-k)+1}\end{cases}$ أي $\boxed{\begin{cases} x_{G_k}=k-1 \\ y_{G_k}=4k+3\end{cases}}$

ب- تعيين قيمة العدد k حتى تنتمي النقطة G_k إلى المستقيم (D) الذي $y=3x$ معادلة له :

$G_k\in(D)$ إذا و فقط إذا كان $y_{G_k}=3x_{G_k}$ ، معناه $4k+3=3(k-1)$:

$4k+3=3(k-1)$ تكافئ $4k+3=3k-3$ و منه نجد $\boxed{k=-6}$.

نتيجة : $G_k\in(D)$ إذا و فقط إذا كان $k=-6$ و هي النقطة G_{-6} التي إحداثياها $(-7;-21)$.



التمرين رقم 02 :

I - ABC مثلث من المستوي .

K منتصف القطعة $[AB]$ ، I و J نقطتان من المستوي بحيث : $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$

1) أنشئ النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(B;4),(C;1)\}$.

2) بين أن النقطة I مرجح الجملة $\{(B;4),(C;1)\}$ ثم أنشئ النقطة I .

3) بين أن النقطة J مرجح الجملة $\{(A;4),(C;1)\}$ ثم أنشئ النقطة J .

4) برهن أن المستقيمات (AI) ، (BJ) و (CK) تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيينها .

5) عين ثم أنشئ (E_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$5\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

6) بين أن الشعاع $\vec{v}=4\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M ؛

ثم بين أن : $\vec{v}=5\overrightarrow{BJ}$.

7) عين ثم أنشئ (E_2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|\leq\frac{9}{5}\left\|4\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

II- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط $A(-1,0)$ ، $B(2,-1)$ و $C(1,3)$ ؛ و لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة

$\{(A;\alpha),(B;\alpha+1),(C;\alpha^2)\}$ حيث α عدد حقيقي .

1) عين قيم α التي من أجلها تكون G موجودة .

2) عين إحداثيي النقطة G بدلالة α .

3) هل توجد قيمة لـ α حتى تكون إحداثيا النقطة G هما $(7,1)$ ؟

حل مقترح :

1) إنشاء النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(B;4),(C;1)\}$:

النقطة G موجودة و وحيدة لأن : $4+4+1=9$ و $\boxed{9\neq0}$.

لإنشاء النقطة G نعتمد على العلاقة الشعاعية : $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}}$ (إستعمل المدور و بالإعتماد على مبرهنة طالس قم بتقسيم كل من القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ إلى 9 أجزاء متقايسة)

2) إثبات أن النقطة I مرجح الجملة $\{(B;4),(C;1)\}$ ثم إنشاء النقطة I :

لدينا $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ معناه $5\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ ، و بإدخال النقطة I بعلاقة شال نجد $5\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ أي $4\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ و منه $-4\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ أي $\boxed{4\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}}$ و منه النقطة I هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B;4),(C;1)\}$.

و لإنشاء النقطة I نقسم باستعمال المدور و بالإستعانة بمبرهنة طالس القطعة $[BC]$ إلى 5 أجزاء متقايسة .

3) إثبات أن النقطة J مرجح الجملة $\{(A;4),(C;1)\}$ ثم إنشاء النقطة J :

لدينا $\overrightarrow{CJ}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$ معناه $5\overrightarrow{CJ}-4\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ ، و بإدخال النقطة J بعلاقة شال نجد $5\overrightarrow{CJ}-4\overrightarrow{CJ}-4\overrightarrow{JA}=\vec{0}$ أي $-\overrightarrow{JC}-4\overrightarrow{JA}=\vec{0}$ معناه $\boxed{4\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}}$ و بالتالي النقطة J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(C;1)\}$.

و لإنشاء النقطة J نقسم باستعمال المدور و بالإستعانة بمبرهنة طالس القطعة $[AC]$ إلى 5 أجزاء متقايسة .

4) إثبات أن المستقيمات (AI) ، (BJ) و (CK) تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيينها :

لدينا النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(B;4),(C;1)\}$ ، لكن النقطة I مرجح الجملة $\{(B;4),(C;1)\}$ ؛

إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A;4),(I;5)\}$ ، و بالتالي النقط A ، I و G في استقامية ، و منه ينتج : $G\in(AI)$ ......(1)

من جهة أخرى ، النقطة J هي مرجح الجملة $\{(A;4),(C;1)\}$ ، إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي مرجح للجملة المثقلة $\{(B;4),(J;5)\}$ ، و بالتالي النقط B ، J و G في استقامية ، و منه ينتج :

$G\in(BJ)$ ......(2) ، يبقى أن نبين أن $G\in(CK)$:

نعلم أن النقطة K هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ، إذن النقطة K هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(B;4)\}$ (المعاملات متساوية) ؛ إذن حسب خاصية التجميع ، فإن النقطة G هي مرجح الجملة $\{(C;1),(K;8)\}$ ، و بالتالي النقط G ، C و K في استقامية ، و منه ينتج : $G\in(CK)$ ......(3)

من (1) ، (2) و (3) نستنتج أن المستقيمات (AI) ، (BJ) و (CK) تتقاطع في نقطة واحدة هي G .

5) تعيين ثم إنشاء (E_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$5\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

بما أن K هي منتصف القطعة $[AB]$ فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي ، $\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MK}}$

و بما أن I هي مرجح الجملة $\{(B;4),(C;1)\}$ ، فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي $\boxed{4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MI}}$ ؛ إذن

$5\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $5\left\|2\overrightarrow{MK}\right\|=2\left\|5\overrightarrow{MI}\right\|$ معناه $\left\|\overrightarrow{MK}\right\|=\left\|\overrightarrow{MI}\right\|$ أي $\boxed{MK=MI}$.

إذن مجموعة النقط (E_1) هي **المستقيم المحوري** للقطعة $[KI]$.

6) إثبات أن الشعاع $\vec{v}=4\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M ؛

ثم إثبات أن : $\vec{v}=5\overrightarrow{BJ}$.

طريقة -1- : باستعمال علاقة شال ندخل النقطة A فنجد :

$$\vec{v}=4\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$$
$$=-5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

إذن الشعاع $\vec{v}$ هو شعاع ثابت و مستقل عن النقطة M .

طريقة -2- : نعلم أن النقطة J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(C;1)\}$ ؛ إذن من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن $4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MJ}$ ، و منه $\vec{v}=5\overrightarrow{MJ}-5\overrightarrow{MB}$ أي $\vec{v}=5\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MJ}\right)$ و منه $\vec{v}=5\overrightarrow{BJ}$ ؛ إذن الشعاع $\vec{v}$ هو شعاع ثابت و مستقل عن النقطة M حيث $\vec{v}=5\overrightarrow{BJ}$.

7) تعيين ثم إنشاء (E_2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|\le\frac{9}{5}\left\|4\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

بما أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;4),(B;4),(C;1)\}$ ، فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي ينتج :

$\boxed{4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=9\overrightarrow{MG}}$ ، و من جهة أخرى نلاحظ أن $\boxed{4\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{v}=5\overrightarrow{BJ}}$

إذن $\left\|4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|\le\frac{9}{5}\left\|4\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|9\overrightarrow{MG}\right\|\le\frac{9}{5}\left\|5\overrightarrow{BJ}\right\|$ أي $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|\le\left\|\overrightarrow{BJ}\right\|$ (طويلة الشعاع $\overrightarrow{BJ}$ هي مقدار ثابت) أي $\boxed{MG\le BJ}$ ؛ إذن مجموعة النقط (E_2) هي **القرص المغلق** الذي مركزه النقطة G و نصف قطره $r=BJ$.

-II

1) تعيين قيم α التي من أجلها تكون G موجودة :

يكون المرجح G موجودا و وحيدا إذا و فقط إذا كان $\alpha+\alpha+1+\alpha^2\neq0$ ، معناه $\alpha^2+2\alpha+1\neq0$:

و هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي α : $\Delta = 0$ و بالتالي المعادلة $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ تقبل حلا مضاعفا في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هو $\alpha = -\frac{2}{2(1)}$ أي $\alpha = -1$.

نتيجة : تكون النقطة G موجودة و وحيدة من أجل $\boxed{\alpha \neq -1}$ ؛ أي من أجل $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

2) تعيين إحداثيي النقطة G بدلالة α :

من أجل كل عدد حقيقي α يختلف عن -1 فإن :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + (\alpha+1) x_B + \alpha^2 x_C}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + (\alpha+1) y_B + \alpha^2 y_C}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_G = \dfrac{-\alpha + 2\alpha + 2 + \alpha^2}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\ y_G = \dfrac{-\alpha - 1 + 3\alpha^2}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\ y_G = \dfrac{3\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \end{cases}$$

3) إذا وجدت قيمة لـ α حيث إحداثيا النقطة G هما $(7,1)$ أي $(x_G; y_G) = (7;1)$ ، فإنه من السؤال السابق ينتج :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = 7 \\ \dfrac{3\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = 1 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} 7\alpha^2 + 14\alpha + 7 = \alpha^2 + \alpha + 2 \\ 3\alpha^2 - \alpha - 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 \end{cases} \text{ معناه } \boxed{\begin{cases} 6\alpha^2 + 13\alpha + 5 = 0 \\ 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \end{cases}}$$

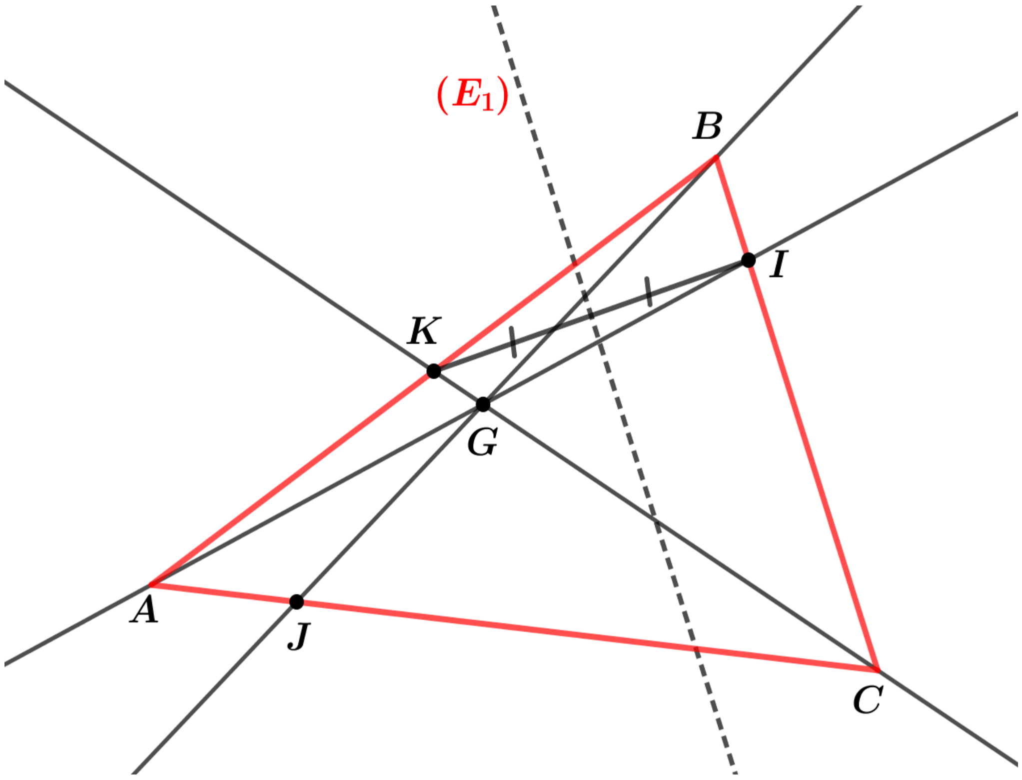
نحل المعادلة الأولى فنجد : $\alpha = -\frac{1}{2}$ أو $\alpha = -\frac{5}{3}$ (المميز $\Delta = 49$)

و نحل المعادلة الثانية فنجد : $\alpha = 2$ أو $\alpha = -\frac{1}{2}$ (المميز $\Delta = 25$)

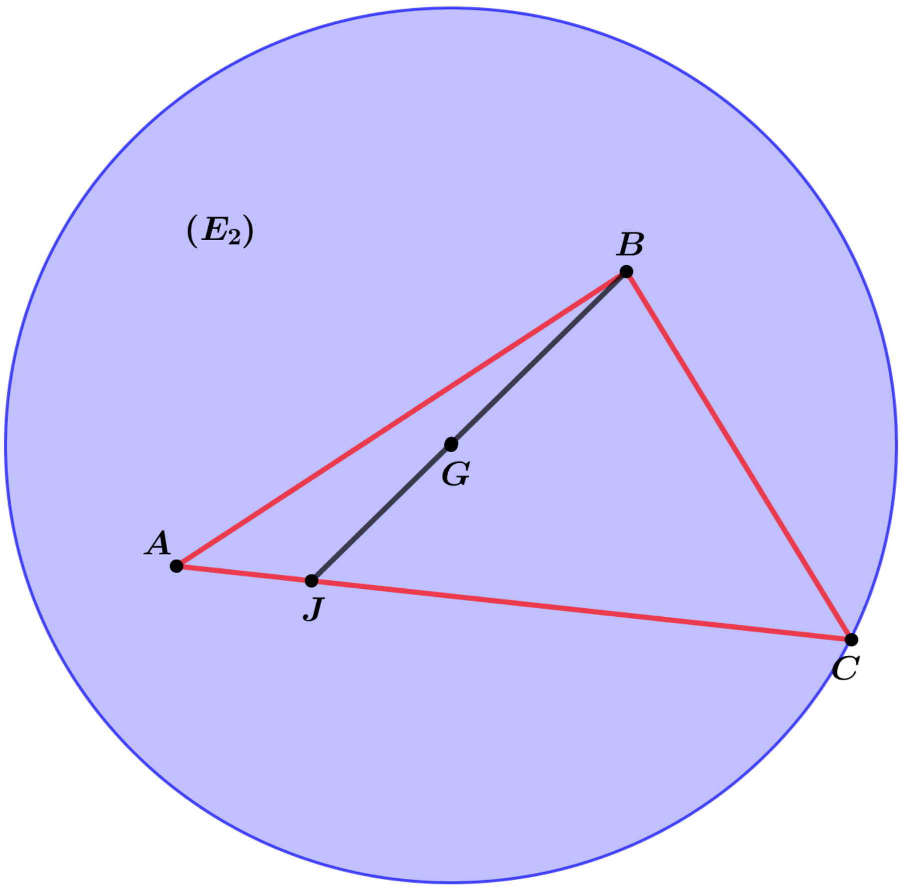
إذن قيمة α (حيث $\alpha \neq -1$) التي تحقق المعادلتين في آن واحد هي : $\boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لـ α هي $-\frac{1}{2}$ حتى يكون إحداثيا النقطة G هما $(7;1)$.

الإنشاء الهندسي :



(E_1)
B
I
K
G
A
J
C



(E_2)
B
G
A
J
C

التمرين رقم 03 :

- ABC مثلث كيفي . G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-2);(C,1)\}$.

I منتصف القطعة $[AC]$ ، J منتصف القطعة $[BC]$.

1- أنشئ النقطة K مرجح الجملة $\{(A,3);(C,1)\}$ ، ثم أنشئ النقطة G .

2- أثبت أن النقط B ، K و G في استقامية .

3- بين أن G مرجح الجملة $\{(I,3);(J,-2)\}$.

4- استنتج أن المستقيمين (BK) و (IJ) يتقاطعان في النقطة G .

5- ما طبيعة الرباعي $ABIG$ ؟

- M نقطة كيفية من المستوي .

6- أثبت أن الشعاع $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M ؛

ثم بين أن : $\vec{v}=2\overrightarrow{BI}$.

7- عين ثم أنشئ (E_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

8- عين ثم أنشئ (E_2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

حل مقترح :

1- إنشاء النقطة K مرجح الجملة $\{(A,3);(C,1)\}$ ، ثم إنشاء النقطة G :

ننشئ النقطة K بالعلاقة : $\boxed{\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$ ؛ و باستعمال خاصية التجميع فإن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B,-2),(K,4)\}$

و منه يمكن إنشاء النقطة G بالعلاقة : $\boxed{\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BK}}$

و يمكن إنشاء النقطة G بالعلاقة الشعاعية : $\boxed{\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

2- إثبات أن النقط B ، K و G في استقامية :

من السؤال السابق نعلم من خاصية التجميع أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B,-2);(K,4)\}$ و منه $\boxed{G\in(BK)}$ ؛ إذن النقط B ، K و G في استقامية .

3- نبين أن G مرجح الجملة $\{(I,3);(J,-2)\}$:

لدينا $\boxed{3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$ و بإدخال النقطة I و النقطة J بعلاقة شال نجد :

$\left(3\overrightarrow{GI}-2\overrightarrow{GJ}\right)+3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ ، إذن يكفي أن نبين أن : $\boxed{3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}}$

بما أن $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ فإن $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GI}$ و منه $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GI}$

و منه $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GI}$ و بعلاقة شال ينتج $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right)$ أي

$3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ، لكن نعلم أن : $\boxed{\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ و منه نجد :

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ؛ إذن : $\boxed{3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}}$ و منه ينتج :

$\boxed{3\overrightarrow{GI}-2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}}$ معناه أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(I,3);(J,-2)\}$.

4- استنتاج أن المستقيمين (BK) و (IJ) يتقاطعان في النقطة G : النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B,-2);(K,4)\}$ و منه ينتج $\boxed{G\in(BK)}$ ؛ و كذلك النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(I,3);(J,-2)\}$ و منه ينتج $\boxed{G\in(IJ)}$ ؛ إذن نستنتج أن : $(BK)\cap(IJ)=\{G\}$.

5- طبيعة الرباعي $ABIG$: هو متوازي أضلاع لأن قطريه متناصفان ... التعليل : لدينا $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ حيث $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$ و منه $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\left(2\overrightarrow{AI}\right)$ أي $\boxed{\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}}$ و منه فالنقطة K هي منتصف القطعة $[AI]$ ...(1) ؛ و من العلاقة الشعاعية $\boxed{\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BK}}$ نستنتج أن النقطة K هي منتصف القطعة $[BG]$ ...(2) ؛ إذن من (1) و (2) فإن القطرين $[AI]$ و $[BG]$ متناصفان و منه نستنتج أن الرباعي $ABIG$ متوازي أضلاع .

6- إثبات أن الشعاع $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M :

باستعمال علاقة شال ندخل النقطة B مثلا فنجد : $\vec{v}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$ أي $\boxed{\vec{v}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}$ و هو مستقل عن النقطة M .

نبين أن $\vec{v}=2\overrightarrow{BI}$: باستعمال علاقة شال ندخل النقطة I في المساواة السابقة فنجد $\vec{v}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}$

أي $\vec{v}=2\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}$ ؛ لكن $\boxed{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}}$ لأن النقطة I هي منتصف القطعة $[AC]$ و منه نجد :

$\boxed{\vec{v}=2\overrightarrow{BI}}$ و هو المطلوب .

7- تعيين ثم إنشاء (E_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$: بما أن G هي مرجح الجملة $\{(A,3);(B,-2);(C,1)\}$ فإنه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$ و لاحظ أن $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{v}=2\overrightarrow{BI}$ ؛ إذن $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{BI}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|$ معناه $\boxed{MG=BI}$ (BI مقدار ثابت) .

إذن مجموعة النقط $\left(E_1\right)$ هي **الدائرة** التي مركزها النقطة G و $r = BI$ نصف قطر لها .

8- تعيين ثم إنشاء $\left(E_2\right)$ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

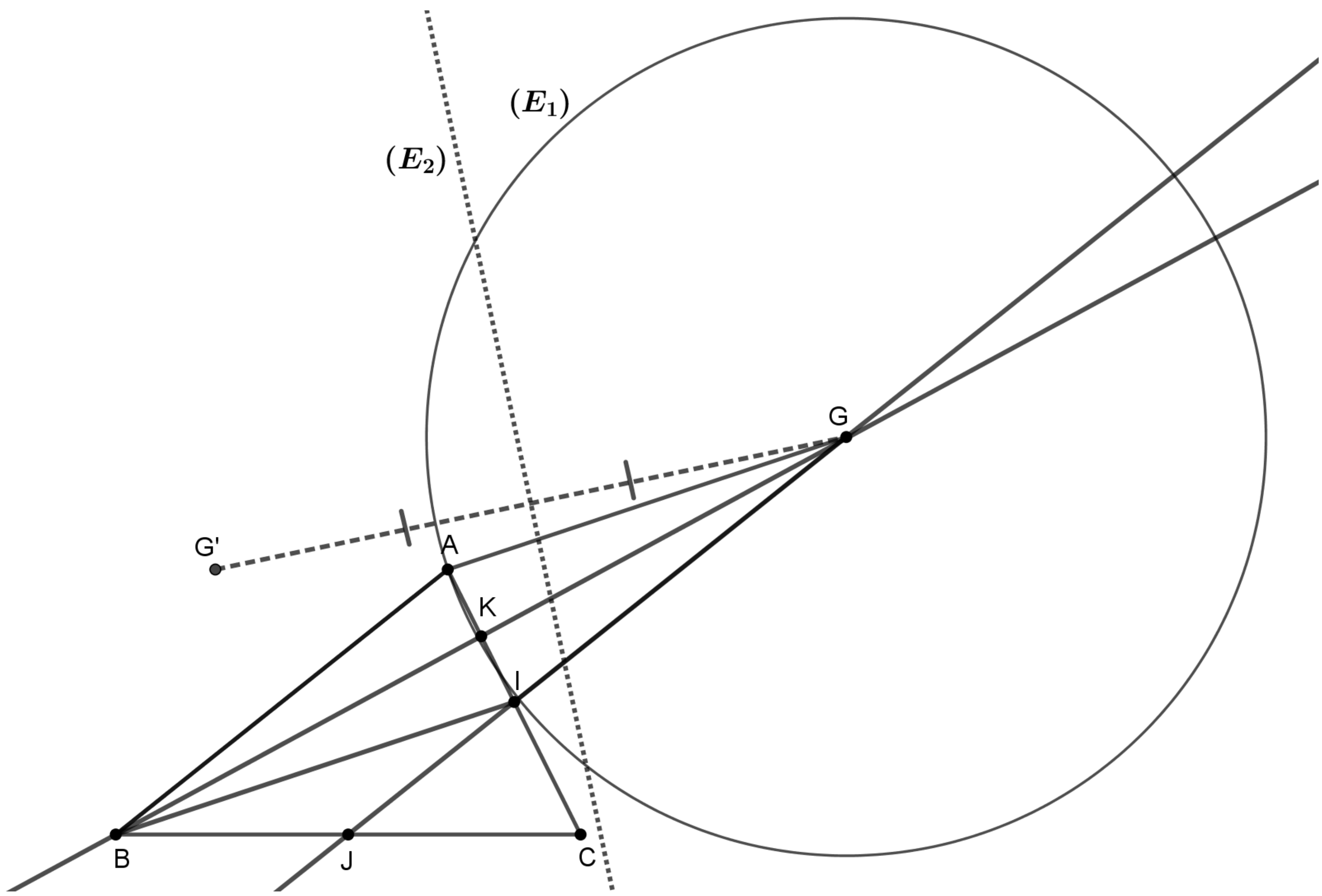
$\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$:

لتكن النقطة G' مرجح الجملة المثقلة $\left\{\left(A,-2\right);\left(B,-1\right);\left(C,1\right)\right\}$ و منه من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MG'}$ ؛ إذن $\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MG'}\right\|$

معناه $\boxed{MG = MG'}$.

إذن مجموعة النقط $\left(E_2\right)$ هي **المستقيم المحوري للقطعة** $\left[GG'\right]$.



التمرين رقم 04 :

ليكن $ABCD$ مربعا مركزه O و G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}$.

1) أنشئ I مرجح الجملة $\{(A,1);(C,3)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B,2);(D,6)\}$.

2) بين أن G هي مرجح للنقطتين I و J بمعاملين يطلب تعيينهما ثم أنشئ G .

3) لتكن (Δ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}\right\|=12(k+1)^2$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

أ- عبر عن الشعاع $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$.

ب- عين قيم k حتى تكون (Δ) دائرة نصف قطرها 1 يطلب تعيين مركزها .

4) لتكن M نقطة من المستوي . عين ثم أنشئ المجموعة (E) للنقط M التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

5) المستوي منسوب إلى المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

- ✓ جد إحداثيي النقطة G في هذا المعلم .
- ✓ جد إحداثيي G' مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,6);(C,1);(D,2)\}$.
- ✓ استنتج أن النقط O ، G و G' في استقامية .

حل مقترح :

1) I مرجح الجملة $\{(A,1);(C,3)\}$ و منه $\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}}$ و J مرجح الجملة $\{(B,2);(D,6)\}$ و منه $\boxed{\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}}$.

2) إثبات أن G هي مرجح للنقطتين I و J بمعاملين يطلب تعيينهما ثم إنشاء G :

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}$ ، و بما أن I هي مرجح الجملة $\{(A,1);(C,3)\}$ و منه حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(I,4);(B,2);(D,6)\}$ ، و بما أن J هي مرجح الجملة $\{(B,2);(D,6)\}$ فإنه حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(I,4);(J,8)\}$.

نعلم أن ضرب المعاملات في نفس العدد الحقيقي الغير المعدوم k لا يغير المرجح ، إذن من أجل $k=\frac{1}{4}$ فإن G هي مرجح الجملة $\{(I,1);(J,2)\}$.

و لإنشاء النقطة G نكتب العلاقة الشعاعية : $\boxed{\overrightarrow{IG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}}$.

3) أ- التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$:

G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}$ ؛ إذن من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$\boxed{\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}=12\overrightarrow{MG}}$.

ب- تعيين قيم k حتى تكون (Δ) دائرة نصف قطرها 1 يطلب تعيين مركزها :

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}\right\|=12(k+1)^2$ معناه $\left\|12\overrightarrow{MG}\right\|=12(k+1)^2$ أي $\boxed{MG=(k+1)^2}$.

(Δ) دائرة نصف قطرها 1 معناه $\boxed{(k+1)^2=1}$ و منه $k+1=-1$ أو $k+1=1$ معناه $\boxed{k=-2}$ أو $\boxed{k=0}$.

إذن من أجل $k\in\{-2,0\}$ فإن (Δ) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

4) تعيين ثم إنشاء المجموعة (E) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

النقطة I هي مرجح الجملة $\{(A,1);(C,1)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

إذن $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$ معناه $\left\|12\overrightarrow{MG}\right\|=6\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ و منه $\boxed{MG=MI}$ ؛ و بالتالي مجموعة النقط (E) هي المستقيم المحوري للقطعة $[GI]$.

5) المستوي منسوب إلى المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

✓ إيجاد إحداثيي النقطة G في هذا المعلم :

لإيجاد إحداثيي G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ نكتب الشعاع $\overrightarrow{AG}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ أي نعين عددين α و β حيث

$\boxed{\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}}$.

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}$ و منه نكتب العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{CG}+6\overrightarrow{DG}=\vec{0}$

و بإدخال A بعلاقة شال نجد $\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}+6\overrightarrow{DA}+6\overrightarrow{AG}=\vec{0}$ أي

$12\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CA}+6\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ و منه $12\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ أي

$12\overrightarrow{AG}+5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ ، و بما أن الرباعي $ABCD$ مربع فإن $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ و منه ينتج :

$12\overrightarrow{AG}+5\overrightarrow{BA}+9\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ معناه $12\overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}+9\overrightarrow{AD}$ و منه $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}}$ ؛ إذن $\alpha=\frac{5}{12}$ و $\beta=\frac{3}{4}$

و منه $\boxed{G\left(\frac{5}{12};\frac{3}{4}\right)}$ في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

✓ إيجاد إحداثيي G' مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,6);(C,1);(D,2)\}$:

نكتب العلاقة الشعاعية : $3\overrightarrow{AG'}+6\overrightarrow{BG'}+\overrightarrow{CG'}+2\overrightarrow{DG'}=\vec{0}$ و بإدخال النقطة A بعلاقة شال نجد :

$3\overrightarrow{AG'}+6\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG'}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AG'}=\vec{0}$ أي $12\overrightarrow{AG'}+6\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ و منه

$12\overrightarrow{AG'}+6\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ أي $12\overrightarrow{AG'}+7\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ ، و بما أن الرباعي $ABCD$ مربع فإن

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ و منه ينتج : $12\overrightarrow{AG'}+7\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ و منه $12\overrightarrow{AG'}=7\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$ معناه $\boxed{\overrightarrow{AG'}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}}$ و

منه $\boxed{G'\left(\frac{7}{12};\frac{1}{4}\right)}$ في المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

✓ استنتاج أن النقط O ، G و G' في استقامية :

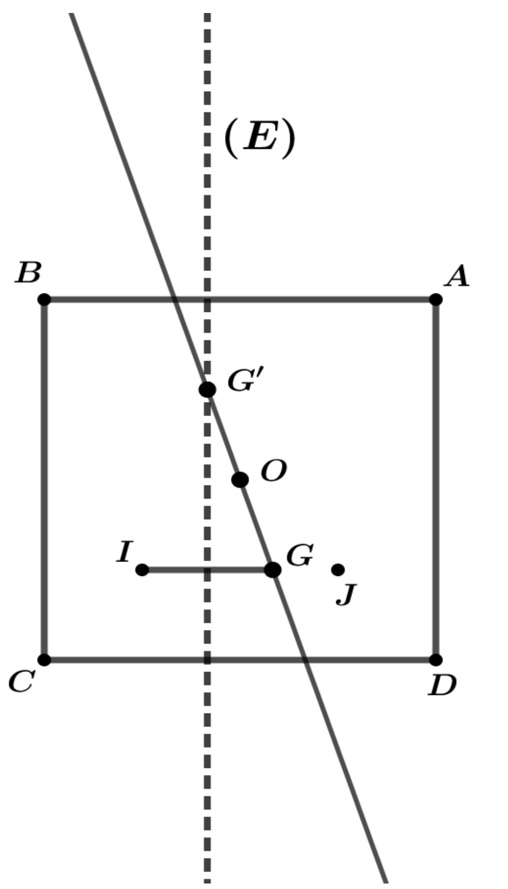
في المربع $ABCD$ لدينا $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ و بما أن O مركز المربع $ABCD$ فإن $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$ و منه

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ، إذن $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ في المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

نعين مركبتي الشعاعين $\overrightarrow{OG}$ و $\overrightarrow{OG'}$ في المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$: $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}x_G-x_O\\ y_G-y_O\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}-\frac{1}{12}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OG'}\begin{pmatrix}x_{G'}-x_O\\ y_{G'}-y_O\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{OG'}\begin{pmatrix}\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ ؛ و بما أن : $-\frac{1}{12}\times\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}=0$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{OG}$ و $\overrightarrow{OG'}$ <u>مرتبطان</u>

<u>خطيا</u> و بالتالي النقط O ، G و G' في استقامية .



التمرين رقم 05 :

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامية .

I- نعتبر I مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2k^2-5);(B,3k)\}$ و J مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k^2);(C,-3k^2+4)\}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

1) عين قيمة k حتى تكون النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ و النقطة J منتصف القطعة $[AC]$.

2) أنشئ شكلا مناسبا .

II- لتكن D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-2)\}$.

1) بين أن A هي مرجح النقطتين B و D مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

2) بين أن : $2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$.

3) عين ثم أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

III- لتكن النقطة G المعرفة بالعلاقة : $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

1) بين أن : $G \in [CD]$.

2) أثبت أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(J,5);(I,-2)\}$ ، ثم أنشئ G .

3) استنتج أن النقط I ، J و G في استقامية .

حل مقترح :

1) تكون النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ إذا و فقط إذا كانت المعاملات متساوية معناه :

$2k^2-5=3k$ أي $2k^2-3k-5=0$ و هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي k .

$\Delta=49$ و نجد : $\boxed{k=\frac{5}{2}}$ أو $\boxed{k=-1}$.

و تكون النقطة J منتصف القطعة $[AC]$ إذا و فقط إذا كانت المعاملات متساوية معناه :

$k^2=-3k^2+4$ أي $4k^2=4$ معناه $k^2=1$ و منه $\boxed{k=-1}$ أو $\boxed{k=1}$.

إذن قيمة k التي تحقق المعادلتين في آن واحد هي $\boxed{k=-1}$ و من أجلها تكون النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ و النقطة J منتصف القطعة $[AC]$.

II-

1) تبيان أن A هي مرجح النقطتين B و D مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما :

D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-2)\}$ معناه $3\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ و بإدخال النقطة A بعلاقة شال نجد

$3\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ معناه $\boxed{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}}$ و بالتالي A هي مرجح النقطتين B و D المرفقتين بالمعاملين 2 و 1 على الترتيب .

2) إثبات أن : $2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$.

بإدخال النقطة A بعلاقة شال نجد $2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=2\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AD}$ أي

$2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=6\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ و بما أن $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ لأن A مرجح الجملة $\{(B,2);(D,1)\}$

فإنه ينتج $2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=6\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{AC}$ ، و بما أن J منتصف القطعة $[AC]$ فإن $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AJ}$ و منه $3\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AJ}$ ،

إذن ينتج $2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=6\overrightarrow{JA}+6\overrightarrow{AJ}$ أي $2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=6\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AJ}\right)=\vec{0}$ لأن $\overrightarrow{JA}$ و $\overrightarrow{AJ}$ شعاعان متعاكسان

3) تعيين ثم إنشاء (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

بما أن $2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$ و $2+3+1=6$ و $6\neq 0$ فإن J هي مرجح الجملة المثقلة $\{(B,2);(C,3);(D,1)\}$ ؛ إذن

من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن : $2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MJ}$.

و من جهة أخرى ، النقطة I هي مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1)\}$ (لأن I منتصف القطعة $[AB]$) و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ ؛ إذن $\left\|2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $\left\|6\overrightarrow{MJ}\right\|=3\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ معناه $\boxed{MJ=MI}$ ، إذن مجموعة النقط (Γ) هي **المستقيم المحوري** للقطعة $[IJ]$.

-III

1) تبيان أن : $G\in[CD]$.

حتى نثبت أن $G\in[CD]$ يكفي أن نثبت أن G هي مرجح للجملة المثقلة $\{(C,\alpha);(D,\beta)\}$ حيث α و β عددان حقيقيان **من نفس الإشارة** .

لدينا $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ معناه G مرجح للجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-2);(C,5)\}$ ، لكن نعلم أن النقطة D هي مرجح للجملة $\{(A,3);(B,-2)\}$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح للجملة المثقلة $\{(C,5);(D,1)\}$.

5 و 1 **من نفس الإشارة** ؛ إذن $G\in[CD]$.

2) إثبات أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(J,5);(I,-2)\}$ ، ثم إنشاء G :

لدينا $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و بعلاقة شال نجد $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GI}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{GJ}+5\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ أي $5\overrightarrow{GJ}-2\overrightarrow{GI}+\left(3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{JC}\right)=\vec{0}$ ؛ إذن حتى تكون G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(J,5);(I,-2)\}$ يكفي أن نثبت أن $\boxed{3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{JC}=\vec{0}}$:

بما أن النقطة I هي منتصف القطعة $[AB]$ و J هي منتصف القطعة $[AC]$ فإن $\boxed{-2\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}}$ و $\boxed{\overrightarrow{JC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ و

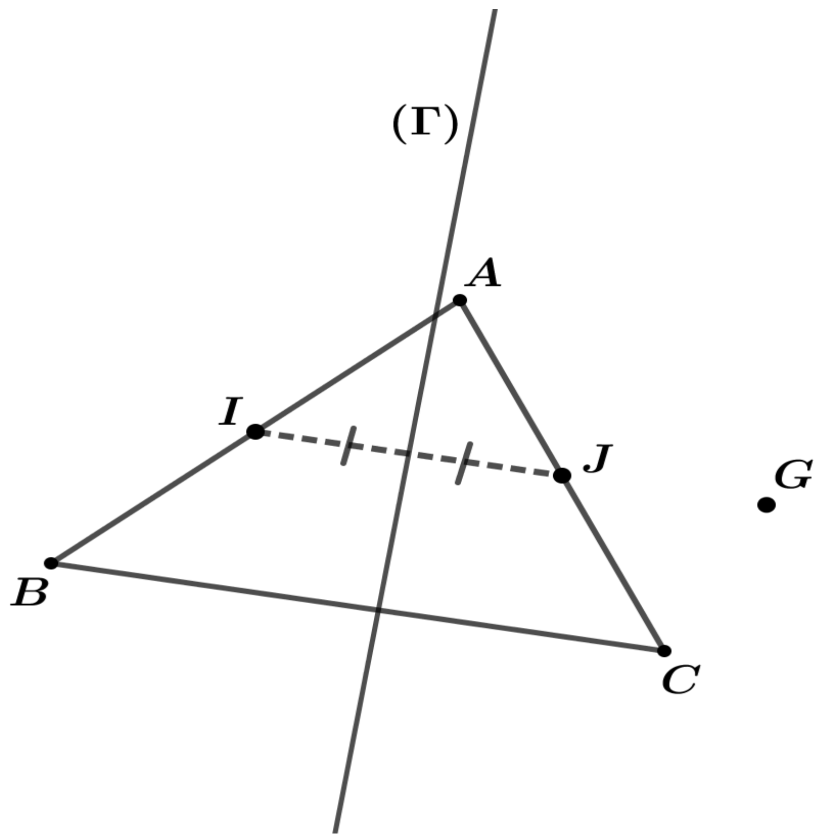
بالتالي $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{JC}=3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ ، لكن G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-2);(C,5)\}$ و منه

نكتب $\boxed{\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{CA}}$ معناه $3\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{BA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{CA}$ و منه $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{JC}=-\overrightarrow{BA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$

معناه $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. إذن $5\overrightarrow{GJ}-2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ و النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(J,5);(I,-2)\}$.

3) النقطة G مرجح النقطتين I و J المرفقتين بالمعاملين -2 و 5 على الترتيب ، إذن النقط I ، J و G في استقامية .

الإنشاء الهندسي : لإنشاء النقطة G نكتب : $\boxed{\overrightarrow{IG}=\frac{5}{3}\overrightarrow{IJ}}$.



كتابة الأستاذ : حناش نبيل

التمرين رقم 06 :

ABC مثلث كيفي . F ، G و H ثلاث نقط من المستوي حيث : G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ و F تحقق : $\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و H منتصف القطعة $[AB]$.

1) أ- أنشئ النقطة G .

ب- بين أن F مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها ، ثم أنشئ F باستعمال خاصية التجميع .

2) بين أن G مرجح الجملة المثقلة $\{(H,2);(C,-1)\}$.

3) عين ثم أنشئ المجموعة (E_1) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$$

4) عين ثم أنشئ المجموعة (E_2) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k طبيعة المجموعة (Δ) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=4(k-1)$$

6) نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط $A(0;3)$ ، $B(-1;0)$ ، $C(3;1)$.

✓ جد العددين β و γ حتى تكون النقطة $W(0;1)$ مرجحا للجملة $\{(A,2);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.

حل مقترح :

1) إنشاء G : G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ و بالتالي $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$ و منه $\boxed{\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CB}}$.

2) إثبات أن F مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها :

لدينا $\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ معناه $4\overrightarrow{AF}-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ و بإدخال النقطة F بعلاقة شال نجد :

$4\overrightarrow{AF}-5\overrightarrow{AF}-5\overrightarrow{FB}+2\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{AF}-5\overrightarrow{FB}+2\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ أي $\boxed{\overrightarrow{AF}+5\overrightarrow{BF}-2\overrightarrow{CF}=\vec{0}}$ و منه F هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,5);(C,-2)\}$.

✓ إنشاء F باستعمال خاصية التجميع :

$1+5=6$ و $6\neq 0$ ؛ إذن مرجح الجملة $\{(A,1);(B,5)\}$ موجود و ليكن I ، و لإنشاء I نكتب : $\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}}$

حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح النقطتين C و I المرفقتين بالمعاملين -2 و 6 و لإنشاء G نكتب :

$\overrightarrow{CG}=\frac{6}{4}\overrightarrow{CI}$ معناه $\boxed{\overrightarrow{CG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}}$.

2) إثبات أن G مرجح الجملة المثقلة $\{(H,2);(C,-1)\}$:

G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ و H هي منتصف القطعة $[AB]$ و بالتالي H مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1)\}$ ؛

إذن حسب خاصية التجميع فإن G مرجح الجملة المثقلة $\{(H,2);(C,-1)\}$.

3) تعيين ثم إنشاء المجموعة (E_1) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$$

G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+1-1)\overrightarrow{MG}$ أي $\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}}$.

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$ هو شعاع مستقل عن النقطة M و بإدخال B بعلاقة شال نجد $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}$ أي

$\boxed{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}}$ ؛ إذن $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$ معناه $\boxed{MG=AB}$.

إذن مجموعة النقط (E_1) هي **الدائرة** التي مركزها G و نصف قطرها $r=AB$.

4) تعيين ثم إنشاء المجموعة (E_2) للنقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

H هي مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(1+1)\overrightarrow{MH}$ أي

$\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MH}}$ ؛ إذن $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{MH}\right\|$ معناه $\boxed{MG=MH}$.

إذن مجموعة النقط (E_2) هي **المستقيم المحوري** للقطعة $[GH]$.

5) المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي k طبيعة مجموعة النقط (Δ) :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=4(k-1)$$

- إذا كان $k<1$ فإن $4(k-1)<0$ و بالتالي $(\Delta)=\varnothing$ لأن الموجب لا يساوي السالب .
- إذا كان $k=1$ فإن $4(k-1)=0$ و منه $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=0$ معناه $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=0$ أي $MG=0$ و بالتالي M تنطبق على G إذن : $(\Delta)=\{G\}$.
- إذا كان $k>1$ فإن $4(k-1)>0$ و منه $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=4(k-1)$ معناه $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=4(k-1)$ أي $MG=4(k-1)$ ؛ إذن : (Δ) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r=4(k-1)$.

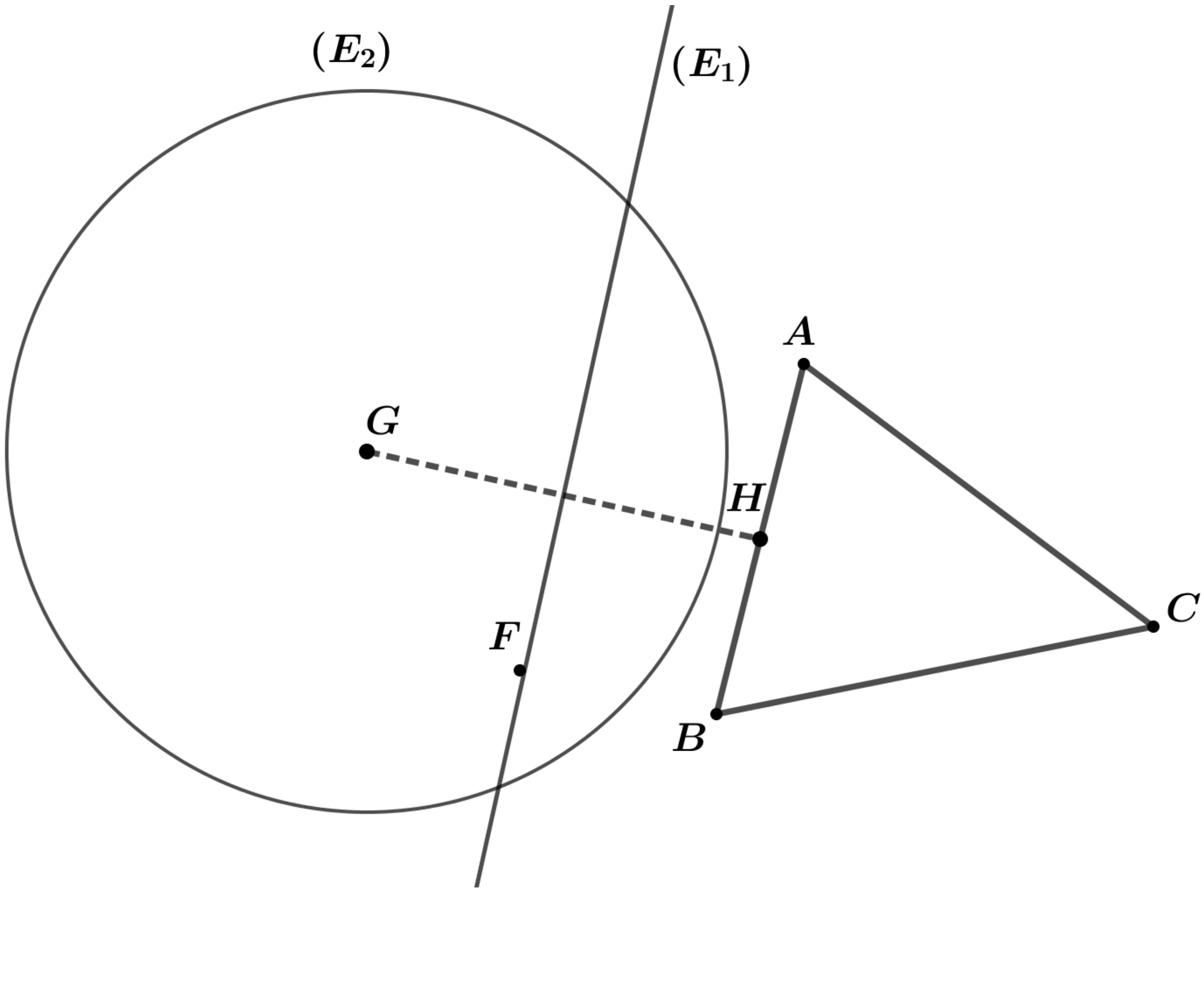
6) إيجاد العددين β و γ حتى تكون النقطة $W(0;1)$ مرجحا للجملة $\{(A,2);(B,\beta);(C,\gamma)\}$:

$W(x_w;y_w)$ مرجح للجملة $\{(A,2);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ معناه : $\begin{cases} x_w = \dfrac{-\beta+3\gamma}{2+\beta+\gamma} \\ y_w = \dfrac{6+\gamma}{2+\beta+\gamma} \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \dfrac{-\beta+3\gamma}{2+\beta+\gamma} = 0 \\ \dfrac{6+\gamma}{2+\beta+\gamma} = 1 \end{cases}$

معناه $\begin{cases} -\beta+3\gamma = 0 \\ 6+\gamma = 2+\beta+\gamma \end{cases}$ أي $\begin{cases} -\beta+3\gamma = 0 \\ \beta = 4 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} \beta = 4 \\ \gamma = 4/3 \end{cases}$.

إذن النقطة $W(0;1)$ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,4);(C,4/3)\}$.

الإنشاء الهندسي :



التمرين رقم 07 :

ABC مثلث متقاس الأضلاع طول ضلعه 6 . (الوحدة هي السنتيمتر)

H و G نقطتان من المستوي حيث $2\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ و G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$.

1) أنشئ النقطة G .

2) أثبت أن H هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما ثم أنشئ H .

3) بين أن النقطة G منتصف القطعة $[CH]$.

4) عين ثم أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|<4\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$$

5) نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط $A(0;1)$ ، $B(0;5)$ ، $C(2;1)$.

و لتكن النقطة G_m مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-m^2+4);(B,m^2-2m);(C,2m)\}$ مع $m\in\mathbb{R}$.

أ- عين قيم m التي من أجلها تكون G_m موجودة .

ب- عين إحداثيي النقطة G_m بدلالة m .

جـ- عين المحل الهندسي للنقط G_m لما m يمسح $\mathbb{R}$.

حل مقترح :

1) إنشاء النقطة G : G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ معناه $3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ و باستعمال علاقة شال نجد $3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AG}=\vec{0}$ أي $4\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ و منه $\boxed{\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$.

2) إثبات أن H هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما ثم إنشاء H :

لدينا $2\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ و باستعمال علاقة شال نجد $2\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ أي $3\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ و منه $\boxed{3\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{BH}=\vec{0}}$

إذن H هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و -1 على الترتيب .

لإنشاء H نكتب : $\boxed{\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$.

3) تبيان أن G منتصف القطعة $[CH]$:

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ و H مرجح الجملة $\{(A,3);(B,-1)\}$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع فإن

G هي مرجح الجملة $\{(H,2);(C,2)\}$ (لأن $3+(-1)=2$) ؛ المعاملات متساوية ؛ إذن G تمثل منتصف القطعة $[CH]$.

4) تعيين ثم إنشاء (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|<4\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$$

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(3-1+2)\overrightarrow{MG}$ أي $\boxed{3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}}$.

الشعاع $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$ مستقل عن النقطة M و باستعمال علاقة شال نكتب $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}$ أي

$\boxed{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}}$ ؛ إذن $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|<4\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|<4\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$ معناه $\boxed{MG<6}$.

إذن مجموعة النقط (Γ) هي القرص المفتوح (ماعدا الحافة) الذي مركزه G و نصف قطره $r=6$.

(5

أ- تعيين قيم m التي من أجلها تكون G_m موجودة :

تكون G_m موجودة إذا و فقط إذا كان $-m^2+4+m^2-2m+2m\neq 0$ معناه $\boxed{4\neq 0}$ و هي محققة من أجل كل عدد حقيقي m .

إذن G_m موجودة من أجل كل $m\in\mathbb{R}$.

ب- تعيين إحداثيي النقطة G_m بدلالة m :

$$\begin{cases} x_{G_m}=\dfrac{(-m^2+4)\times 0+(m^2-2m)\times 0+2m\times 2}{4} \\ y_{G_m}=\dfrac{(-m^2+4)\times 1+(m^2-2m)\times 5+2m\times 1}{4} \end{cases}$$ و منه $\boxed{G_m(m;m^2-2m+1)}$.

جـ تعيين المحل الهندسي للنقط G_m لما m يمسح $\mathbb{R}$:

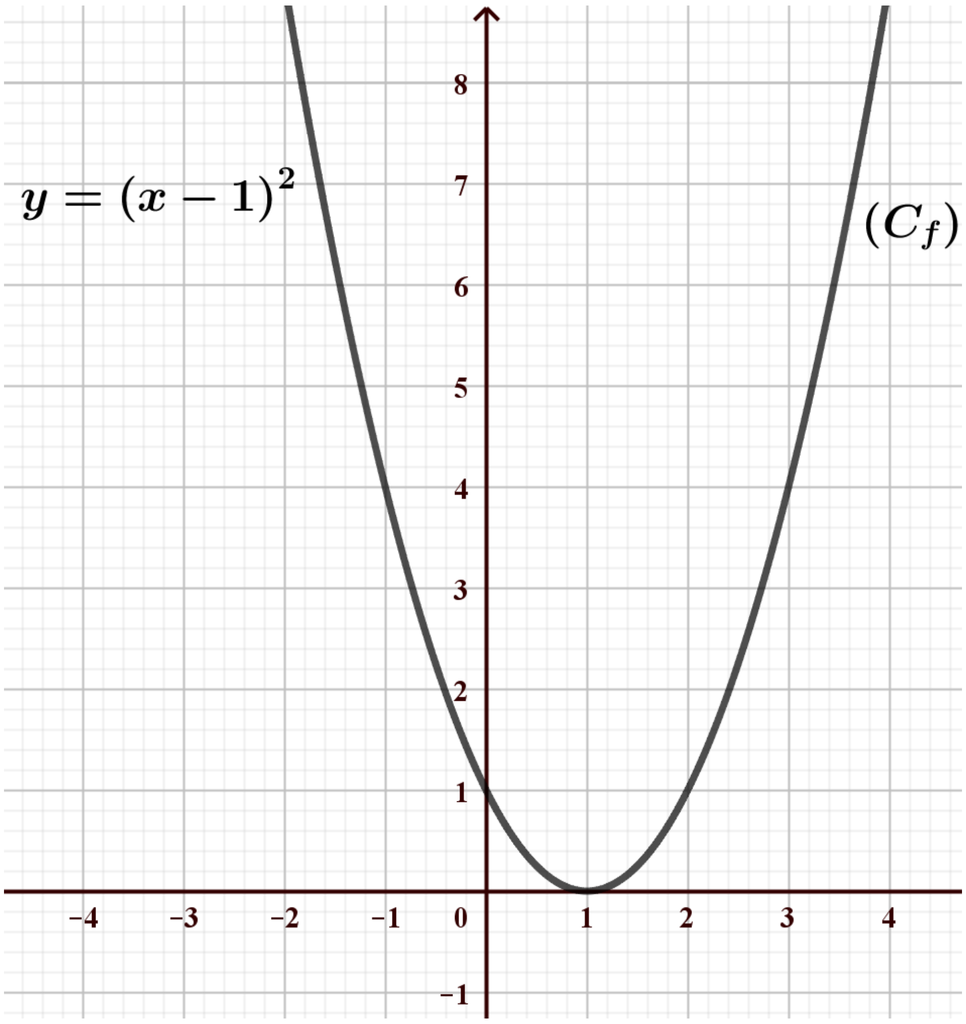
من السؤال السابق ؛ $G_m(m;m^2-2m+1)$ أي $G_m\left(m;(m-1)^2\right)$ حيث $m\in\mathbb{R}$.

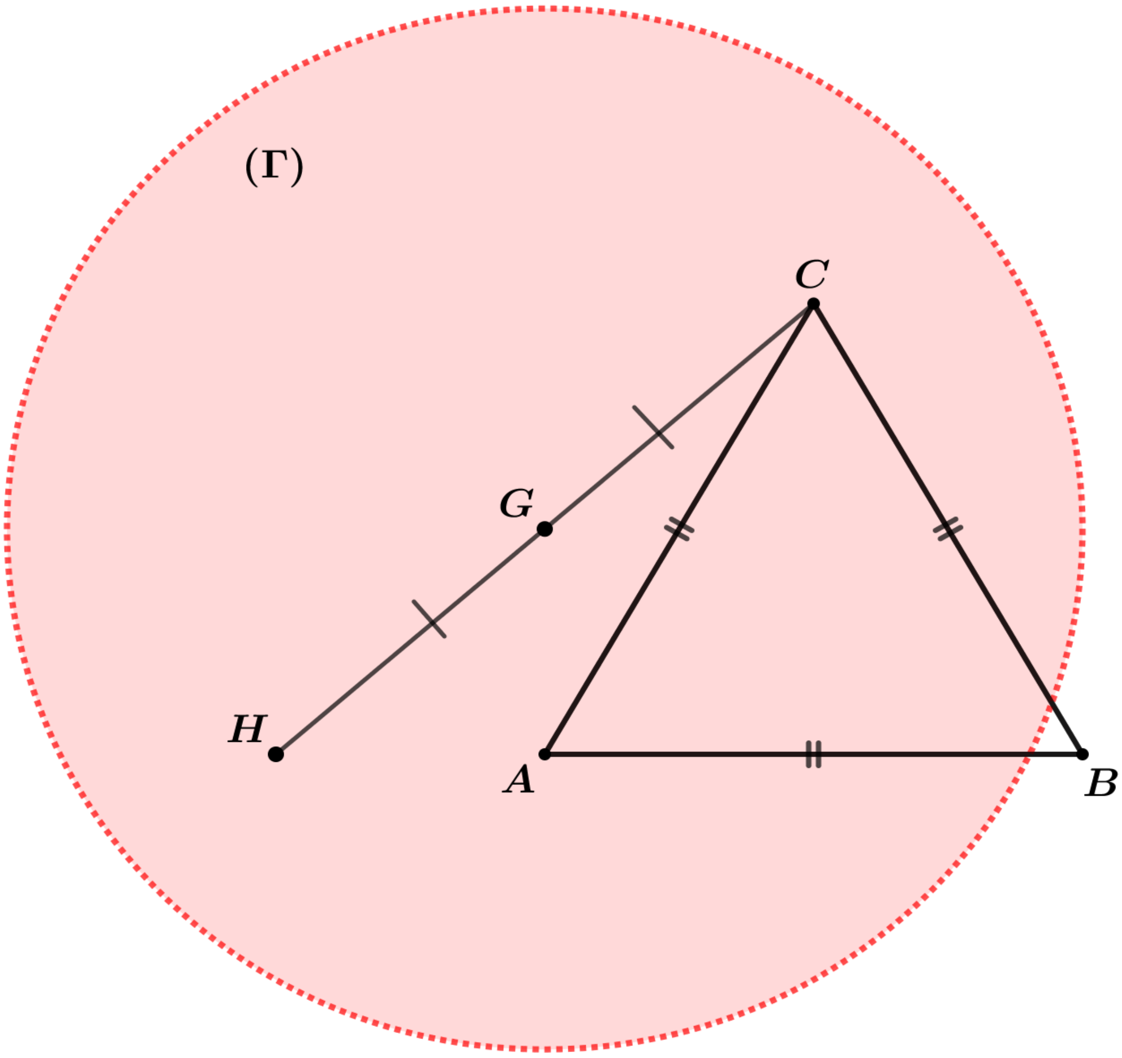
لو نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\boxed{f(x)=(x-1)^2}$ فإن تمثيلها البياني (C_f) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث

$\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=(x-1)^2 \end{cases}$ و بالتالي من أجل كل $m\in\mathbb{R}$ فإن $G_m\in(C_f)$ ؛ إذن مجموعة النقط G_m لما m يمسح $\mathbb{R}$ هو القطع المكافئ

الممثل للدالة f .

ملاحظة : (C_f) هو صورة (P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.





التمرين رقم 08 :

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامية و ليكن k عدد حقيقي من المجال $[-1;1]$.

ليكن G_k مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k^2+1);(B,k);(C,-k)\}$.

1) مثل النقط A ، B و C ، I منتصف القطعة $[BC]$ ، و أنشئ G_1 و G_{-1} .

2) برر وجود G_k من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-1;1]$ و بين أن : $\overrightarrow{AG_k}=-\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

3) لتكن N نقطة من (BC) .

✓ هل يمكن أن تنطبق N على G_k ؟ علل .

4) أدرس إتجاه تغير الدالة $f:x\mapsto -\frac{x}{x^2+1}$ على المجال $[-1;1]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

5) استنتج مجموعة النقط G_k (أو المحل الهندسي للنقطة G_k) عندما يمسح k المجال $[-1;1]$.

حل مقترح :

1) G_1 هي مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,-1)\}$ ، و بما أن $2+1-1=2$ و $2\neq 0$ فإن G_1 موجودة و وحيدة و يمكن إنشاؤها بالعلاقة الشعاعية : $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$ أي $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$ و منه $\boxed{\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}}$. و G_{-1} هي مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$ ، و بما أن $2-1+1=2$ و $2\neq 0$ فإن G_{-1} موجودة و وحيدة و يمكن إنشاؤها بالعلاقة الشعاعية : $\overrightarrow{AG_{-1}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG_{-1}}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$ أي $\boxed{\overrightarrow{AG_{-1}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}}$.

2) بما أن $k^2+1+k-k=k^2+1$ ، و من أجل كل عدد حقيقي $k\in[-1;1]$ فإن $k^2+1>0$ و بالتالي $k^2+1\neq 0$ ، إذن النقطة G_k موجودة و وحيدة من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[-1;1]$.

و لدينا : $\overrightarrow{AG_k}=\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{AB}-\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AG_k}=-\frac{k}{k^2+1}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$ أي $\overrightarrow{AG_k}=-\frac{k}{k^2+1}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$ و منه $\boxed{\overrightarrow{AG_k}=-\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}}$ و هو المطلوب .

3) $N\in(BC)$ ، لو تنطبق النقطة N على G_k فإنه ينتج : $G_k\in(BC)$ ، حيث نعلم أن G_k هي مرجح الجملة $\{(A,k^2+1);(B,k);(C,-k)\}$ و بالتالي $G_k\in(BC)$ إذا و فقط إذا كان معامل A معدوما ، أي $k^2+1=0$ <u>تناقض</u> لأنه من أجل كل عدد حقيقي $k\in[-1;1]$ فإن $k^2+1\neq 0$ ؛ إذن لا يمكن أن تنطبق N على G_k .

4) دراسة إتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1;1]$:

f قابلة للإشتقاق على المجال $[-1;1]$ و من أجل كل عدد حقيقي $x\in[-1;1]$:

$f'(x)=-\frac{1(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ و بما أنه من أجل كل $x\in[-1;1]$ نعلم أن $(x^2+1)^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$

من إشارة البسط x^2-1 . نضع $f'(x)=0$ معناه $x^2-1=0$ يكافئ $x^2=-1$ أو $x^2=1$.

x	-1		1
$f'(x)$	0	$-$	0

من أجل كل عدد حقيقي $x\in[-1;1]$ لدينا $f'(x)\leq 0$ و منه f **متناقصة تماما** على المجال $[-1;1]$.

جدول التغيرات :

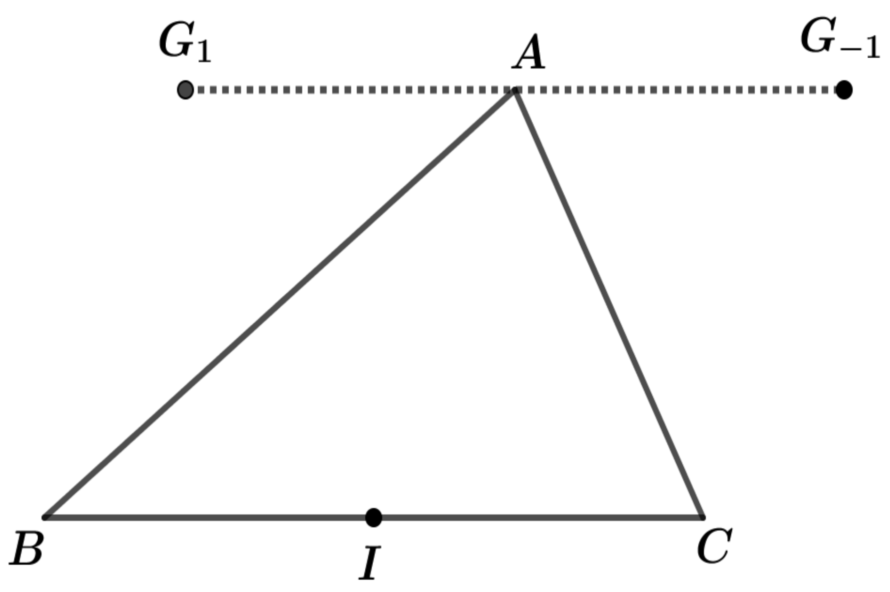
x	-1		1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

5) استنتاج المحل الهندسي للنقطة G_k عندما يمسح k المجال $[-1;1]$:

من جدول التغيرات ، عندما يمسح k المجال $[-1;1]$ فإن $\boxed{-\frac{1}{2}\leq-\frac{k}{k^2+1}\leq\frac{1}{2}}$ و بما أن $\overrightarrow{AG_k}=-\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$ فإن $\overrightarrow{BC}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A .

من أجل $k=-1$: $-\frac{k}{k^2+1}=\frac{1}{2}$ و $\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و من أجل $k=1$: $-\frac{k}{k^2+1}=-\frac{1}{2}$ و $\overrightarrow{AG_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

المحل الهندسي للنقطة G_k عندما يمسح k المجال $[-1;1]$ هي القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$ من المستقيم (Δ) .



التمرين رقم 09 :

ABC مثلث متساوي الساقين في A و ليكن الإرتفاع $[AH]$ المتعلق بالضلع $[BC]$ حيث : $AH=4$ (الوحدة هي السنتيمتر) .

1) عين ثم أنشئ النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 1 ، 1 على الترتيب .

2) M نقطة من المستوي . عين طويلة الشعاع $\vec{U}$ حيث : $\vec{U}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

- نفرض فيما يلي أن : $\|\vec{U}\|=8$ (الوحدة هي السنتيمتر) .

3) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\vec{U}\|$$

4) لتكن G_n مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

✓ أثبت أن النقطة G_n موجودة من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، و أن النقطة G_n تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[AH]$.

5) بين أن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\|=n\|\vec{U}\|$ هي دائرة (ζ_n) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

6) تحقق من أن النقطة A تنتمي إلى (ζ_n) ثم استنتج المسافة AG_n بدلالة n .

حل مقترح :

1) G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ و منه $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ؛ و لإنشاء النقطة G نكتب :

$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$.

2) الشعاع $\vec{U}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M و باستعمال علاقة شال نكتب :

$\vec{U}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}$ أي $\vec{U}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$ و بالتالي $\boxed{\|\vec{U}\|=\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\|}$.

تنبيه : $\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\|\leq\|\overrightarrow{BA}\|+\|\overrightarrow{CA}\|$

المثلث ABC متساوي الساقين في A و $[AH]$ هو الإرتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ ؛ إذن $\boxed{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{HA}}$ و بالتالي

$\|\vec{U}\|=\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\|=2\|\overrightarrow{HA}\|$ حيث $\|\overrightarrow{HA}\|=4$ و منه ينتج : $\boxed{\|\vec{U}\|=8}$.

3) تعيين ثم إنشاء (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\vec{U}\|$$

G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(2+1+1)\overrightarrow{MG}$ أي $\boxed{2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}}$.

إذن $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\vec{U}\|$ تكافئ $\|4\overrightarrow{MG}\|=8$ معناه $\boxed{MG=2}$.

إذن مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r=2$.

4) لتكن G_n مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

✓ إثبات أن النقطة G_n موجودة من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، و أن النقطة G_n تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[AH]$:

لدينا $2+n+n=2+2n$ و $\boxed{2+2n\neq 0}$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ إذن النقطة G_n موجودة من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$.

لدينا $\boxed{2\overrightarrow{G_nA}+n\overrightarrow{G_nB}+n\overrightarrow{G_nC}=\vec{0}}$ و باستعمال علاقة شال نجد $2\overrightarrow{G_nA}+n\overrightarrow{G_nH}+n\overrightarrow{HB}+n\overrightarrow{G_nH}+n\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ أي $2\overrightarrow{G_nA}+2n\overrightarrow{G_nH}+n\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=\vec{0}$ ، و بما أن H هي منتصف القطعة $[BC]$ (لأن $[AH]$ هو الإرتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث المتساوي الساقين في A) فإن $\overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{HC}$ شعاعان متعاكسان و بالتالي $\boxed{\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}}$.

إذن ينتج $\boxed{\overrightarrow{G_nA}+n\overrightarrow{G_nH}=\vec{0}}$ و بالتالي G_n هي مرجح النقطتين A و H المرفقتين بالمعاملين 1 و n على الترتيب .

1 و n من نفس الإشارة (كلاهما عدد موجب تماما) و منه نستنتج أن $G_n\in[AH]$.

5) تبيان أن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=n\left\|\vec{U}\right\|$ هي دائرة (ζ_n) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها :

G_n مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$\boxed{2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}=(2+2n)\overrightarrow{MG_n}}$ و بالتالي $\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=n\left\|\vec{U}\right\|$ تكافئ $\left\|(2+2n)\overrightarrow{MG_n}\right\|=n\left\|\vec{U}\right\|$

معناه $2\left\|(n+1)\overrightarrow{MG_n}\right\|=8n$ و منه $\boxed{MG_n=\dfrac{4n}{n+1}}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

إذن مجموعة النقط التي تحقق $\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=n\left\|\vec{U}\right\|$ هي الدائرة التي مركزها G_n و نصف قطرها $r=\dfrac{4n}{n+1}$.

6) من أجل $M=A$ في المساواة $\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=n\left\|\vec{U}\right\|$ نجد :

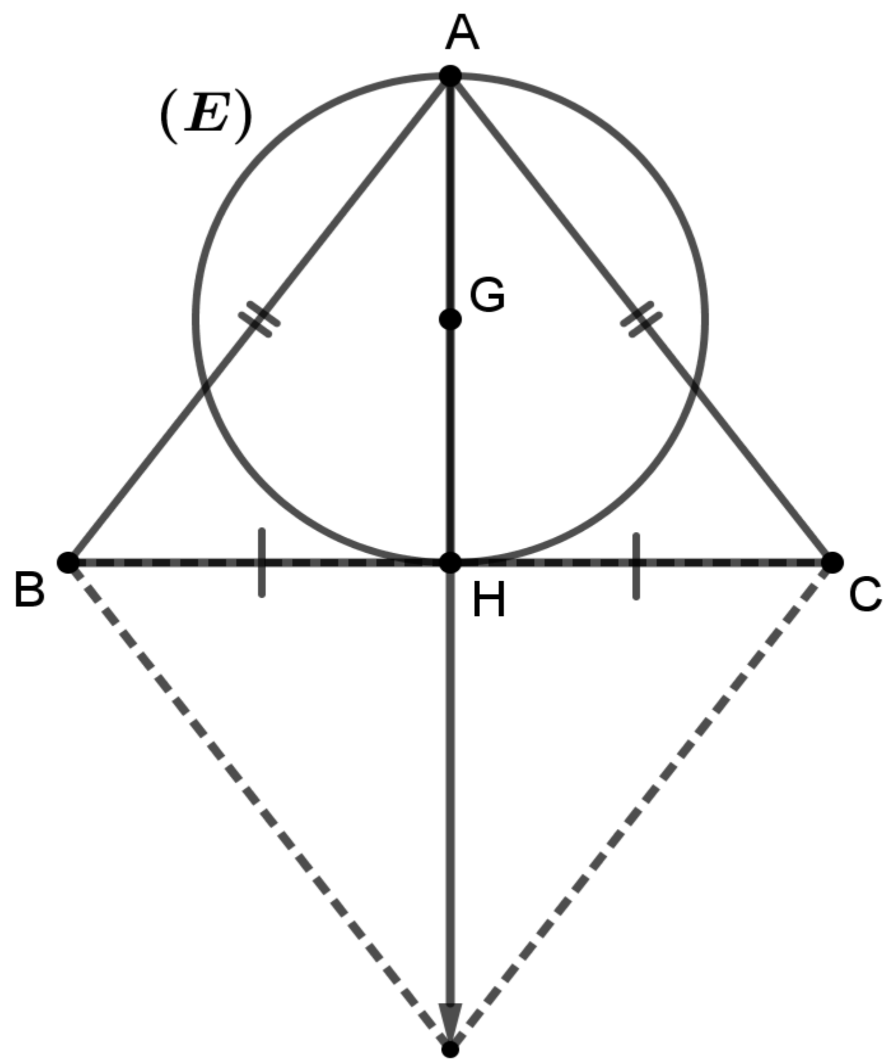
$\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{AA}+n\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}\right\|=n\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=n\left\|2\overrightarrow{AH}\right\|=8n=n\left\|\vec{U}\right\|$ لأن

$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AH}}$ و نعلم أن $\boxed{AH=4}$ و $\boxed{\left\|\vec{U}\right\|=8}$ ؛ إذن من أجل $M=A$ ، المساواة $\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=n\left\|\vec{U}\right\|$ محققة ، و منه نستنتج أن $A\in(\zeta_n)$.

- استنتاج المسافة AG_n :

النقطة G_n هي مركز الدائرة (ζ_n) ، و بما أن $A\in(\zeta_n)$ فإن : $AG_n=r$ معناه $\boxed{AG_n=\dfrac{4n}{n+1}}$.

الإنشاء الهندسي :



يقول عالم الرياضيات جورج بوليا : "الهندسة هي علم التبرير الصحيح على أشياء غير صحيحة"

التمرين رقم 10 :

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و النقطة I منتصف $[AB]$. المستقيمان (BD) و (CI) يتقاطعان في النقطة G .

1) أرسم شكلا مناسبا .

2) أ- برهن أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ......(1) .

ب- ماذا تمثل النقطة G بالنسبة إلى المثلث ABC ؟

3) أ- أنشئ النقطة K مرجح $(A,1)$ ، $(B,1)$ و $(C,-1)$.

ب- برهن أن K هي أيضا مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$.

4) أ- استنتج من العلاقة (1) أن النقطة A مرجح $(D,1)$ ، $(G,3)$ و $(C,-2)$.

ب- بين أن A منتصف القطعة $[DK]$.

5) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

6) أ- من أجل أي قيم للعدد الحقيقي m المرجح I_m للجملة $\{(D,m);(G,3);(C,-2)\}$ يكون موجودا ؟

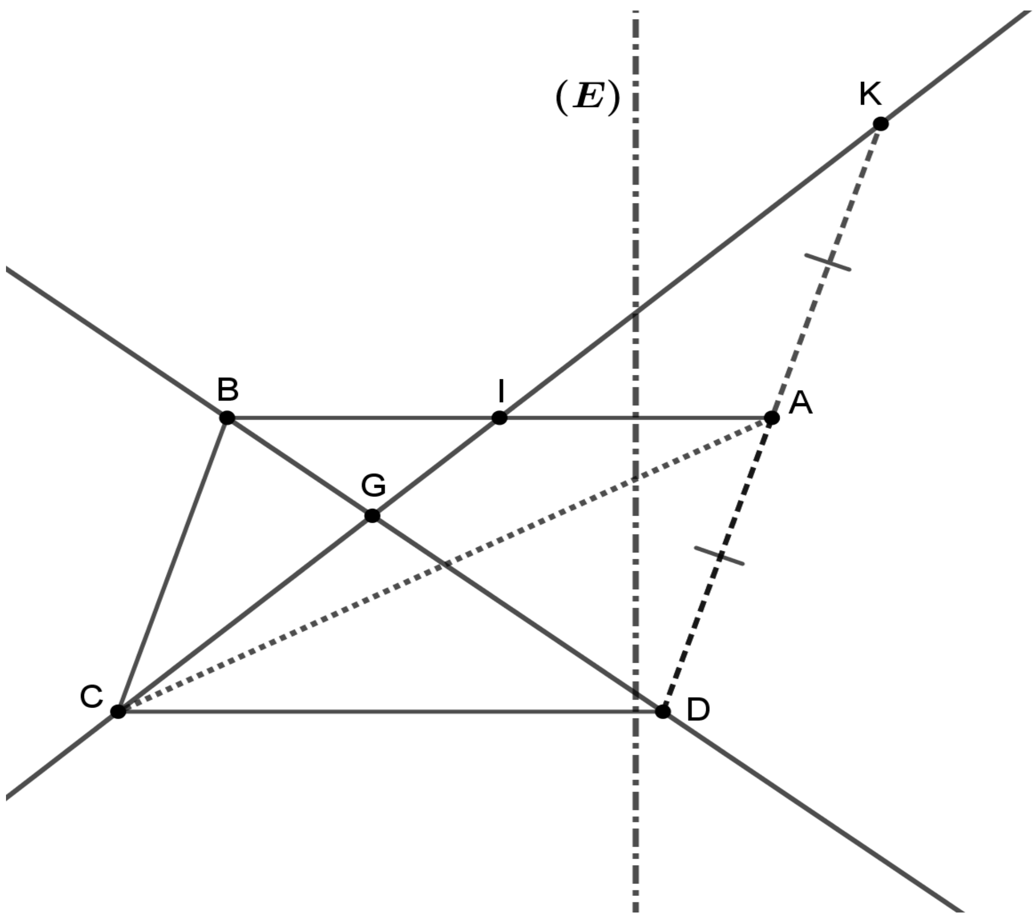
ب- عندما تكون I_m موجودة ، بين أن : $\overrightarrow{DI_m}=\dfrac{1}{m+1}\overrightarrow{DK}$.

جـ- أدرس تغيرات الدالة $f:x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$ و شكل جدول تغيراتها (حدد النهايات عند أطراف مجموعة التعريف) .

د- استنتج المحل الهندسي للنقطة I_m عندما يمسح m المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$.

حل مقترح :

1) الإنشاء الهندسي :



2) إثبات أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ......(1) .

G تمثل **مركز ثقل المثلث** ABC لأن G هي نقطة تقاطع متوسطين في المثلث ABC :

المتوسط المتعلق بالضلع $[AB]$ و هو المستقيم (CI) و المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ و هو المستقيم (BD) (المستقيم (BD) يقطع الضلع $[AC]$ في المنتصف لأن قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ متناصفان) ؛ إذن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

3) أ- إنشاء النقطة K مرجح $(A,1)$ ، $(B,1)$ و $(C,-1)$:

لإنشاء النقطة K نعتمد على العلاقة $\overrightarrow{AK}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ و منه $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ أي $\boxed{\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}}$.

ب- إثبات أن K هي أيضا مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$:

لدينا $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ و باستعمال علاقة شال نكتب

$\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ أي $3\overrightarrow{KG}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ ومنه ينتج

$\boxed{3\overrightarrow{KG}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}}$ ؛ إذن K هي مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$.

4) أ- استنتاج من العلاقة (1) أن النقطة A مرجح $(D,1)$ ، $(G,3)$ و $(C,-2)$:

باستعمال علاقة شال في العلاقة (1) نكتب : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ أي $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ و منه

$3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ أي $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ و منه $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ لأن $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ في متوازي الأضلاع $ABCD$ معناه $\boxed{\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{CA}=\vec{0}}$ و بالتالي A مرجح النقط D ، G و C المرفقة بالمعاملات 1 ، 3 و -2 على الترتيب .

ب- تبيان أن A منتصف القطعة $[DK]$:

A مرجح الجملة المثقلة $\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$ و K مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$ ؛ إذن حسب خاصية التجميع فإن A مرجح الجملة $\{(D,1);(K,1)\}$ لأن $-2+3=1$. إذن النقطة A منتصف القطعة $[DK]$.

5) تعيين ثم إنشاء (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

A مرجح الجملة المثقلة $\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$ و بالتالي من أجل كل نقطة كيفية M من المستوي فإن :

$\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}=(1+3-2)\overrightarrow{MA}$ أي $\boxed{\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}}$.

I منتصف القطعة $[AB]$ و منه $\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}}$.

إذن $\left\|\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}\right\|$ معناه $\boxed{MA=MI}$.

إذن مجموعة النقط (E) هي المستقيم المحوري للقطعة $[AI]$.

6) أ- يكون المرجح I_m للجملة $\{(D,m);(G,3);(C,-2)\}$ موجودا إذا و فقط إذا كان $m+1\neq 0$ معناه $\boxed{m\neq -1}$ و منه $m\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

ب- من أجل $m\neq -1$ ، تبيان أن : $\overrightarrow{DI_m}=\dfrac{1}{m+1}\overrightarrow{DK}$.

K مرجح $(G,3)$ و $(C,-2)$ ؛ إذن حسب خاصية التجمع فإن I_m مرجح الجملة $\{(D,m);(K,1)\}$ و منه ينتج :

$m\overrightarrow{DI_m}+\overrightarrow{KI_m}=\vec{0}$ و باستعمال علاقة شال نجد $m\overrightarrow{DI_m}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DI_m}=\vec{0}$ معناه $(m+1)\overrightarrow{DI_m}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$ و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي $m\neq -1$ ينتج : $\boxed{\overrightarrow{DI_m}=\dfrac{1}{m+1}\overrightarrow{DK}}$.

جـ- دراسة تغيرات الدالة $f:x\mapsto \dfrac{1}{x+1}$ و تشكيل جدول تغيراتها :

f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ فإن :

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$. من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن $f'(x)<0$ و منه f <u>متناقصة تماما</u> على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

د- استنتاج المحل الهندسي للنقطة I_m عندما يمسح m المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$:

من جدول التغيرات نستنتج أنه إذا كان m يمسح المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن $f(m)=\dfrac{1}{m+1}$ تتغير في $\mathbb{R}-\{0\}$.

إذن المقدار $\dfrac{1}{m+1}$ لا ينعدم لما m يمسح المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$ و عليه الشعاع $\overrightarrow{DI_m}$ غير معدوم من أجل أي نقطة I_m و منه I_m لا يمكن أن تنطبق على D .

$\overrightarrow{DK}$ شعاع ثابت و غير معدوم معدوم من المستوي ، و من علاقة الإرتباط الخطي $\overrightarrow{DI_m}=\dfrac{1}{m+1}\overrightarrow{DK}$ (النقط D ، K و I_m في استقامية) نستنتج أن مجموعة النقط I_m عندما m يمسح المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$ هي <u>المستقيم</u> (DK) <u>باستثناء</u> النقطة D .

<u>كتابة الأستاذ</u> : حناش نبيل

لا تنسونا من صالح دعائكم ...