الامتحان الفصلي الأول **العام الدراسي: 2025/2024**

المستوى: الثالثة ثانوي – علوم تجريبية **02 ديسمبر 2024**

اختبار في مادة الرياضيات **المدة: ثلاث ساعات**

التمرين الأول: (05 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير.

1) حل المعادلة التفاضلية $y'=-2y+2$ على IR و الذي يحقق: $y(0)=2025$ هو الدالة g المعرفة على IR بـ:
$g(x)=2025e^{-2x}+1$

2) S مجموعة حلول المتراجحة: $\ln(x-1)+\ln(x+1)\le\ln 8$ هي $S=[1,3]$.

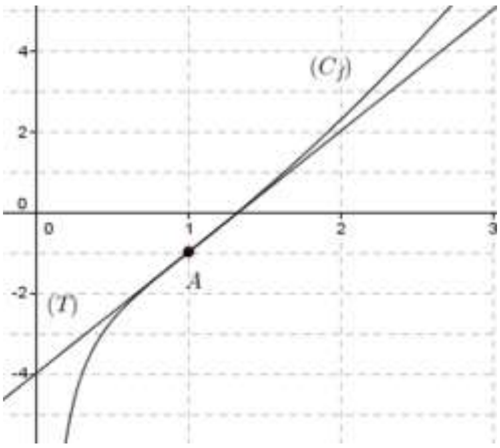
3) نقبل أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\le e^x-x-1\le\frac{1}{2}x^2+x^4$ فإن $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$.

4) مجموعة حلول المعادلة $2(\log x)^2-5\log x+2=0$ هي: $S'=\left\{\sqrt{10},100\right\}$.

5) f دالة معرفة على IR بـ: $f(x)=e^x+\ln\left(\frac{e^x-1}{e^{2x}+3}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني، التمثيل البياني للدالة $x\mapsto e^x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

I. في الشكل المقابل يُعطى (C_f) المتمثيل البياني لدالة f على المجال $]0;+\infty[$
و (T) مماس لـ (C_f) عند النقطة $A(1,-1)$.



بقراءة بيانية:

1) عيّن $f'(1)$ و معادلة المماس (T).

2) الوضع النسبي لـ (C_f) و (T)، ماذا تستنتج حول النقطة A؟

II. نضع من أجل كل $x>0$، $f(x)=x\ln(x^2)-\frac{1}{x}$.

1) أحسب نهايات f. (نقبل أن $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$)

2) أ/ أحسب $f'(x)$.

ب/ بيّن أنه من أجل كل $x>0$ فإن: $f''(x)=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

ج/ عيّن إتجاه تغير الدالة f' و شكّل جدول تغيراتها (لا يُطلب حساب النهايات)

د/ استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيينها.

4) أ/ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$.

ب/استنتج إشارة $f(x)$.

ج/ تحقق أن $\alpha^2=\exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$.

التمرين الثالث: (**08** نقاط)

لتكن f دالة معرفة على $IR-\{1\}$ بـ: $f(x)=2x-2+\frac{e^x}{e^x-e}$ و (C_f) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=1cm$.

1) أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) أحسب $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1}f(x)$ و $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}f(x)$ ثم فسّر النتيجيتين بيانيا.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $IR-\{1\}$ فإن: $f'(x)=\frac{(2e^x-e)(e^x-2e)}{(e^x-e)^2}$.

ب) عيّن إتجاه تغير الدالة f.

ج) بيّن أن $f(\ln 2e)=\ln(4e^2)$ و أن $f\left(\ln\frac{e}{2}\right)=-\ln(4e)$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') اللذين معادلتيهما على الترتيب $y=2x-1$ و $y=2x-2$

أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ و أن (Δ') مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج/ أدرس الوضع النسبي لـ(C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4) أنشيء كلا من (Δ)، (Δ') و (C_f)

5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $(e^x-e)(m+2)=e^x$.

الإجابة النموذجية

بالتوفيق

الإجابة النموذجية

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) **خطأ**

التبرير: حل المعادلة التفاضلية $y'=-2y+2$ هي الدوال المعرفة على IR بـ: $y=ce^{-2x}+1$ حيث: $c\in IR$

و لدينا $y(0)=2025$ أي $ce^{0}+1=2025$ و عليه: $c=2024$ ومنه فإن: $g(x)=2024e^{-2x}+1$

0,25 + 0,75

2) **خطأ**

التبرير: المتراجحة معرفة إذا كان: $\begin{cases}x>1\\x>-1\end{cases}$ و أي: $x>1$

و لدينا: المتراجحة $\ln(x-1)+\ln(x+1)\le\ln 8$ تكافيء $(x-1)(x+1)\le 8$ أي: $x^{2}-9\le 0$ أي: $x\in]1;3]$

3) **صحيح**

التبرير: لدينا $\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{6}x^{3}\le e^{x}-x-1\le\frac{1}{2}x^{2}+x^{4}$

و منه $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x\le\frac{e^{x}-x-1}{x^{2}}\le\frac{1}{2}+x^{2}$

و لدينا $\lim_{x\to0}\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}+x^{2}=\frac{1}{2}$

و منه $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-1}{x^{2}}=\frac{1}{2}$

4) **صحيح**

التبرير: نضع $X=\log x$ نجد $2X^{2}-5X+2=0$

أي $\begin{cases}X=\frac{1}{2}\ \text{و}\\X=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=10^{\frac{1}{2}}\ \text{و}\\x=10^{2}\end{cases}$ و عليه $\begin{cases}x=\sqrt{10}\ \text{و}\\x=100\end{cases}$

5) **خطأ**

التبرير: لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-e^{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+3}\right)$

و لدينا

و $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(e^{x}+\frac{3}{e^{x}}\right)}=0\\ \lim_{x\to0}\ln x=-\infty\end{cases}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-e^{x}\right]=-\infty\neq0$ و عليه فإن منحنى الدالة $x\mapsto e^{x}$ ليس مقاربا لـ (C_f) عند $+\infty$

التمرين الثاني: (07 نقاط)

I. القراءة البيانية:

1) حساب $f'(1)$: $(1,-1)\in(T)$ و $(0,-4)\in(T)$ — 0,25

و منه $f'(1)=\frac{-1-(-4)}{1-0}=3$

معادلة المماس (T): $(T): y=3x-4$ — 0,25

0,25

2) الوضع النسبي:

- على المجال $]0;1[$: (C_f) أسفل (T).
- على المجال $]1;+\infty[$: (C_f) أعلى (T).
- و (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(1,-1)$. — 0,25

✓ نستنتج أن النقطة $A(1,-1)$ نقطة إنعطاف لـ (C_f)

II. $f(x)=x\ln(x^{2})-\frac{1}{x}$

1) حساب النهايات:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن: — 0,25

$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x\ln(x^{2})=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{cases}$ و

0, 5

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}2x\ln(x)-\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$

2) أ/ حساب $f'(x)$: — 0,75

$f'(x)=1\times\ln(x^{2})+\frac{2x}{x^{2}}\times x+\frac{1}{x^{2}}$

$f'(x)=\ln(x^{2})+2+\frac{1}{x^{2}}$

ب/ بيان أن $f''(x)=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^{3}}$: — 0,75

$f''(x)=\frac{2x}{x^{2}}-\frac{2x}{x^{4}}$ ، $f''(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^{3}}$

$f''(x)=\frac{2x^{2}-2}{x^{3}}$ $f''(x)=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^{3}}$ — 0,25

ج/ تعيين إتجاه تغير الدالة f': ندرس إشارة $f''(x)$ — 0,25

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f' متناقصة تماما على المجال $]0,1]$ و متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f': — 0,25

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		↘	3	↗	

د/ من جدول تغيرات الدالة f' لدينا من أجل كل $x>0$ فإن $f'(x)\geq 3$ و عليه $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. **0, 5**

جدول تغيرات الدالة f: **0,25**

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) بيان أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف: لدينا من السؤال (2−ج) $f''(x)$ تنعدم عند 1 مُغيرة إشارتها و منه فإن النقطة $A(1,-1)$ نقطة إنعطاف لـ (C_f). **0, 5**

4) أ/ لدينا من جدول تغيرات الدالة f: الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty;+\infty[$ الذي يحصر الـ 0 و منه حسب م.ق.م فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$. **01**

ب/ إشارة $f(x)$: **0,25**

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

ج/ لدينا $f(\alpha)=0$ ومنه $\alpha\ln(\alpha^2)-\frac{1}{\alpha}=0$ و عليه فإن: $\alpha\ln(\alpha^2)=\frac{1}{\alpha}$ أي $\ln(\alpha^2)=\frac{1}{\alpha^2}$ **0, 5**

و بالتالي: $\alpha^2=e^{\frac{1}{\alpha^2}}$.

التمرين الثالث: (08 نقاط)

$D_f=IR-\{1\}$ ، $f(x)=2x-2+\frac{e^x}{e^x-e}$

1) أ/ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ **0, 5**

لأن: $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-e}=0\end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **0, 5**

لأن: $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-e}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{e}{e^x}}=1\end{cases}$

ب/ $\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\frac{e}{0^+}$ و عليه $\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$ **0, 5**

$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\frac{e}{0^-}$ و عليه $\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ **0, 5**

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لـ (C_f). **0,25**

2) أ/ بيان أن $f'(x)=\frac{(2e^x-e)(e^x-2e)}{(e^x-e)^2}$ **01**

لدينا: $f'(x)=2+\frac{e^x(e^x-e)-e^x\times e^x}{(e^x-e)^2}$

و منه: $f'(x)=2-\frac{e\times e^x}{(e^x-e)^2}$

و عليه: $f'(x)=\frac{2(e^x-e)^2-e\times e^x}{(e^x-e)^2}$

و منه: $f'(x)=\frac{2e^{2x}-5e\times e^x+2e^2}{(e^x-e)^2}$

و لدينا $(2e^x-e)(e^x-2e)=2e^{2x}-5e\times e^x+2e^2$

و عليه فإن: $f'(x)=\frac{(2e^x-e)(e^x-2e)}{(e^x-e)^2}$

ب/ إتجاه تغير الدالة f: **0,5**

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{e}{2}\right)$		1		$\ln(2e)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $\left]0;\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right]$ و $[\ln(2e);+\infty[$ و متناقصة تماما على المجالين $\left[\ln\left(\frac{e}{2}\right);1\right[$ و $]1;\ln(2e)]$.

ج/ التحقق أن $f\left(\ln(2e)\right)=\ln\left(4e^2\right)$: **0, 5**

لدينا $f\left(\ln(2e)\right)=2\ln(2e)-2+\frac{e^{\ln(2e)}}{e^{\ln(2e)}-e}$

و منه $f\left(\ln(2e)\right)=2\ln(2e)-2+\frac{2e}{2e-e}$

وعليه $f\left(\ln(2e)\right)=2\ln(2e)$ و منه

$f\left(\ln(2e)\right)=\ln(2e)^2$ أي $f\left(\ln(2e)\right)=\ln\left(4e^2\right)$

التحقق أن $f\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right)=-\ln(4e)$: **0, 5**

لدينا $f\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right)=2\ln\left(\frac{e}{2}\right)-2+\frac{e^{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}}{e^{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}-e}$

و منه: $f\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right)=2(\ln e-\ln 2)-2+\frac{\frac{e}{2}}{\frac{e}{2}-e}$

أي $f\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right)=2(1-\ln 2)-2+\frac{\frac{e}{2}}{-\frac{e}{2}}$

و منه $f\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right)=-2\ln 2-1$

إذن: $f\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right)=-\ln 2^2-\ln e$ أي

أي $f\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right)=-(\ln 4+\ln e)$

$f\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right)=-\ln(4e)$

جدول التغيرات: **0,25**

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{e}{2}\right)$		1	$\ln(2e)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	$-\ln(4e)$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	$\ln\left(4e^2\right)$	↗ $+\infty$

3) أ/ تبيان أن المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ **0,25**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{e^x}{e^x-e}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{e}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{1}{1-\frac{e}{e^x}}=0$$

و منه فإن المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

0,25 تبيان أن المستقيم (Δ') مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-e}=0$$

و منه فإن المستقيم (Δ') مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

0, 5 ب/ الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

لدينا $f(x)-y=-1+\frac{e^x}{e^x-e}$ أي

$f(x)-y=\frac{e}{e^x-e}$ و عليه إشارة الفرق من إشارة المقام.

نتيجة لذلك:

- ✓ (C_f) يقع أعلى (Δ) في المجال $]1;+\infty[$.
- ✓ (C_f) يقع أسفل (Δ) في المجال $]-\infty;1[$.

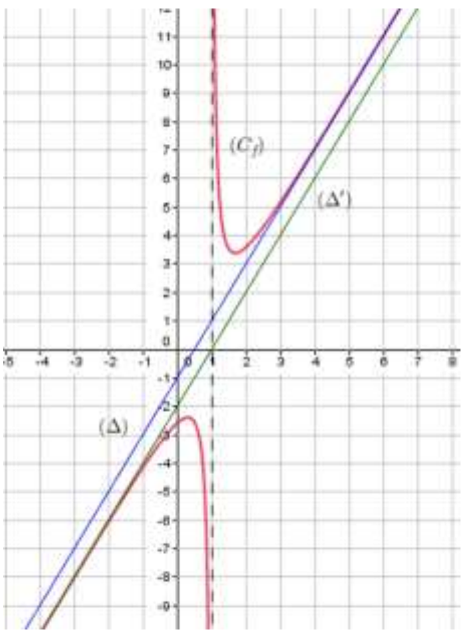
0, 5 الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ'):

لدينا $f(x)-y=\frac{e^x}{e^x-e}$ و عليه إشارة الفرق من إشارة المقام.

نتيجة لذلك:

- ✓ (C_f) يقع أعلى (Δ) في المجال $]1;+\infty[$.
- ✓ (C_f) يقع أسفل (Δ) في المجال $]-\infty;1[$.

0,5 + 0,25 + 0,25 4) الرسم:



0,5 5) المناقشة البيانية:

لدينا المعادلة $(e^x-e)(m+2)=e^x$

تكافيء $m+2=\frac{e^x}{e^x-e}$

و عليه: $f(x)=2x+m$

- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (المائل) ذو المعادلة $y=2x+m$ و عليه:
- ✓ من أجل $m<-2$ أو $m>-1$: للمعادلة حل وحيد.
- ✓ من أجل $-2\le m\le -1$ لا توجد حلول.