الجزء الأول:

يحتوي صندوق على 7 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس. ثلاث كرات بيضاء و أربع كرات خضراء نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

1. شكل شجرة الإمكانيات.
2. احسب احتمال الأحداث التالية:

A : " سحب كرتين مختلفتين في اللون "　　　B :"سحب كرتين من نفس اللون "

3. نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha\,(DA)$ (حيث α عدد طبيعي معطى)

إذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100\ DA$ ، و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50\ DA$ ، و إذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه.

وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

أ/ برر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha\,,50-\alpha\,,-\alpha\}$ ثم عين قانون احتماله.

ب/ بين أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو : $E(X)=-\alpha+\dfrac{300}{7}$

جـ/ اوجد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

الجزء الثاني:

ننزع من الصندوق ثلاث كريات خضراء و كرية بيضاء و نضيف كرتين حمراوين للصندوق ، الكرات متماثلة و لا نميز بينها باللمس ونسحب منه كرتين على التوالي مع إرجاع.

1. شكل شجرة الإمكانيات
2. احسب احتمال الأحداث التالية:

C : " سحب كرة على الأقل حمراء "

D :"سحب كرتين خضراء على الأكثر " ماذا تستنتج؟

3. ليكن T المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة عدد الألوان المتحصل عليها.

- عين قانون احتمال T
- احسب الأمل الرياضياتي و التباين و الإنحراف المعياري للمتغير T .

الجزء الثالث:

نرقم الكريات الموجودة في الصندوق حيث كرتين بيضاوين تحملان الرقمين 1 و 0 و كرتين حمراوين تحملان الرقمين 2 و 0 و الكرية الخضراء تحمل الرقم 2 كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس .نسحب من الكيس كرتين على التوالي دون الارجاع .

1. شكل شجرة الإمكانيات
2. احسب احتمال الأحداث التالية:

E " الكرتان مختلفتان في اللون "　　　F " الكرتان من نفس الرقم "　　　G " سحب كرتين جداءهما معدوم "

3. احسب $p(E\cap F)$ ثم استنتج احتمال الحدث $p(E\cup F)$.
4. ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين جداء الرقمين المسجلين عليهما.

أ) عين قانون احتمال Y ، ثم احسب الأمل الرياضياتي لـ Y و استنتج $E(2023Y+1444)$

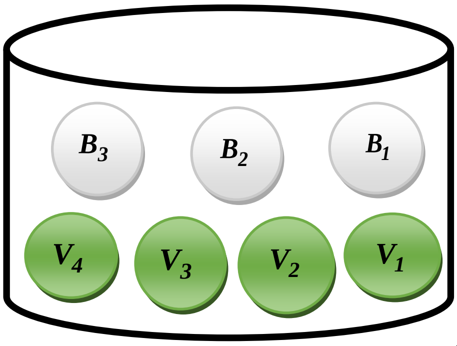
ب) احسب $P(Y^2+Y-2=0)$.

5. ليكن Z المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

أ) عين قيم Z

ب)عين قانون احتمال Z .

ت) احسب $P(Z^2-Z\le 0)$



حل الجزء الأول:

يحتوي صندوق على 7 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس. ثلاث كرات بيضاء و أربع كرات خضراء نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

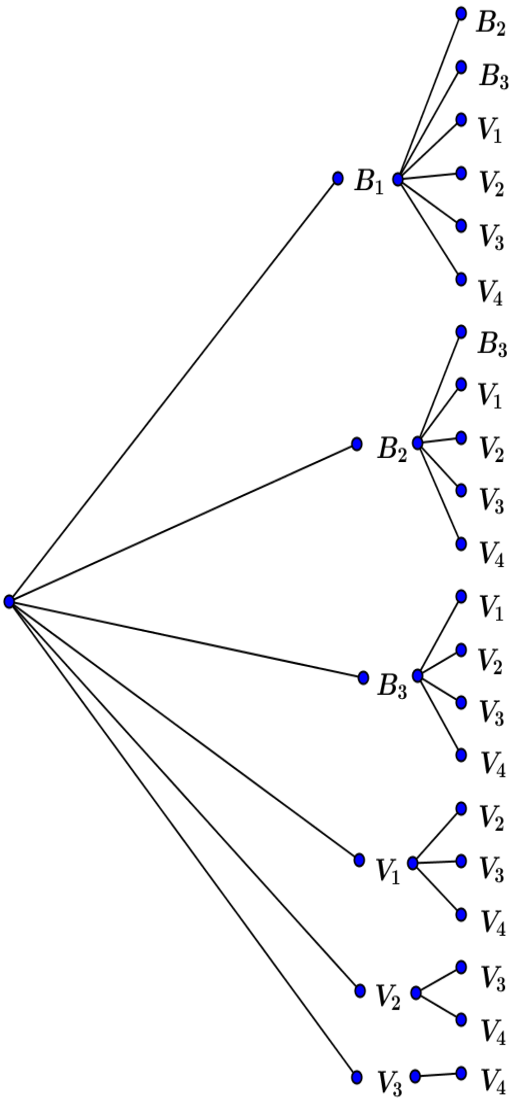
1. شكل شجرة الإمكانيات.
2. حساب احتمال الأحداث التالية:

A : " سحب كرتين مختلفتين في اللون " $A=\{(B;V),(V;B)\}$ ومنه $P(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{12}{21}$

B :"سحب كرتين من نفس اللون " $B=\{(B;B),(V;V)\}$ ومنه $P(B)=\dfrac{cardB}{card\Omega}=\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}$

أو يمكن ملاحظة أن B حدث عكسي للحدث A أي

$$P(B)=1-P(A)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$$



1. أ- تعيين قيم المتغير العشوائي X مع التبرير:

لما الاعب يسحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100\ DA$ ومع $\alpha\ DA$ التي دفعها $(-\alpha)$ أي $X=100-\alpha$

لما الاعب يسحب كرة بيضاء و كرة خضراء يتحصل على $50\ DA$ ومع $\alpha\ DA$ التي دفعها $(-\alpha)$ أي $X=50-\alpha$

لما الاعب يسحب كرتين خضراوين لا يتحصل على شيئ ويخسر مادفعه $\alpha\ DA$ $(-\alpha)$ أي $X=-\alpha$

وعليه $X=\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$

$X=X_i$	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
$P(X=X_i)$	$\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$

- تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

ب- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

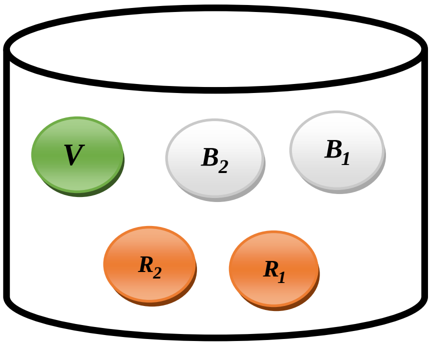
$$E(X)=(100-\alpha)\times\frac{1}{7}+(50-\alpha)\times\frac{4}{7}+(-\alpha)\times\frac{2}{7}$$

أي $E(X)=-\alpha+\dfrac{300}{7}$

- اللعبة تكون مربحة للاعب إذا كان $E(X)>0$ إذن نحل المتراجحة

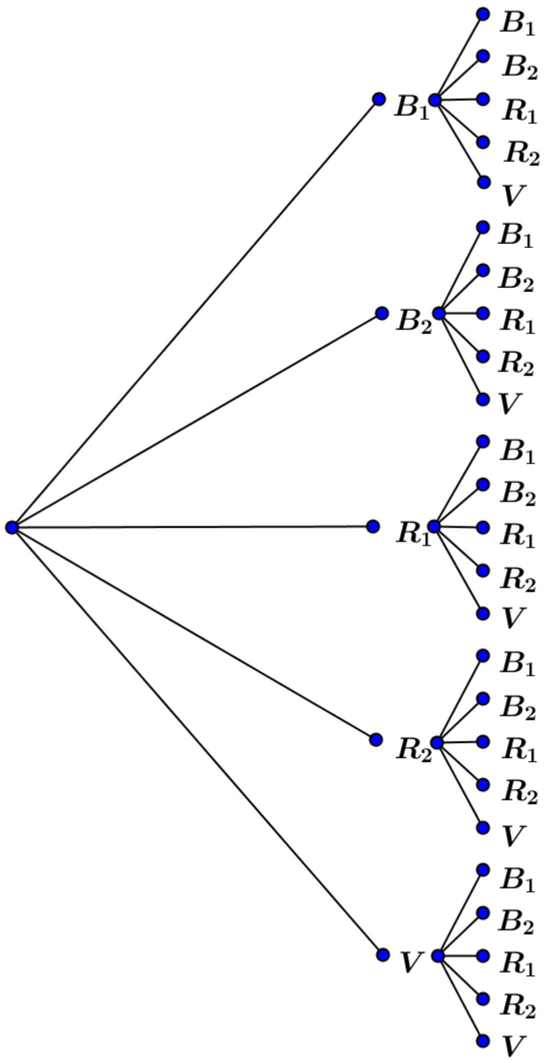
$E(X)>0$ أي $-\alpha+\dfrac{300}{7}>0$ و عليه $\alpha<\dfrac{300}{7}$ ومنه أكبر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب هي $42\ DA$.

حل الجزء الثاني:



ننزع من الصندوق ثلاث كريات خضراء و كرية بيضاء و نضيف كرتين حمراوين للصندوق ، الكرات متماثلة و لا نميز بينها باللمس ونسحب منه كرتين على التوالي مع إرجاع.

1. شكل شجرة الإمكانيات.



2. حساب احتمال الأحداث التالية:

C : " سحب كرة على الأقل حمراء " $C=\{(R;\bar{R}),(R;R)\}$ ومنه

$$P(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{16}{25}$$

$\bar{R}$ تعني الكرية ليست حمراء.

D :"سحب كرتين خضراء على الأكثر "

$D=\{(V;V),(V;\bar{V}),(\bar{V};\bar{V})\}$ ومنه $P(D)=\frac{cardD}{card\Omega}=\frac{25}{25}=1$

$\bar{V}$ تعني الكرية ليست خضراء.

الإستنتاج : نستنتج أن D حدث أكيد .

4. ليكن T المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة عدد الألوان المتحصل عليها.

- عين قانون احتمال T

قيم هي T:

لما نسحب كرتين من نفس اللون $(R;R)$ أو $(B;B)$ أو $(V;V)$ نتحصل على لون واحد أي $T=1$

لما نسحب كرتين مختلفتين في اللون $(B;R)$ أو $(B;V)$ أو $(R;V)$ مع مراعاة الترتيب نتحصل على لونين أي $T=2$

ومنه $T=\{1,2\}$

وعليه

$T=T_i$	1	2
$P(T=T_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}$

- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

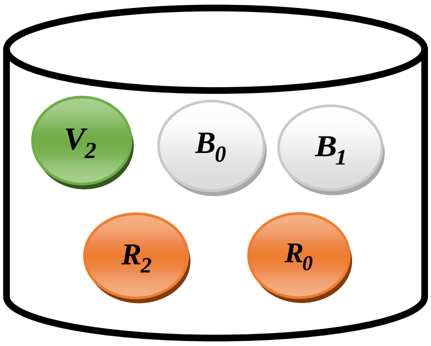
$$E(X)=\sum T_i\times P(T=T_i)=(1)\left(\frac{9}{25}\right)+(2)\left(\frac{16}{25}\right)=\frac{41}{25}$$

- حساب التباين $V(X)$:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=(1^2)\left(\frac{9}{25}\right)+(2)^2\left(\frac{16}{25}\right)-\left(\frac{41}{25}\right)^2=\frac{144}{625}$$

- حساب الإنحراف المعياري للمتغير $\sigma(X)$.

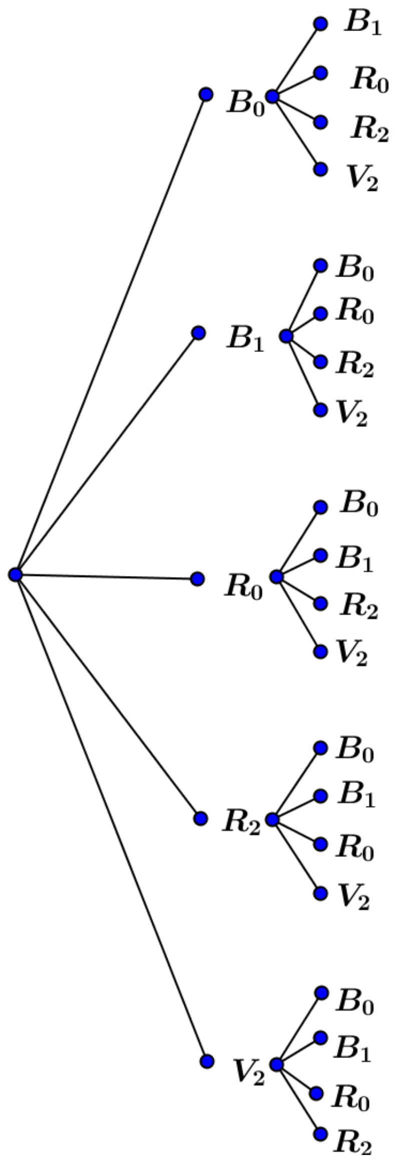
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{144}{625}}=\frac{12}{25}$$



حل الجزء الثالث:

نرقم الكريات الموجودة في الصندوق حيث كرتين بيضاوين تحملان الرقمين 1 و 0 و كرتين حمراوين تحملان الرقمين 2 و 0 و الكرية الخضراء تحمل الرقم 2 كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس نسحب من الكيس كرتين على التوالي دون الارجاع .

1. شكل شجرة الإمكانيات



2. حساب احتمال الأحداث التالية:

E " الكرتان مختلفتان في اللون" أي $E=\{(B;R);(B;V);(R;V)\}$

$$P(E)=\frac{cardE}{card\Omega}=\frac{16}{20}$$

F " الكرتان من نفس الرقم " $F=\{(0;0),(2;2)\}$

$$P(F)=\frac{cardF}{card\Omega}=\frac{4}{20}$$

G" سحب كرتين جداءهما معدوم " $G=\{(0;\bar{0}),(0;0)\}$

$$P(G)=\frac{cardG}{card\Omega}=\frac{14}{20}$$

($\bar{0}$ تعني الكرية لا تحمل الرقم 0)

3. حساب $p(E\cap F)$

$E\cap F$ " الكرتان مختلفتان في اللون و تحملان نفس الرقم " $E\cap F=\{(B_0;R_0);(R_2;V_2)\}$

$$P(E\cap F)=\frac{cardE\cap F}{card\Omega}=\frac{4}{20}$$

- استنتاج احتمال الحدث $p(E\cup F)$:

$$p(E\cup F)=p(E)+p(F)-p(E\cap F)$$

$$p(E\cup F)=\frac{16}{20}+\frac{4}{20}-\frac{4}{20}$$

$$p(E\cup F)=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$

4. ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين جداء الرقمين المسجلين عليهما.

أ- تعيين قانون احتمال Y :

عند سحب كرتين إحداهما أو كلاهما يحمل رقم 0 فإن جداؤهما يساوي 0 وعليه $Y=0$.

عند سحب كرية تحمل رقم 1 و الأخرى تحمل رقم 2 فإن جداؤهما يساوي 2 وعليه $Y=2$.

عند سحب كرتين كلاهما يحمل رقم 2 فإن جداؤهما يساوي 4 و عليه $Y=4$.

إذن $Y=\{0;2;4\}$

$Y=y_i$	0	2	4
$P(Y=y_i)$	$\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$	$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$	$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

- حساب الأمل الرياضياتي لـ Y :

$$E(Y)=\sum y_i \times p_i$$
$$E(Y)=(0)\left(\frac{14}{20}\right)+(2)\left(\frac{4}{20}\right)+(4)\left(\frac{2}{20}\right)$$
$$E(Y)=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$

- إستنتاج $E(2023Y+1444)$: $E(2023Y+1444)=2023E(Y)+1444=\frac{15312}{5}$

ب- حساب $P\left(Y^2+Y-2=0\right)$.

$Y^2+Y-2=0$ معناه $Y=1$ أو $Y=-2$ ومنه

$$P\left(Y^2+Y-2=0\right)=P(Y=1)+P(Y=-2)$$
$$P\left(Y^2+Y-2=0\right)=P(\varnothing)+P(\varnothing)$$
$$P\left(Y^2+Y-2=0\right)=0+0=0$$

5. ليكن Z المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

أ- تعيين قيم Z :

عند سحب كريتين حمراوين يتبقى في الكيس صفر كرية حمراء أي $Z=0$

عند سحب كرية حمراء و كرية ليست حمراء يتبقى في الكيس كرية حمراء واحدة فقط أي $Z=1$

عند سحب كريتين كلاهما ليست حمراء يتبقى في الكيس كريتين حمراوين أي $Z=1$

وعليه $Z=\{0;1;2\}$

ب- تعيين قانون احتمال Z .

$Z=z_i$	0	1	2
$P(Z=z_i)$	$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$	$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$	$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

ت- حساب $P\left(Z^2-Z\le 0\right)$:

$Z^2-Z\le 0$ لما $Z\in[0;1]$ ومنه $Z=0$ أو $Z=1$

إذن

$$P\left(Z^2-Z\le 0\right)=P(Z=0)+P(Z=1)$$
$$P\left(Z^2-Z\le 0\right)=\frac{2}{20}+\frac{12}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$