تمرين1 (10نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(1-x)e^x-1$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، وبيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$.

2) شكّل جدول تغيرات الدالة g ، ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ $g(x)\leq 0$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;7]$ بـ: $f(x)=1+\ln\left(\frac{x}{e^x-1}\right)$ و $f(0)=1$.

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$).

1) لتكن النقطتان: $M(x;f(x))$ و $N(-x;f(-x))$ ، حيث x عدد حقيقي.

أ) بيّن أنّ: $f(-x)=1+\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)$ ، وأنّ معامل توجيه المستقيم (MN) هو $-\frac{1}{2}$.

ب) نفرض أنّ: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=-\frac{1}{2}$ ، اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x(e^x-1)}$ ، ثم ادرس إشارتها.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;7]$ ، نأخذ $f(7)=-4$.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,7<\alpha<1,8$.

ب) بيّن أنّ معادلة لمماس المنحني $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة α هي: $y=\left(\frac{1-e^{-1}-\alpha}{\alpha}\right)(x-\alpha)$.

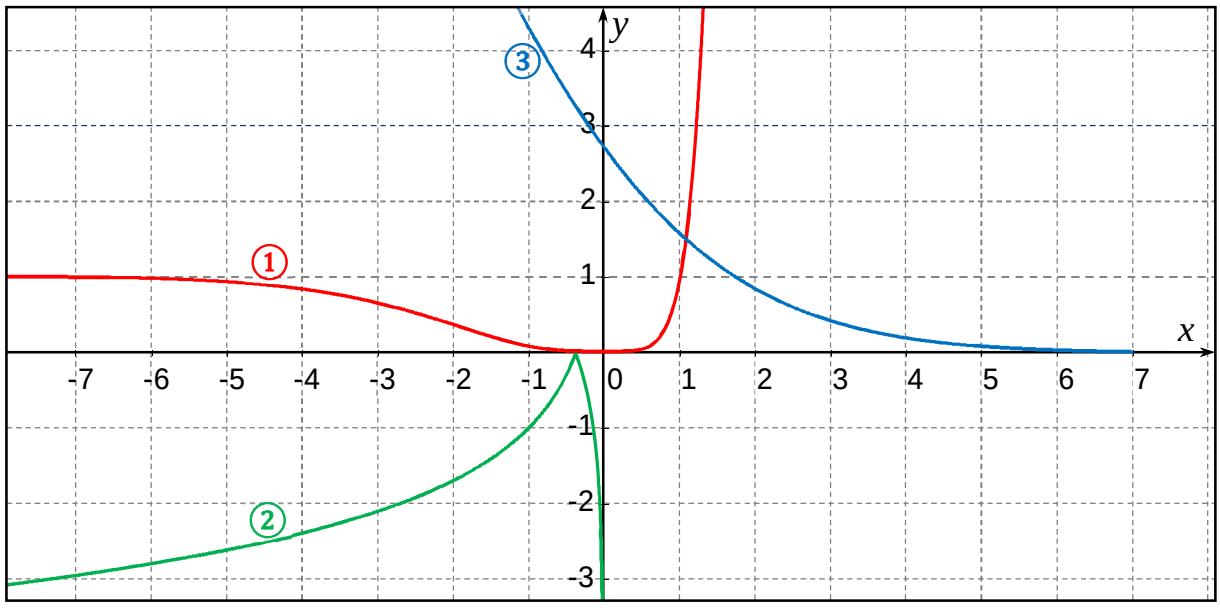
4) أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C}_h)$ الممثل للدالة h: $x\mapsto 1+\ln(-x)$ على المجال $]-\infty;0[$ يقع أسفل $(\mathscr{C}_f)$.

ب) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-h(x))=0$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

5) أ) اشرح كيفية رسم المنحني $(\mathscr{C}_h)$، ثم ارسم المماس (T)، والمنحنيين $(\mathscr{C}_h)$ و $(\mathscr{C}_f)$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=-\frac{1}{2}(x+m)$.

6) في الشكل أسفله التمثيلات البيانية: $(\mathscr{C}_{e^f})$ ، $(\mathscr{C}_{g^2})$ و $(\mathscr{C}_{-|h|})$. تعرّف على هذه التمثيلات البيانية مع التبرير.



تمرين2 (10نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $g(x)=e^{-\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}-x^2$.

1) بيّن أنّ الدالة g زوجية، ثم فسر ذلك هندسيا.

2) إذا علمت أنّ g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$، استنتج اتجاه تغيراتها على المجال $]-\infty;0[$.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} g(x)$، واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$.

4) شكّل جدول تغيرات الدالة g على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

5) بيّن أنّ المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين، أحدهما α حيث: $1,5<\alpha<1,6$، والآخر يطلب إعطاء حصرا له سعته $0,1$، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-x$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$).

1) بيّن أنّ الدالة f فردية، ثم فسر ذلك هندسيا.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$، أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$، ثم شكّل جدول تغيرات f.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-x$، مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$، $f(x)+x=\left(1-e^{\frac{2}{x}}\right)e^{-\frac{1}{x}}$، ثم ادرس الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C})$ و (Δ).

4) أ) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

ب) ارسم المستقيم المقارب المائل (Δ)، المماس (T) والمنحنى $(\mathscr{C})$. نأخذ $f(\alpha)\approx -2,9$.

ج) m وسيط حقيقي موجب تماما. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x\ln m$.

5) $M(x;y)$ نقطة من $(\mathscr{C})$ حيث $x>0$، و $M'(x;-1-y)$ نقطة من $(\mathscr{C}')$ في المعلم نفسه.

أ) باستعمال التمثيل البياني $(\mathscr{C})$ اشرح كيفية رسم التمثيل البياني $(\mathscr{C}')$ ثم ارسمه.

ب) بيّن أنّ المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ متناظران بالنسبة لمستقيم يطلب كتابة معادلة له.

بالتوفيق

تصحيح إختبار الفصل الأول 2024م

تمرين 1: "عبد المطلب"

I-1) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x - xe^x - 1) = 0 - 0 - 1 = -1$

$g'(x) = -e^x + e^x(1-x) = -xe^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

من الجدول: $g(x) \leq 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

II-1) $f(-x) = 1 + \ln\left(\frac{-x}{e^{-x}-1}\right) = 1 + \ln\left(\frac{-x}{\frac{1}{e^x}-1}\right)$

$= 1 + \ln\left(\frac{-x}{\frac{1-e^x}{e^x}}\right) = 1 + \ln\left(\frac{-xe^x}{1-e^x}\right)$

$= 1 + \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)$

$a = \frac{f(x)-f(-x)}{x-(-x)} = \frac{\ln\left(\frac{x}{e^x-1}\right) - \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)}{2x}$

$a = \frac{\ln\left(\frac{x}{e^x-1}\right) + \ln\left(\frac{e^x-1}{xe^x}\right)}{2x} = \frac{\ln\left(\frac{x(e^x-1)}{xe^x(e^x-1)}\right)}{2x}$

$a = \frac{\ln\left(\frac{1}{e^x}\right)}{2x} = \frac{-\ln e^x}{2x} = \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2}$

ب) $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -\frac{1}{2}x + 1$: (T)

2) $f'(x) = \frac{\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}}{\frac{x}{e^x-1}} = \frac{e^x-1-xe^x}{x(e^x-1)} = \frac{g(x)}{x(e^x-1)}$

لأن $f'(x) \leq 0$ و $g(x) \leq 0$ و $x(e^x-1) > 0$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = +\infty$

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4

3) f مستمرة ومتناقصة تماما على $]1{,}7 ; 1{,}8[$ و $f(1{,}8) \simeq -0{,}03 < 0$ ، $f(1{,}7) \simeq 0{,}03 > 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$.

ب) $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha(e^\alpha-1)}(x-\alpha)$

لدينا $f(\alpha) = 0$: $1 + \ln\left(\frac{\alpha}{e^\alpha-1}\right) = 0$

$\frac{\alpha}{e^\alpha-1} = e^{-1}$ ، $\ln\left(\frac{\alpha}{e^\alpha-1}\right) = -1$

$e^\alpha = \alpha e + 1$ أي $e^\alpha - 1 = \alpha e$

$f'(\alpha) = \frac{(1-\alpha)e^\alpha - 1}{\alpha(e^\alpha-1)} = \frac{(1-\alpha)(\alpha e+1)-1}{\alpha \times \alpha e} = \frac{-\alpha e + e - 1}{\alpha e}$

$y = \frac{1-e^{-1}-\alpha}{\alpha}(x-\alpha)$: ومنه $f'(\alpha) = \frac{-\alpha+1-e^{-1}}{\alpha}$

4) لدينا: $f(x) - h(x) = \ln\left(\frac{x}{e^x-1}\right) - \ln(-x)$

$= \ln\left(\frac{x}{-x(e^x-1)}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right) = -\ln(1-e^x)$

$x < 0$ ؛ $0 < e^x < 1$ ؛ $-1 < -e^x < 0$

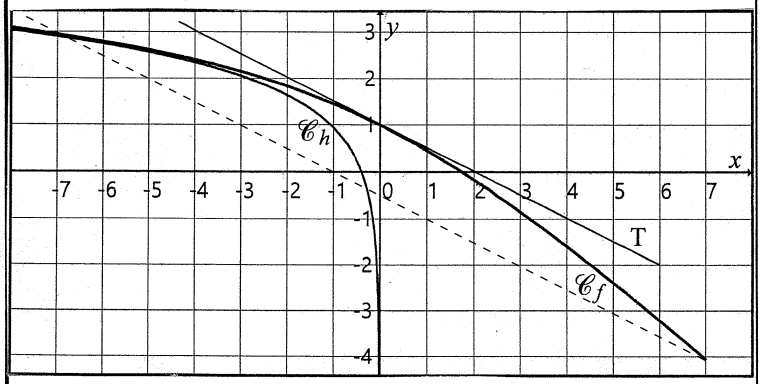
$0 < 1-e^x < 1$ ؛ $\ln(1-e^x) < 0$

ومنه: $-\ln(1-e^x) > 0$ $f(x) - h(x) > 0$

ب) $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-h(x)) = \lim_{x\to-\infty}[-\ln(1-e^x)] = 0$

إذن: (C_f) يقارب (C_h) في جوار $(-\infty)$.

5) نناظر بيان الدالة $\ln$ بالنسبة للمحور (Oy) ثم نسحبه بالشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.



ب) حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الموازية لـ (T).

- $m < -\frac{1}{2}$ أي $m > 1$: حل وحيد سالب.
- $-\frac{1}{2} \leq m < 1$ أي $1 \geq m > 2$: حلان مختلفان في الإشارة.
- $m = -\frac{1}{2}$ أي $m = 2$: حل مضاعف معدوم.
- $m > -\frac{1}{2}$ أي $m < 2$: لا يوجد حلول.

6) $(ef)' = f' \cdot e^f$: نفس إتجاه تغير f أي متناقصة ومنه المنحنى ③ هو (C_{ef})

$(g^2)' = 2g' \cdot g$ ولدينا $g(x) \leq 0$: عكس اتجاه تغير g ومنه المنحنى ① هو (C_{g^2})

$(-|h|)$ سالبة، المنحنى يقع أسفل (Ox) ومنه المنحنى ② هو $(C_{-|h|})$.

"عبد المطلب"

تمرين 2 :

I-1) $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ ، كذلك $-x \in \mathbb{R}-\{0\}$

$g(-x) = e^{\frac{1}{-x}} + e^{\frac{-1}{-x}} - (-x)^2 = e^{-\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - x^2 = g(x)$

ومنه g دالة زوجية

منحنى الدالة g متناظر بالنسبة لـ (Oy).

2) g متناقصة تماما على $\mathbb{R}_+^*$ ، فهي متزايدة تماما على $\mathbb{R}_-^*$ لأنها زوجية ($g(-x) = g(x)$).

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$: لأن $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$

بما أن $g(-x) = g(x)$: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$

4)

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗ $+\infty$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	$-\infty$

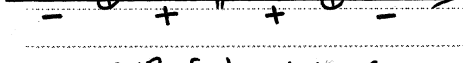
5) g مستمرة ومتناقصة تماما على $]1,5;1,6[$

$g(1,5) = 0,21 > 0$ و $g(1,6) \simeq -0,16 < 0$ إذن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,5 < \alpha < 1,6$.

لدينا: $g(-x) = g(x)$ ومنه الحل الآخر هو $(-\alpha)$ حيث $-1,6 < -\alpha < -1,5$

إشارة $g(x)$:



II-1) $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ كذلك $-x \in \mathbb{R}-\{0\}$

$f(-x) = e^{\frac{1}{-x}} - e^{\frac{-1}{-x}} + x = -f(x)$ ومنه f فردية

$(\mathcal{C})$ متناظر بالنسبة للمبدأ O.

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$(\mathcal{C})$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}) = 1 - 1 = 0$

كذلك عند $(+\infty)$.

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$.

ب) $f(x) + x = e^{-\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} - e^{\frac{1}{x}}$

$= \frac{1 - e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = (1 - e^{\frac{2}{x}}) e^{-\frac{1}{x}}$

$e^{\frac{2}{x}} < 1$ ؛ $1 - e^{\frac{2}{x}} > 0$ لما $f(x) + x > 0$

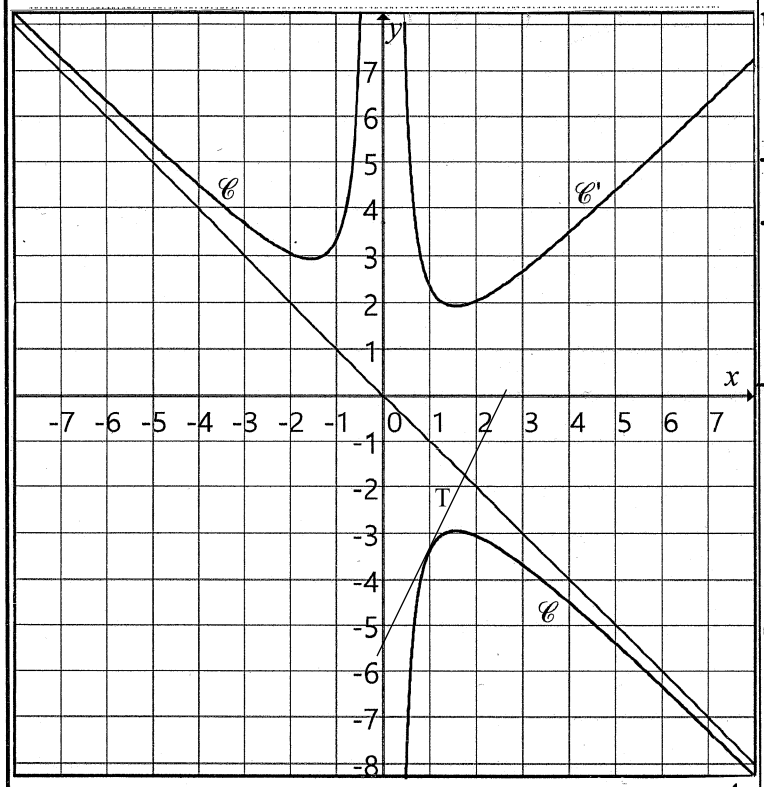
$\frac{2}{x} < 0$ ، ومنه: $x < 0$.

$(\mathcal{C})$: $x > 0$ أسفل (Δ) . $(\mathcal{C})$: $x < 0$ أعلى (Δ).

4) $y = f'(1)(x-1) + f(1) = (e^{-1} + e - 1)(x-1) + e^{-1} - e - 1$

(T) : $y = (e^{-1} + e - 1)x - 2e$

ب)



ج) حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المستقيمات التي ميلها $(1nm)$.

والتي تشمل النقطة الثابتة $O(0;0)$.

$\ln m < -1$ أي $0 < m < \frac{1}{e}$: حلان مختلفان في الإشارة

$\ln m \geq -1$ أي $m \geq \frac{1}{e}$: لا يوجد حلول

5) لرسم $(\mathcal{C}')$: نناظر $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ (Ox) ثم نسحبه بالشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

ب) من أجل كل $x > 0$ $\frac{y_M + y_{M'}}{2} = \frac{y - 1 - y}{2} = -\frac{1}{2}$

$(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ متناظران بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y = -\frac{1}{2}$

"عبد المطلب"

ب) $f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} - 1 = \frac{e^{-\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $\|$ 0	$+$ $\|\|$	$+$ $\|$ 0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘ $f(-\alpha)$	↗ $+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗ $f(\alpha)$	↘ $-\infty$