نص التمرين:

I- يحوي كيس سبع كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها ثلاث كرات بيضاء B_1، B_2، B_3 وأربع كرات خضراء V_1، V_2، V_3، V_4.
نسحب كرتين من الكيس على التوالي بحيث لا نعيد الكرة الأولى قبل السحب الثاني.

1) شكل جدول الإمكانيات الموافقة لهذه التجربة ثم حدد عدد عناصر المجموعة الشاملة Ω.

2) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : «سحب كرتين مختلفتين في اللون»

B : «سحب كرتين من نفس اللون»

C : «سحب كرة بيضاء على الأكثر»

II- نقترح اللعبة التالية:

للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha\ DA$ (α عدد طبيعي)، فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100\ DA$ وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50\ DA$ وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه.

وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة العدد الطبيعي α.

1) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرق قانون احتماله.

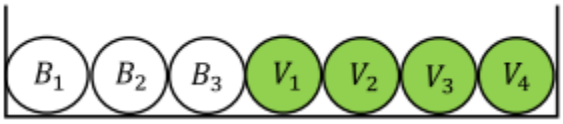
2) أ- بين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X بدلالة α يعطى بـ :

$$E(X) = \frac{300}{7} - \alpha$$

ب- أوجد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

حل التمرين:

I- يحوي كيس سبع كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس (مبدأ تساوي الإحتمال)، منها ثلاث كرات بيضاء B_1، B_2، B_3 وأربع كرات خضراء V_1، V_2، V_3، V_4.



نسحب كرتين من الكيس على التوالي بحيث لا نعيد الكرة الأولى قبل السحب الثاني (سحب دون إرجاع).

1) تشكيل جدول الإمكانيات الموافقة لهذه التجربة العشوائية:

الكرة 1 \ الكرة 2	B_1	B_2	B_3	V_1	V_2	V_3	V_4
B_1		B_1B_2	B_1B_3	B_1V_1	B_1V_2	B_1V_3	B_1V_4
B_2	B_2B_1		B_2B_3	B_2V_1	B_2V_2	B_2V_3	B_2V_4
B_3	B_3B_1	B_3B_2		B_3V_1	B_3V_2	B_3V_3	B_3V_4
V_1	V_1B_1	V_1B_2	V_1B_3		V_1V_2	V_1V_3	V_1V_4
V_2	V_2B_1	V_2B_2	V_2B_3	V_2V_1		V_2V_3	V_2V_4
V_3	V_3B_1	V_3B_2	V_3B_3	V_3V_1	V_3V_2		V_3V_4
V_4	V_4B_1	V_4B_2	V_4B_3	V_4V_1	V_4V_2	V_4V_3	

تحديد عدد عناصر المجموعة الشاملة Ω:

حسب جدول الإمكانيات أعلاه، فإن عدد عناصر المجموعة الشاملة Ω الموافقة لهذه التجربة العشوائية (سحب كريتين على التوالي دون إرجاع) يساوي 42.

2) حساب الاحتمالات:

● الحدث A : «سحب كرتين مختلفتين في اللون»

جدول الإمكانيات الموافق للحدث A موضح كما يلي:

الكرة 1 \ الكرة 2	B_1	B_2	B_3	V_1	V_2	V_3	V_4
B_1		B_1B_2	B_1B_3	B_1V_1	B_1V_2	B_1V_3	B_1V_4
B_2	B_2B_1		B_2B_3	B_2V_1	B_2V_2	B_2V_3	B_2V_4
B_3	B_3B_1	B_3B_2		B_3V_1	B_3V_2	B_3V_3	B_3V_4
V_1	V_1B_1	V_1B_2	V_1B_3		V_1V_2	V_1V_3	V_1V_4
V_2	V_2B_1	V_2B_2	V_2B_3	V_2V_1		V_2V_3	V_2V_4
V_3	V_3B_1	V_3B_2	V_3B_3	V_3V_1	V_3V_2		V_3V_4
V_4	V_4B_1	V_4B_2	V_4B_3	V_4V_1	V_4V_2	V_4V_3	

حسب جدول الإمكانيات الموافق للحدث A فإن عدد عناصر المجموعة A (عدد المربعات المظللة) يساوي 24.

$$p(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{24}{42} = \frac{4 \times 6}{7 \times 6} = \frac{4}{7}$$

$$\boxed{p(A) = \frac{4}{7}}$$

● الحدث B : «سحب كرتين من نفس اللون»

جدول الإمكانيات الموافق للحدث B موضح كما يلي:

الكرة 1 \ الكرة 2	B_1	B_2	B_3	V_1	V_2	V_3	V_4
B_1		B_1B_2	B_1B_3	B_1V_1	B_1V_2	B_1V_3	B_1V_4
B_2	B_2B_1		B_2B_3	B_2V_1	B_2V_2	B_2V_3	B_2V_4
B_3	B_3B_1	B_3B_2		B_3V_1	B_3V_2	B_3V_3	B_3V_4
V_1	V_1B_1	V_1B_2	V_1B_3		V_1V_2	V_1V_3	V_1V_4
V_2	V_2B_1	V_2B_2	V_2B_3	V_2V_1		V_2V_3	V_2V_4
V_3	V_3B_1	V_3B_2	V_3B_3	V_3V_1	V_3V_2		V_3V_4
V_4	V_4B_1	V_4B_2	V_4B_3	V_4V_1	V_4V_2	V_4V_3	

حسب جدول الإمكانيات الموافق للحدث B فإن عدد عناصر المجموعة B (عدد المربعات المظللة) يساوي 18.

$$p(B)=\frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد عناصر } \Omega}=\frac{18}{42}=\frac{3\times 6}{7\times 6}=\frac{3}{7}\qquad \boxed{p(B)=\frac{3}{7}}$$

● الحدث C : «سحب كرة بيضاء على الأكثر»

جدول الإمكانيات الموافق للحدث C موضح كما يلي:

الكرة 1 \ الكرة 2	B_1	B_2	B_3	V_1	V_2	V_3	V_4
B_1		B_1B_2	B_1B_3	B_1V_1	B_1V_2	B_1V_3	B_1V_4
B_2	B_2B_1		B_2B_3	B_2V_1	B_2V_2	B_2V_3	B_2V_4
B_3	B_3B_1	B_3B_2		B_3V_1	B_3V_2	B_3V_3	B_3V_4
V_1	V_1B_1	V_1B_2	V_1B_3		V_1V_2	V_1V_3	V_1V_4
V_2	V_2B_1	V_2B_2	V_2B_3	V_2V_1		V_2V_3	V_2V_4
V_3	V_3B_1	V_3B_2	V_3B_3	V_3V_1	V_3V_2		V_3V_4
V_4	V_4B_1	V_4B_2	V_4B_3	V_4V_1	V_4V_2	V_4V_3	

حسب جدول الإمكانيات الموافق للحدث C فإن عدد عناصر المجموعة C (عدد المربعات المظللة) يساوي 36.

$$p(C)=\frac{\text{عدد عناصر } C}{\text{عدد عناصر } \Omega}=\frac{36}{42}=\frac{6\times 6}{7\times 6}=\frac{6}{7}\qquad \boxed{p(C)=\frac{6}{7}}$$

II- نقترح اللعبة التالية:

للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha\ DA$ (α عدد طبيعي)، فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100\ DA$ وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50\ DA$ وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه.

وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة العدد الطبيعي α.

1) تعيين قيم المتغير العشوائي X:

● إذا سحب اللاعب كرتين بيضاوين يتحصل على $100\ DA$ وقد دفع $\alpha\ DA$ معناه ربح أو خسارة اللاعب هي $100-\alpha$.

● إذا سحب اللاعب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50\ DA$ وقد دفع $\alpha\ DA$ معناه ربح أو خسارة اللاعب هي $50-\alpha$.

● إذا سحب اللاعب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه $\alpha\ DA$ معناه خسارة اللاعب هي $-\alpha$.

ومنه:

قيم المتغير العشوائي X هي:

$$X=\{-\alpha\ ;\ 50-\alpha\ ;\ 100-\alpha\}$$

تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X:

● حساب $p(X=-\alpha)$:

معناه: احتمال أن يسحب اللاعب كرتين خضراوين.

الكرة 1 \ الكرة 2	B_1	B_2	B_3	V_1	V_2	V_3	V_4
B_1		B_1B_2	B_1B_3	B_1V_1	B_1V_2	B_1V_3	B_1V_4
B_2	B_2B_1		B_2B_3	B_2V_1	B_2V_2	B_2V_3	B_2V_4
B_3	B_3B_1	B_3B_2		B_3V_1	B_3V_2	B_3V_3	B_3V_4
V_1	V_1B_1	V_1B_2	V_1B_3		V_1V_2	V_1V_3	V_1V_4
V_2	V_2B_1	V_2B_2	V_2B_3	V_2V_1		V_2V_3	V_2V_4
V_3	V_3B_1	V_3B_2	V_3B_3	V_3V_1	V_3V_2		V_3V_4
V_4	V_4B_1	V_4B_2	V_4B_3	V_4V_1	V_4V_2	V_4V_3	

عدد عناصر حدث سحب كرتين خضراوين هو عدد المربعات المظللة في جدول الإمكانيات أعلاه ويساوي 12.

$$p(X=-\alpha)=\frac{12}{42}=\frac{2\times 6}{7\times 6}=\frac{2}{7}$$

● حساب $p(X=50-\alpha)$:

معناه: احتمال أن يسحب اللاعب كرتين مختلفتين في اللون.

الكرة 1 \ الكرة 2	B_1	B_2	B_3	V_1	V_2	V_3	V_4
B_1		B_1B_2	B_1B_3	B_1V_1	B_1V_2	B_1V_3	B_1V_4
B_2	B_2B_1		B_2B_3	B_2V_1	B_2V_2	B_2V_3	B_2V_4
B_3	B_3B_1	B_3B_2		B_3V_1	B_3V_2	B_3V_3	B_3V_4
V_1	V_1B_1	V_1B_2	V_1B_3		V_1V_2	V_1V_3	V_1V_4
V_2	V_2B_1	V_2B_2	V_2B_3	V_2V_1		V_2V_3	V_2V_4
V_3	V_3B_1	V_3B_2	V_3B_3	V_3V_1	V_3V_2		V_3V_4
V_4	V_4B_1	V_4B_2	V_4B_3	V_4V_1	V_4V_2	V_4V_3	

عدد عناصر حدث سحب كرتين مختلفتين في اللون هو عدد المربعات المظللة في جدول الإمكانيات أعلاه ويساوي 24.

$$p(X=-\alpha)=\frac{24}{42}=\frac{4\times 6}{7\times 6}=\frac{4}{7}$$

● حساب $p(X=100-\alpha)$:

معناه: احتمال أن يسحب اللاعب كرتين بيضاوين.

الكرة 1 \ الكرة 2	B_1	B_2	B_3	V_1	V_2	V_3	V_4
B_1		B_1B_2	B_1B_3	B_1V_1	B_1V_2	B_1V_3	B_1V_4
B_2	B_2B_1		B_2B_3	B_2V_1	B_2V_2	B_2V_3	B_2V_4
B_3	B_3B_1	B_3B_2		B_3V_1	B_3V_2	B_3V_3	B_3V_4
V_1	V_1B_1	V_1B_2	V_1B_3		V_1V_2	V_1V_3	V_1V_4
V_2	V_2B_1	V_2B_2	V_2B_3	V_2V_1		V_2V_3	V_2V_4
V_3	V_3B_1	V_3B_2	V_3B_3	V_3V_1	V_3V_2		V_3V_4
V_4	V_4B_1	V_4B_2	V_4B_3	V_4V_1	V_4V_2	V_4V_3	

عدد عناصر حدث سحب كرتين بيضاوين هو عدد المربعات المظللة في جدول الإمكانيات أعلاه ويساوي 6.

$$p(X=100-\alpha)=\frac{6}{42}=\frac{1\times 6}{7\times 6}=\frac{1}{7}$$

نلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	$-\alpha$	$50-\alpha$	$100-\alpha$
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

لاحظ أن:

$$p(X=-\alpha)+p(X=50-\alpha)+p(X=100-\alpha)=1$$

2) أ- نبين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X بدلالة α يعطى بـ :

$$E(X)=\frac{300}{7}-\alpha$$

لدينا:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=3}x_i\times p(X=x_i)$$

$$E(X)=-\alpha\times\frac{2}{7}+(50-\alpha)\frac{4}{7}+(100-\alpha)\frac{1}{7}$$

$$E(X)=\frac{-2\alpha+200-4\alpha+100-\alpha}{7}$$

$$E(X)=\frac{300-7\alpha}{7}$$

$$E(X)=\frac{300}{7}-\frac{7\alpha}{\alpha}$$

ومنه:

$$E(X)=\frac{300}{7}-\alpha$$

2) بـ- إيجاد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب:

تكون اللعبة في صالح اللاعب إذا كان الأمل الرياضي موجب.

$$E(X)>0$$

$$\frac{300}{7}-\alpha>0$$

$$\alpha<\frac{300}{7}$$

$$\alpha<42{,}857\ldots$$

ومنه:

أكبر قيمة ممكنة للعدد الطبيعي α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب هي:

$$\alpha=42\ DA$$