BAC2024-04-12-23

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية بلخير جلول -اولاد محمد- | السنة الدراسية: 2024/2023

امتحان الفصل الأول | يوم الاثنين: 2023/12/04

الشعبة: علوم تجريبية + تقني رياضي

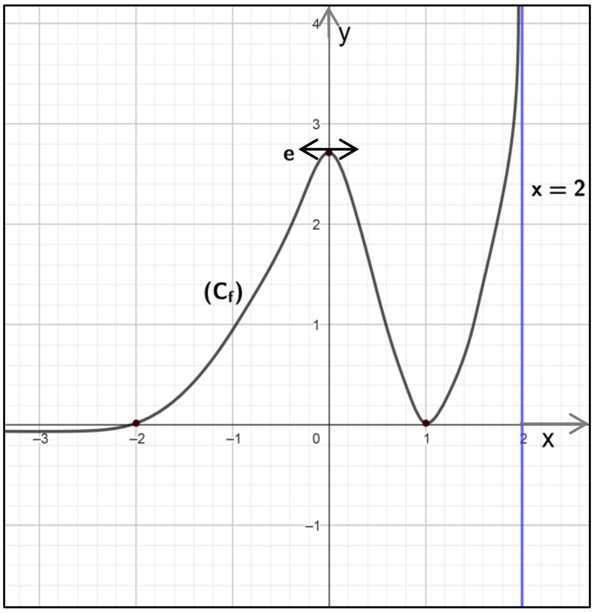
اختبار في مادة : الرياضيات | المدة: 02 سا

التمرين الأول : (5نقاط)

يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[$ حيث المستقيمين (Δ) ذو المعادلة $x=2$ و حامل محور الفواصل مقاربين له.

g الدالة العددية المعرفة بـ: $g(x)=\ln[f(x)]$

لكل سؤال جواب واحد صحيح ، اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التعليل في كل حالة :



1) الدالة g معرفة على المجال :

أ) $]-2;2[$ ب) $]-2;1[$ جـ) $]-2;1[\cup]1;2[$

2) الدالة g قابلة للإشتقاق عند "0" و :

أ) $g'(0)=1$ ب) $g'(0)=0$ جـ) $g'(0)=e$

3) المعادلة $g(x)=1$ تقبل:

أ) حل وحيد ب) حلين جـ) 3 حلول

4) نهاية $g(x)$ لما $x\overset{>}{\rightarrow}-2$ هي :

أ) $-\infty$ ب) $+\infty$ جـ) 0

5) المنحنى (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً معادلته :

أ) $x=0$ ب) $x=2$ جـ) $x=-1$

التمرين الثاني : (6نقاط)

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2+2\ln x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) برهن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $\alpha<2$.

4) استنتج إشارة $f(x)$.

5) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) الذي يشمل النقطة $(0;-2)$.

التمرين الثالث : (9نقاط)

I) نعتبر الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-1)e^x-1$

1) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) احسب g' ثم استنتج تغيرات الدالة g .

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $1.2<\alpha<1.3$

4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{e^x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{-2g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

د) بين أن $f(\alpha)=2(\alpha-1)$ ثم استنتج حصراً لـ $f(\alpha)$.

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3) أ) بين أن: $f(-\alpha)=-2$.

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) موازي للمستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ ثم أكتب معادلته.

4) انشئ (Δ)، (T) و (C_f).

5) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $2x\left(\dfrac{1}{e^x+1}-1\right)=m$.

انتهى الموضوع

تصحيح اختبار بسم الله

التمرين الأول: (07)

$g(x)=\ln[f(x)]$

① g معرفة لما $f(x)>0$

اي لما $]-2;1[\cup]1;2[$

الاختيار الصحيح (ج).

② الاختيار الصحيح هو: (ب) لأن:

$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$; $g'(0)=\frac{f'(0)}{f(0)}=0$

③ المعادلة $g(x)=1$

الاختيار الصحيح هو: (ج) لأن

$\ln[f(x)]=1$ أي $f(x)=e$

ومنه المعادلة تقبل حلين

④ الاختيار الصحيح هو: (أ) لأن:

$\lim_{x\to -2} g(x)=\lim_{x\to -2}\ln f(x)$

$=\lim_{t\to 0}\ln t=-\infty$

⑤ الاختيار الصحيح هو: (ب)

$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\ln[f(x)]=+\infty$

لأن $\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$

التمرين الثاني: (06)

$f(x)=x-2+2\ln x$

① حساب النهايات:

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\cancel{x}-2+2\ln x)=-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} x\left(1-\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

② المشتقة

$f'(x)=1+\frac{2}{x}>0$ $\left(=\frac{x+2}{x}\right)$

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

③ f مستمرة ورتيبة على $]0;+\infty[$

ولدينا $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $f(2)=2\ln 2$

أي: $0\in]-\infty;2\ln 2[$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha<2$

④ اشارة $f(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

⑤ معادلة المماس (T) الذي يشمل $(0;-2)$

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$-2=\left(1+\frac{2}{x_0}\right)(-x_0)+x_0-2+2\ln x_0$

$-2=-x_0-2+x_0-2+2\ln x_0$

$2\ln x_0=2$, $\ln x_0=1$

أي $x_0=e$

$$y = f'(e)(x-e)+f(e)$$

$$= \left(1+\frac{2}{e}\right)(x-e) + e - 2 + 2\ln e$$

$$= x - \cancel{e} + \frac{2}{e}x + 2 + \cancel{e} - \cancel{2} + \cancel{2}$$

$$\boxed{y = \left(1+\frac{2}{e}\right)x + 2}$$

التمرين الثالث (I)

$$g(x) = (x-1)e^x - 1$$

① حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^x - 1\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[xe^x - e^x - 1\right] = -1$$

$$g'(x) = e^x + (x-1)e^x = (1+x-1)e^x = e^x(x)$$

$e^x>0$ ومنه اشارة g' من اشارة (x)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

وبما أن [illegible] ومتزايدة [illegible]

مبرهنة القيم المتوسطة g مستمرة و رتيبة على $]1{,}2;1{,}3[$ و $g(1{,}2) = -0{,}33$ و $g(1{,}3) = 0{,}1$

أي $g(1{,}2)\times g(1{,}3)<0$ ومنه $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}2<\alpha<1{,}3$

③ اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

$$f(x) = \frac{2x}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{e^x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\left(\frac{2x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}\right) = 0$$

ب/ تبيان أن $f'(x) = \frac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2(e^x+1) - e^x(2x)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{2e^x+2-2xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-2\left(e^x(x-1)-1\right)}{(e^x+1)^2} = \frac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$$

$(e^x+1)^2>0$ ومنه اشارة f' من اشارة البسط

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$-2g(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0
تغير f		f متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]$		f متناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$	

ج- تبيان أن $f(\alpha) = 2(\alpha-1)$

لدينا $g(\alpha)=0$ إذن $e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$ بالتعويض نجد

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} = \frac{2\alpha}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}$$

$$f(\alpha) = 2(\alpha-1)$$

حصر $f(\alpha)$:

$$0{,}4 < f(\alpha) < 0{,}6$$

② تبيان أن $y=2x$ مستقيم مقارب لـ (C_f) في $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{e^x+1} - 2x\right] = \lim\left[\frac{\cancel{2x} - 2xe^x - \cancel{2x}}{e^x+1}\right] = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f)

دراسة الوضعية (C_f) و (Δ) ندرس اشارة الفرق: $\frac{-2xe^x}{e^x+1}$

$e^x>0,\ e^x+1>0$ إذن اشارة الفرق من اشارة $-2x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	تقاطع $(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)	

أ/ تبيان أن $f(-\alpha)=-2$

$f(-\alpha)=\frac{-2\alpha}{e^{-\alpha}+1}=\frac{-2\alpha}{\alpha-\cancel{1}+\cancel{1}}=-2$; $e^{-\alpha}=\alpha-1$

إذن $\boxed{f(-\alpha)=-2}$

ب/ تبيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازي لـ (Δ) معناه:

أي: $f'(x_0)=2$; $\frac{-2g(x_0)}{(e^{x_0}+1)^2}=2$

ومنه $-g(x_0)=(e^{x_0}+1)^2$

$-(x_0-1)e^{x_0}+1=e^{2x_0}+1+2e^{x_0}$

$-x_0e^{x_0}+e^{x_0}+\cancel{1}=e^{2x_0}+\cancel{1}+2e^{x_0}$

$e^{x_0}(-x_0+\cancel{1}-\cancel{2}-e^{x_0})=0$

$-e^{x_0}(x_0+1+e^{x_0})=0$

إذن $-e^{x_0}\neq 0$; $e^{x_0}+x_0+1=0$

لدينا $e^{-\alpha}=-1+\alpha$ ولدينا

$e^{-\alpha}-\alpha+1=-1+\cancel{\alpha}-\cancel{\alpha}+\cancel{1}=0$

إذن $-\alpha$ حل للمعادلة $e^{x_0}+x_0+1=0$

معناه $x_0=-\alpha$

معادلته: $y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(\alpha)$

$\boxed{y=2x+2\alpha-2}$

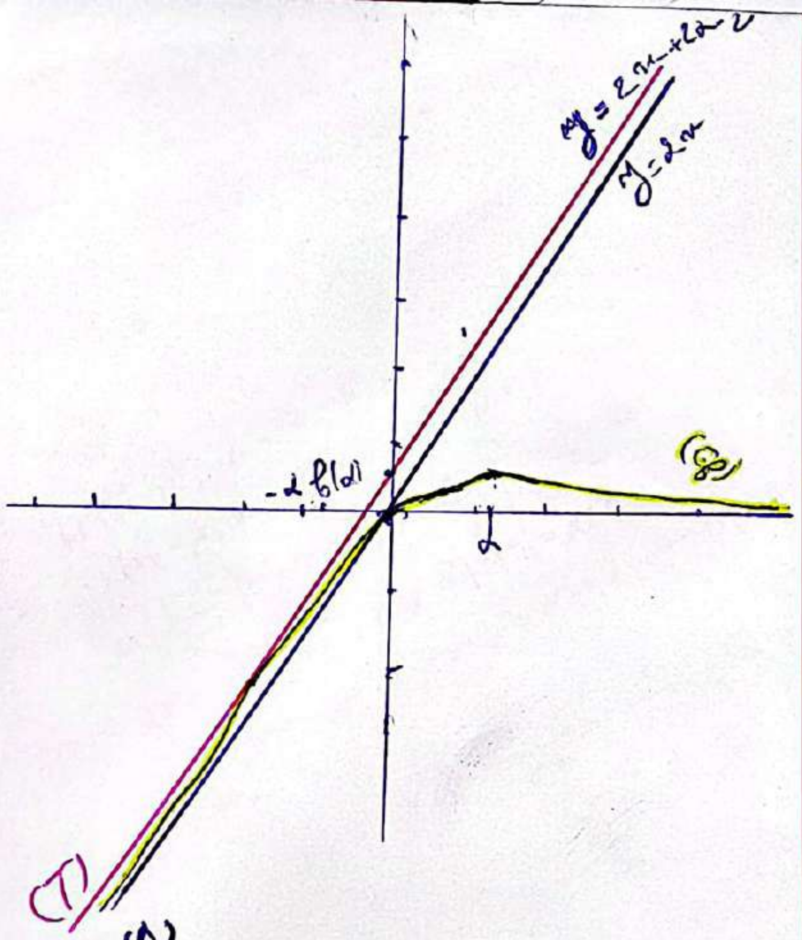
④ انشاء (C_f)، (Δ) و (T)

2ب) نتحقق أن $f'(-\alpha)=2$

$f'(-\alpha)=\frac{-2g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{-2(-\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}$

$=\frac{-2(-\alpha(\alpha-1)-(\alpha-1)-1)}{(\alpha-1+1)^2}$

$=\frac{-2(-\alpha^2+\cancel{\alpha}-\cancel{\alpha}+\cancel{1}-\cancel{1})}{\alpha^2}=2$



⑤ المناقشة حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$2x\left(\frac{1}{e^x+1}-1\right)=m$

$\frac{2x}{e^x+1}-2x=m$; $\frac{2x}{e^x+1}=2x+m$

أي $f(x)=2x+m$

* لما $m\in]-\infty;0[$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب
* لما $m=0$ " " " " معدوم
* لما $0<m<2\alpha-2$ المعادلة تقبل حلين
* لما $m=2\alpha-2$ " " حل وحيد
* لما $m>2\alpha-2$ " لا تقبل حلول.