ملخص الدالة الأسية

تعريف : الدالة f التي هي معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين الآتيين :

$f' = f$ و $f(0) = 1$ تسمى الدالة الأسية و نرمز لها ب : $\exp(x)$ أو بالكتابة المبسطة e^x.

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح n .

1) $e^{x+y} = e^x . e^y$ ، 2) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ ، 3) $e^{nx} = (e^x)^n$ ، 4) $e^x > 0$

5) $e^x = e^y$ معناه $x = y$ ، 6) $e^x < e^y$ معناه $x < y$ ، 7) $e^x > e^y$ معناه $x > y$

8) $e^0 = 1$ ، 9) $x > 0$ يكافئ $e^x > 1$ ، 10) $x < 0$ يكافئ $0 < e^x < 1$

دراسة الدالة الأسية :

الدالة $x \to e^x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(e^x)' = e^x$ بصفة عامة إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على D فإنه من أجل كل $x \in D$: $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x) \times e^{u(x)}$

النهايات :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ، $\lim\limits_{u(x) \to +\infty} e^{u(x)} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ ،

$\lim\limits_{u(x) \to -\infty} u(x) \times e^{u(x)} = 0$ ، $\lim\limits_{u(x) \to -\infty} e^{u(x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ تعميم : $\lim\limits_{u(x) \to 0} \dfrac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ تعميم : $\lim\limits_{u(x) \to +\infty} \dfrac{e^{u(x)}}{u(x)} = +\infty$

ملاحظات : 1) من أجل $\alpha \in \mathbb{N}^*$ فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0$

2) $\ln e^{u(x)} = u(x)$ ، $e^{\ln u(x)} = u(x)$

دراسة إشارة العبارات الأسية :

الحالة الأولى $\left[f(x) \times e^{u(x)}\right]$ هنا الإشارة من إشارة الدّالة f

الحالة الثانية العبارة من الشكل : $ae^{\alpha x + \beta} + b$ حيث a ، b ، α ، β أعداد حقيقية مع $a\alpha \neq 0$.

1) إذا كان a و b موجبين فإن $ae^{\alpha x + \beta} + b > 0$.

2) إذا كان a و b سالبين فإن $ae^{\alpha x + \beta} + b < 0$.

3) إذا كان a و b مختلفين في الإشارة فإن المعادلة $ae^{\alpha x + \beta} + b = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 و الإشارة كمايلي

x	$-\infty$ x_0	$+\infty$
$ae^{\alpha x + \beta} + b$	مخالف لإشارة $a\alpha$	موافق لإشارة $a\alpha$

التمرين الاول

بسط العبارات التالية:

1) $(e^x)^2 \times e^{-3x}$ ، 2) $\dfrac{e^{-2x+1}}{e^{2x}}$ ، 3) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-2x}}$

التمرين الثاني

أثبت صحة المساواة في كل حالة ممايلي

1) $\dfrac{1-e^{-3x}}{1+e^{-3x}} = \dfrac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$ ، 2) $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}} = e^{-x} - e^{-2x}$

3) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ، 4) $\dfrac{(e^{2x}+1)^2}{e^{2x}} = (e^x + e^{-x})^2$

التمرين الثالث

✓ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $e^{-2x}+1=0$ ، 2) $e^{-3x+6}-1=0$ ، 3) $e^{2x-1}-e=0$

4) $e^{4x} = e^{x-1}$ ، 5) $e^{2x+1}.e^{2x} = e^{3x-4}$ ، 6) $e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}}$

7) $e^{-x^2} = \dfrac{1}{e}$ ، 8) $e^{-x^2} = \dfrac{1}{e^{3x-4}}$ ، 9) $e^{\frac{x+4}{-x+6}} = e^{\frac{1}{x}}$

10) $e^{-3x+4} - (e^x)^{-4} = 0$ ، 11) $e^{2x} = 2 - e^x$

✓✓ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $e^{3x+6} < 0$ ، 2) $e^{2x^2} \leq e^{5x+3}$ ، 3) $e^x < e^{-2x}$

4) $e^{2x^2} > e^{5x+3}$ ، 5) $e^{x+1} > e^{\frac{-2}{x}}$ ، 6) $e^{2x}+3e^x-4>0$

التمرين الرابع

أدرس إشارة كل من العبارات التالية :

$A(x) = 2e^{x+1}+3$ ، $B(x) = -2e^{-x+1}-5$

$C(x) = 2e^{x+3}-4$ ، $D(x) = e^{-2x+1}-1$

$E(x) = (x^2+x-2)e^{3-x}$ ، $K(x) = e^{2x}+e^x-6$

$G(x) = e^{2x} - 7e^x + 12$

التمرين الخامس

أحسب مشتقات الدوال التالية

1) $f(x) = (2x+1)e^x - 1$ ، 2) $g(x) = x - (x+1)e^{-x} + 3$

3) $h(x) = e^x - ex - 1$ ، 4) $t(x) = \dfrac{2x+2}{e^x+2}$

5) $k(x) = \dfrac{e^x+4x-1}{e^x+1}$ ، 6) $G(x) = x - 1 + \dfrac{4}{e^x+1}$

7) $e(x) = (-3x^3+2x^2)e^{-x+1}$

التمرين السادس

أحسب النهايات التالية

1) $\lim_{x\to\infty} e^{-3x}+1$ ، 2) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}-x+4$ 3) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$

4) $\lim_{x\to\infty} e^{x}-x$ ، 5) $\lim_{x\to\infty}(3x+4)e^{x}$ ، 6) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$

7) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2+x}$ ، 8) $\lim_{x\to\infty}(x^2+x+3)e^{x}$ ، 9) $\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{x}-2}{e^{x}+1}$

10) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}+1}{e^{x}+1}$ ، 11) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{3}$ ، 12) $\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{2x}$ ، 14) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$ ، 15) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-4x}}{x}$ ، 17) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-x-1}{x^2}$

المسألة الأولى

❖ g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن : $0,36<\alpha<0,37$

3) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

❖❖ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$

1) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$

ب) استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أحسب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$.

المسألة الثانية

❖ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=(x+2)e^{x}-2$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة $g(x)$.

❖❖ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)$

ب) إستنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

جـ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث :

$0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$

ب) أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

المسألة الثالثة

❖ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = -4 + (4-2x)e^x$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الاخر α حيث: $1,59 < \alpha < 1,6$

3) استنتج إشارة $g(x)$

❖❖ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$.

(بيّن أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$.

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$

ب) استنتج اشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

جـ) أحسب $f(1)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

3) أ) بيّن أن: $f(\alpha) = -1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ حيث : α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء الاول.

ب) إستنتج حصر للعدد α (تدور النتائج إلى 10^{-2})

جـ) أرسم (C_f) .

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m ، عدد و إشارة حلول المعادلة : $2x-2 = (e^x - 2x)(m+1)$

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = \left[f(x)\right]^2$

أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة h .

المسألة الرابعة

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلة له .

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2) أكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3) h الدالة المعرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ كمايلي : $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$

أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

4) أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

5) نعتبر m وسيط حقيقي و المعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب : $f(x)=m(x-2)......(E)$ ❖

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

6) g الدالة المعرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بـ : $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

إعتمادا على السؤال رقم (1) ، شكل جدول تغيرات الدالة g .

حلول المسائل

حل المسألة الأولى

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) **دراسة اتجاه تغيّر الدالة g.**

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+e^{2x-2}\right)$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x)<0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) **تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.**

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-2x-e^{2x-2}=+\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-2x-e^{2x-2}=\lim_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2}-\frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty$$

ومنه الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $g(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ وبالأخص المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أنّ $0,36<\alpha<0,37$.

$g(0,36)\approx 0,002$ و $g(0,37)\approx -0,02$ إذن $g(0,36)\times g(0,37)<0$ ومنه $0,36<\alpha<0,37$.

3) **استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.**

لدينا الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x<\alpha$ فإن $g(x)>g(\alpha)$ أي $g(x)>0$.

إذا كان $x>\alpha$ فإن $g(x)<g(\alpha)$ أي $g(x)<0$ ؛ كما أنّ $g(\alpha)=0$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) أ) **تبيين أنّ $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.**

$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب) إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(-x)$.

إذا كان $x<-\alpha$ فإن $-x>\alpha$ ومنه $g(-x)<0$ أي $f'(x)<0$.

إذا كان $x>-\alpha$ فإن $-x<\alpha$ ومنه $g(-x)>0$ أي $f'(x)>0$.

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) **حساب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.**

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x+2}-x+1=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) **حساب** $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}xe^{2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}=0$$

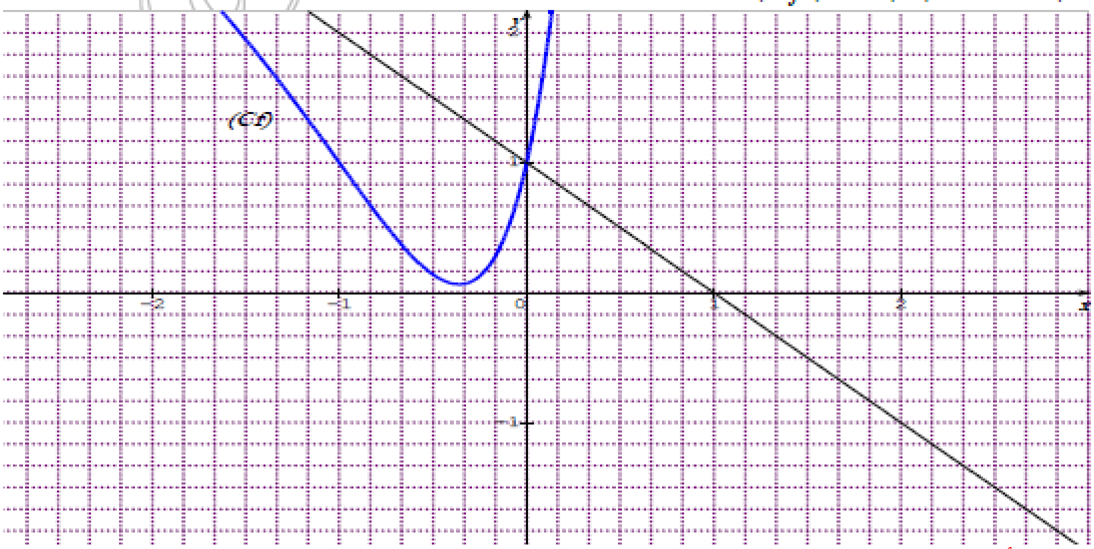
ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=-x+1$ بجوار $-\infty$.

4) **دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).**

$f(x)+x-1=xe^{2x+2}$؛ من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{2x+2}>0$ ومنه إشارة $f(x)+x-1$ هي نفس إشارة x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)+x-1$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.	(C_f) فوق (Δ)	

5) **انشاء (Δ) و (C_f).**



حل المسألة الثانية

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ **كما يلي:** $g(x)=(x+2)e^{x}-2$.

1) حساب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$.

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^{x}+2e^{x}-2=-2$ لأن $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}2e^{x}=0$.

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{x}-2=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$.

2) **دراسة اتجاه تغير الدالة** g.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=e^{x}+(x+2)e^{x}=e^{x}(x+3)$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^{x}>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(x+3)$.

من أجل $x\in]-\infty;-3[$ يكون $g'(x)<0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3]$.

و من أجل $x\in]-3;+\infty[$ يكون $g'(x)>0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-3;+\infty[$.

وجدول تغيّراتها يكون كما يلي:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-e^{-3}-2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$g(0)=(0+2)e^{0}-2=0$

استنتاج إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-\infty;0[$: $g(x)<0$ ومن أجل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)>0$ و $g(0)=0$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(x+1)\left(\dfrac{2x+3}{x+1}-e^{x}\right)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+1}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}+e^{x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x+3-(x+1)e^{x}=-\infty$.

2) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=-g(x)$.

$f'(x)=2-\left[e^{x}+e^{x}(x+1)\right]=2-e^{x}(x+2)=-g(x)$

ب) استنتاج إشارة $f'(x)$.

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-\infty;0[$: $g(x)<0$ ومنه $f'(x)>0$

ومن أجل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)>0$ ومنه $f'(x)<0$ و $f'(0)=0$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

جـ) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to-\infty}-(x+1)e^{x}=\lim_{x\to-\infty}-xe^{x}-e^{x}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

لدينا $f(x)-(2x+3)=-(x+1)e^{x}=(-x-1)e^{x}$

ومنه إشارة $f(x)-(2x+3)$ هي نفس إشارة $(-x-1)$ لأنّ $e^{x}>0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

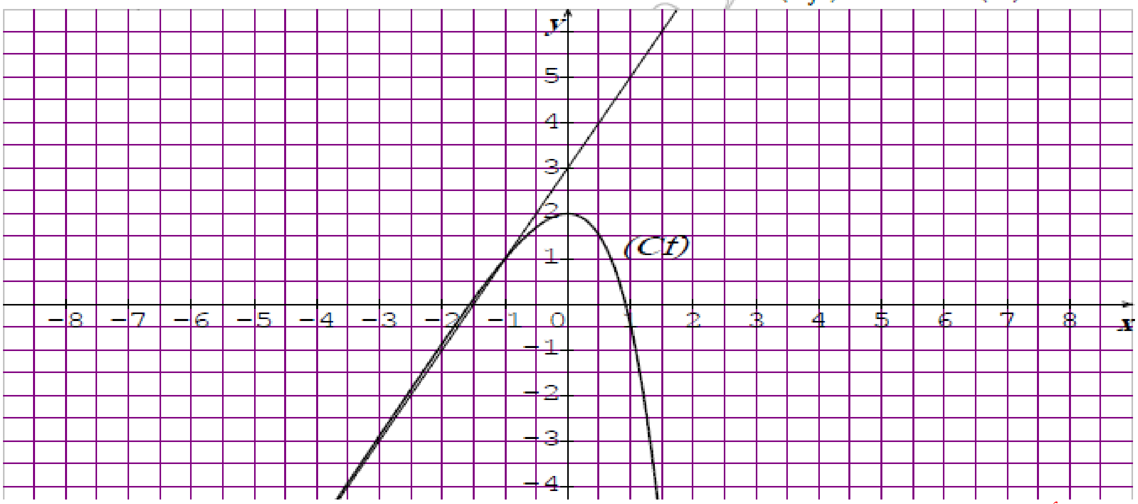
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-(2x+3)$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

3) أ) **تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث:** $0,92<\alpha<0,93$ و $-1,56<\beta<-1,55$.

الدالة f، مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ وبالخصوص على المجال $[-1,56;-1,55]$ و $f(-1,56)\approx-0,002$ و $f(-1,55)\approx0,17$ أي $f(-1,55)\times f(-1,56)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]-1,56;-1,55[$ بحيث $f(\beta)=0$.

وكذلك، الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,92;0,93]$ و $f(0,92)\approx0,02$ و $f(0,93)\approx-0,03$ أي $f(0,92)\times f(0,93)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,92;0,93[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

ب) **رسم (Δ) والمنحنى (C_f).**



حل المسألة الثالثة

I- لدينا : $g(x)=-4+(4-2x)e^{x}$ ، حيث $D_g=\mathbb{R}$.

1. دراسة تغيرات الدالة g .

– النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4+(4-2x)e^{x}\right)=-4$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4+(4-2x)e^{x}\right)=-\infty$.

– المشتق وإشارته : من أجل كل عدد حقيقي لدينا $g'(x)=-2e^{x}+(4-2x)e^{x}=2(1-x)e^{x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

– جدول التغيرات .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$g(0)=-4+(4-2\times0)e^{0}=0$

2. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين .

بما أن $g(0)=0$ فإن العدد 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

ولدينا الدالة $g(x)$ معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1,59;1,60]$.

و $g(1,59)=0,02$ ، $g(1,60)=-0,04$ أي $g(1,59)\times g(1,60)<0$.

ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $1,59<\alpha<1,60$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	0	-	

II- لدينا : $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$ ، حيث $D_f=\mathbb{R}$.

1. إثبات أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين .

- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-2}{e^x-2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2x}{2x}\right)=-1$.

وبالتالي : (C_f) يقبل بجوار $(-\infty)$ مقارب أفقي معادلته $y=-1$.

- ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-2}{e^x-2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2.\dfrac{x}{e^x}\right)=0$.

وبالتالي : (C_f) يقبل بجوار $(+\infty)$ مقارب أفقي معادلته $y=0$.

2. أ- حساب $f'(x)$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=\dfrac{2(e^x-2x)-(e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2}=\dfrac{2e^x-4x+4x-4-(2x-2)e^x}{(e^x-2x)^2}$.

أي : $f'(x)=\dfrac{-4+(4-2x)e^x}{(e^x-2x)^2}$.

ومنه : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

ب- استنتاج إشارة $f'(x)$.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

- جدول تغيرات الدالة f .

$$f(0)=\frac{2\times0-2}{e^0-2\times0}=-2$$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f'(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

جـ- حساب $f(1)$ ، ثم استنتاج ، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

لدينا : $f(1)=\dfrac{2\times1-2}{e^1-2\times1}=0$.

بالاستعانة بجدول التغيرات نستنتج : $f(x)<0$ لما $x\in]-\infty;1[$ و $f(x)>0$ لما $x\in]1;+\infty[$.

3. أ- كتابة $f(\alpha)$ بدلالة α .

لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha}$ ، ولدينا : $-4+(4-2\alpha)e^{\alpha}=0$ ، أي : $e^{\alpha}=\dfrac{2}{2-\alpha}$.

إذن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{\dfrac{2}{2-\alpha}-2\alpha}$ ، أي : $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^{2}}=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ، ومنه : $f(\alpha)=\dfrac{1-\alpha+1}{\alpha-1}=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$.

ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

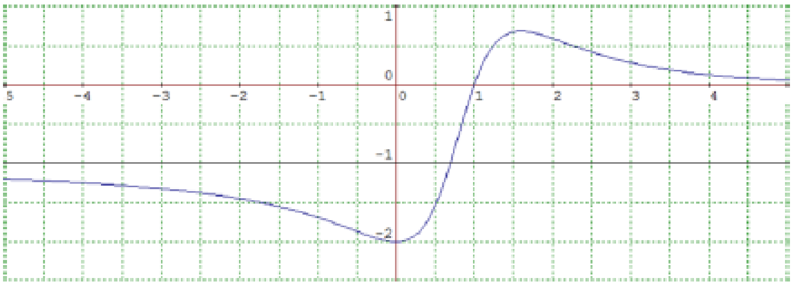
لدينا : $1,59<\alpha<1,60$ إذن : $0,59<\alpha-1<0,60$.

وبالتالي : $\dfrac{1}{0,60}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{0,59}$.

أي : $-1+\dfrac{1}{0,60}<-1+\dfrac{1}{\alpha-1}<-1+\dfrac{1}{0,59}$.

ومنه $0,66<f(\alpha)<0,69$.

جـ- رسم (C_f) .



- $(1;0)$ و $(0;-2)$ نقطتي تقاطع مع محوري الفواصل والتراتيب .

- $y=-1$ و $y=0$ معادلتي مقاربين أفقيين للمنحني (C_f) .

4. المناقشة البيانية لحلول المعادلة .

لدينا : $2x-2=(e^{x}-2x)(m+1)$ ، وبالتالي : $\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}=m+1$ ، إذن : $\begin{cases} y=f(x) \\ y=m+1 \end{cases}$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني مع المستقيم ذو المعادلة $y=m+1$ ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m .

- لما $m+1<-2$ أي $m<-3$ لا توجد حلول للمعادلة .
- لما $m=-3$ للمعادلة حل مضاعف $x=0$.
- لما $-2<m+1<-1$ أي $-3<m<-2$ للمعادلة حلين أحدهما موجب وآخر سالب .
- لما $-2\leq m<-1$ للمعادلة حل وحيد موجب .
- لما $m=-1$ للمعادلة حل وحيد معدوم .
- لما $0<m+1<f(\alpha)$ أي $-1<m<-2+\dfrac{1}{\alpha-1}$ للمعادلة حلين متمايزين موجبين .
- لما $m=-2+\dfrac{1}{\alpha-1}$ للمعادلة حل مضاعف موجب $x=\alpha$.
- لما $m>-2+\dfrac{1}{\alpha-1}$ لا توجد حلول للمعادلة .

5. لدينا $h(x)=[f(x)]^{2}$ ، **حيث** $D_h=\mathbb{R}$.

أ- حساب $h'(x)$.

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0		+		0	-	
$f(x)$			-		0		+		
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $h'(x)=2.f'(x).f(x)$.

– إشارة $h'(x)$.

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(x).f(x)$. أنظر الجدول أعلاه .

ب– جدول تغيرات الدالة h .

جدول تغيرات الدالة h بالشكل المقابل .

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 -	0 +	0 -	
$f(x)$	1 ↗	4 ↘	0 ↗	$f^2(\alpha)$ ↘	0

حل المسألة الرابعة

$f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$

1- أ- حساب النهايات : . $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^3)e^{-x+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x^3)e^{-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{e^{x-1}}=0$.

و منه $y=0$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

ب-إثبات أن عبارة المشتقة هي $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$:

نحسب المشتقة $f'(x)=(-3x^2+4x)e^{-x+1}-(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$ و منه $f'(x)=(x^3-5x^2+4x)e^{-x+1}$ أي ان $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$ محققة .

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x^2-5x+4)$

لدينا (x^2-5x+4) له جذرين هما 1 و 4

x	$-\infty$	0		1		4	$+\infty$
اشارة (x^2-5x+4)	+		+	0	–	0	+
اشارة x	–	0	+		+		+
اشارة $f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+

و منه f متزايدة على المجالين $[0\,;1]$ و $[4;+\infty[$ متناقصة على المجالين $]-\infty\,;0]$ و $[1\,;4]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	0	–	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-32e^{-3}$	↗	0

2- كتابة معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$f'(2)=-4e^{-1}$ و $f(2)=0$ و منه معادلة المماس (T) هي $y=-\frac{4}{e}x+\frac{8}{e}$.

3- h دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ $h(x)=x^2.e^{-x+2}-4$

دراسة تغيرات الدالة h : $h'(x)=2x.e^{-x+2}-x^2.e^{-x+2}=x(2-x)e^{-x+2}$ إشارتها من إشارة $(2-x)$

و منه فهي موجبة على المجال $[0\,;2]$ و سالبة على المجال $[2;+\infty[$ و منه الدالة h متزايدة على المجال $[0\,;2]$ و متناقصة على المجال $[2;+\infty[$ و لدينا $h(2)=0$ إذن $h(2)=0$ قيمة حدية كبرى و منه $h(x)$ إشارتها سالبة .

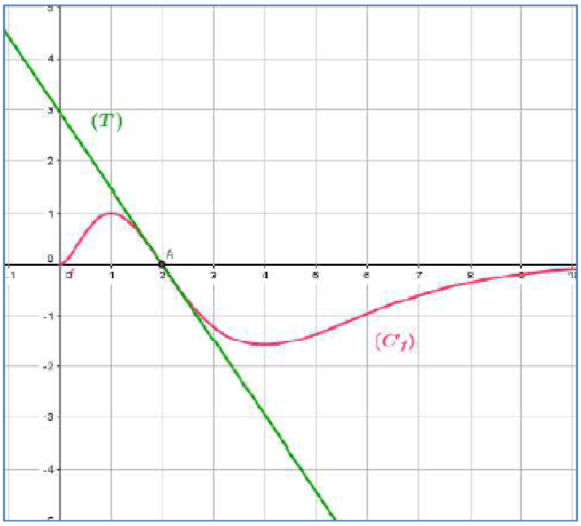
تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0\,;+\infty[$:

$f(x)-y=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}+4e^{-1}x-8e^{-1}=-x^3.e^{-x+1}+2x^2.e^{-x+1}+4xe^{-1}-8e^{-1}$ و منه

$f(x)-y=-x^3.e^{-x+1}+4x.e^{-1}+2x^2.e^{-x+1}-8e^{-1}=-xe^{-1}(x^2.e^{-x+2}-4)+2e^{-1}(x^2e^{-x+2}-4)$ أي ان

اشارة الفرق من إشارة $(x-2)$ أي ان $f(x)-y=(x^2.e^{-x+2}-4)(-x+2)e^{-1}$ أي ان $f(x)-y=h(x)(-x+2)e^{-1}$ بما أن إشارة $h(x)$ سالبة ومنه (C_f) يقع فوق (T) على المجال $[0;2[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]2;+\infty[$ و يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2 .

4- رسم المنحنى البياني (C_f) و المماس (T) :



5- المناقشة بيانيا :

المعادلة $f(x)=m(x-2).....(E)$ حلها هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=m(x-2)$.

لما $m\in\left]-\infty;-\frac{4}{e}\right]$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

لما $m\in\left]-\frac{4}{e};0\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاثة نقاط و منه للمعادلة (E) ثلاثة حلول.

لما $m=0$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة (E) حلين .

لما $m\in]0;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

6- لدينا $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ من السؤال رقم (1) بوضع $t=\frac{1}{x}$

و منه $\lim_{x\to+\infty} t=0$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0} t=+\infty$ نجد $\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{t\to0} f(t)=0$.

المشتقة : هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ و منه $g'(x)=-\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x^2}-5\frac{1}{x}+4\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ أي

$g'(x)=\frac{1}{x^5}(-1+5x-4x^2)e^{-\frac{1}{x}+1}$ و اشارته منه اشارة $(-1+5x-4x^2)$ و لها جذرين هما 1 و $\frac{1}{4}$

و منه g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{4};1\right]$ و متناقصة على المجالين $[1;+\infty[$; $\left]0;\frac{1}{4}\right]$

و $g\left(\frac{1}{4}\right)=f(4)$, $g(1)=f(1)$

بالتوفيق لطلبة بكالوريا 2021

مع تحيات الأستاذ قرايرية سمير