دراسة دوال لوغاريتمية

دالة لوغاريتمية-1- من بكالوريا أجنبية بتصرف

(I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$$

1- ادرس تغيّرات الدّالة g.

2- بيّن أنّ الدّالة g زوجية.

3- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$، ثمّ استنتج أنّ $g(-\alpha)=0$.

4- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أ- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة f؟

ب- فسّر النتيجة هندسيا.

2- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

3- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(x^2+1)}$.

4- أ- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f).

5- بيّن أنّ الدّالة f فردية.

6- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$، ثمّ استنتج عبارة $f(-\alpha)$.

7- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha(\alpha f(x)-2)+f(x)}{(x-\alpha)(\alpha^2+1)}=0$.

8- مثّل بيانيا (C_f).

بالتوفيـــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريا

حل الدالة اللوغاريتمية-1-

1 دراسة تغيّرات الدّالة g

1-النّهايات

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(2x^2-(x^2+1)\ln(x^2+1)\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\left(2-\frac{(x^2+1)}{x^2}\ln(x^2+1)\right)\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\left(2-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln(x^2+1)\right)\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

لأنّ:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-(x^2+1)\ln(x^2+1)\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(2-\frac{(x^2+1)}{x^2}\ln(x^2+1)\right)\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(2-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln(x^2+1)\right)\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

لأنّ:

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty\\
\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)=+\infty\\
\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0
\end{cases}
$$

2-المشتقة

الدّالّة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 4x-\left(2x\ln(x^2+1)+\frac{2x}{x^2+1}(x^2+1)\right)\\
&= 4x-2x\ln(x^2+1)-2x\\
&= 2x-2x\ln(x^2+1)\\
&= 2x\left(1-\ln(x^2+1)\right)
\end{aligned}
$$

2-إشارة المشتقة

$g'(x)=0$ يكافئ:

$$2x\left(1-\ln(x^2+1)\right)=0$$

يكافئ:

$$
\begin{cases}
2x=0\\
\text{أو}\\
1-\ln(x^2+1)=0
\end{cases}
$$

يكافئ:

$$
\begin{cases}
x=0\\
\text{أو}\\
\ln(x^2+1)=1
\end{cases}
$$

يكافئ:

$$
\begin{cases}
x=0\\
\text{أو}\\
x^2+1=e
\end{cases}
$$

يكافئ:

$$
\begin{cases}
x=0\\
\text{أو}\\
x^2=e-1
\end{cases}
$$

يكافئ:

$$
\begin{cases}
x=0\\
\text{أو}\\
|x|=\sqrt{e-1}
\end{cases}
$$

ومنه:

$$
\begin{cases}
x=0\\
\text{أو}\\
x=\sqrt{e-1}\ \text{أو}\ x=-\sqrt{e-1}
\end{cases}
$$

- لمّا $-\sqrt{e-1}\leq x\leq\sqrt{e-1}$ يكافئ:

$$|x|\leq\sqrt{e-1}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$x^2 \leq e-1$$

يكافئ:

$$x^2+1 \leq e$$

يكافئ:

$$\ln\left(x^2+1\right) \leq 1$$

يكافئ:

$$0 \leq 1-\ln\left(x^2+1\right)$$

• لمّا $\sqrt{e-1} \leq x$
بتربيع الطرفين نجد:

$$e-1 \leq x^2$$

يكافئ:

$$1 \leq \ln\left(x^2+1\right)$$

يكافئ:

$$1-\ln\left(x^2+1\right) \leq 0$$

• لمّا $x \leq -\sqrt{e-1}$
بتربيع الطرفين نجد:

$$x^2 \geq e-1$$

يكافئ:

$$1-\ln\left(x^2+1\right) \leq 0$$

لنلخّص ذلك الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-\sqrt{e-1}$		0		$\sqrt{e-1}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln\left(x^2+1\right)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

3- إتجاه التغيّر

• لمّا $x \in \left]-\infty; -\sqrt{e-1}\right] \cup \left[0; \sqrt{e-1}\right]$، لدينا: $g'(x) \geq 0$ ومنه الدّالة g متزايدة.
• لمّا $x \in \left[-\sqrt{e-1}; 0\right] \cup \left[\sqrt{e-1}; +\infty\right[$، لدينا: $g'(x) \leq 0$ ومنه الدّالة g متناقصة.

4- جدول التغيّرات

x	$-\infty$		$-\sqrt{e-1}$		0		$\sqrt{e-1}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(-\sqrt{e-1}\right)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g\left(\sqrt{e-1}\right)$	$\searrow$	$+\infty$

حيث: $g\left(-\sqrt{e-1}\right) = -2+e$، $g\left(\sqrt{e-1}\right) = -2+e$ و $g(0) = 0$.

2 تبيين أنّ الدّالة g زوجية

لدينا كل من x و $-x$ من $\mathbb{R}$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} g(-x) &= 2(-x)^2 - \left((-x)^2+1\right)\ln\left((-x)^2+1\right) \\ &= 2x^2 - \left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدّالة g زوجية.

3 تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$

لدينا: $g\left(\sqrt{e-1}\right) = -2+e \succ 0$ و $g\left(\sqrt{e^2-1}\right) = -2 \prec 0$، إذن:

من جدول التغيّرات الدّالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$ ولدينا: $g\left(\sqrt{e-1}\right)\times g\left(\sqrt{e^2-1}\right) \prec 0$، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$.

استنتاج أنّ $g(-\alpha)=0$

لدينا الدّالة g زوجية معناه إذا كان α ينتمي إلى المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$ فإنّ: $-\alpha$ من المجال $\left]-\sqrt{e^2-1};-\sqrt{e-1}\right[$.

وكذلك:

$$\begin{aligned} g(-\alpha) &= g(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4 تعيين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ من جدول تغيّرات الدّالة g تكون إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ كمايلي:

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

.II

1 أ- تبيين أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$، لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2} \end{aligned}$$

الآن بوضع $t=x^2$ نجد:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t} \\ &= k'(0) \\ &= \frac{1}{0+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

حيث k هي الدّالة المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $k(t)=\ln(t+1)$، ثمّ نحسب النّهاية باستعمال العدد المشتق على الدّالة k.

الاستنتاج بالنسبة للدّالة f

بما أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ و $f(0)=0$ فإنّ الدّالة f تقبل الاشتقاق في 0.

ب- تفسير النّتيجة هندسيا

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماسا في النقطة ذات الفاصلة 0 ميله هو 1. معادلته هي: $y=x$.

2 ✍ حساب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(x^2\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2\ln|x|}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-2\frac{\ln(-x)}{-x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

لأنّ:

$$\begin{cases}
\lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln|x|}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln(x)}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

لأنّ:

$$\begin{cases}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0
\end{cases}$$

✍ التفسير الهندسي

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب لـ (C_f) في جوار $-\infty$ و $+\infty$ موازٍ لحامل محور الفواصل.

3 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(x^2+1)}$

الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2x}{x^2+1}\times x-\ln\left(x^2+1\right)}{x^2} \\ &= \frac{2x^2-\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)}{x^2\left(x^2+1\right)} \\ &= \frac{g(x)}{x^2\left(x^2+1\right)} \end{aligned}$$

4 أ- تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

ب- الاستنتاج بالنسبة للمنحني (C_f)

لدينا $f'(x)$ انعدمت لمّا $x=0$ ولم تغيّر من إشارتها وبالتالي فإنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي: $O(0;0)$.

5 تبيين أنّ الدّالة f فردية

لدينا كل من x و $-x$ من $\mathbb{R}$ ولدينا كذلك:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\ln\left((-x)^2+1\right)}{-x} \\ &= -\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

ومنه الدّالة f فردية.

6 تبيين أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

لدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha)-\frac{2\alpha}{\alpha^2+1} &= \frac{\ln\left(\alpha^2+1\right)}{\alpha}-\frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \\ &= \frac{\left(\alpha^2+1\right)\ln\left(\alpha^2+1\right)-2\alpha^2}{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= \frac{-\left(2\alpha^2-\left(\alpha^2+1\right)\ln\left(\alpha^2+1\right)\right)}{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= \frac{-g(\alpha)}{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= \frac{0}{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\boxed{f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}}$$

استنتاج عبارة $f(-\alpha)$

لدينا الدّالة f فردية ومنه:

$$\begin{aligned} f(-\alpha) &= -f(\alpha) \\ &= -\frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\boxed{f(-\alpha) = -\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}}$$

7 **تبيين أنّ: $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\alpha(\alpha f(x)-2)+f(x)}{(x-\alpha)(\alpha^2+1)} = 0$**

لدينا مايلي:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha(\alpha f(x)-2)+f(x)}{(x-\alpha)(\alpha^2+1)} &= \lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha^2 f(x)-2\alpha+f(x)}{(x-\alpha)(\alpha^2+1)} \\ &= \lim_{x\to\alpha} \frac{(\alpha^2+1)f(x)-2\alpha}{(x-\alpha)(\alpha^2+1)} \\ &= \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}}{x-\alpha} \\ &= \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \\ &= f'(\alpha) \\ &= \frac{g(\alpha)}{\alpha^2(\alpha^2+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

8 **التمثيل البياني**

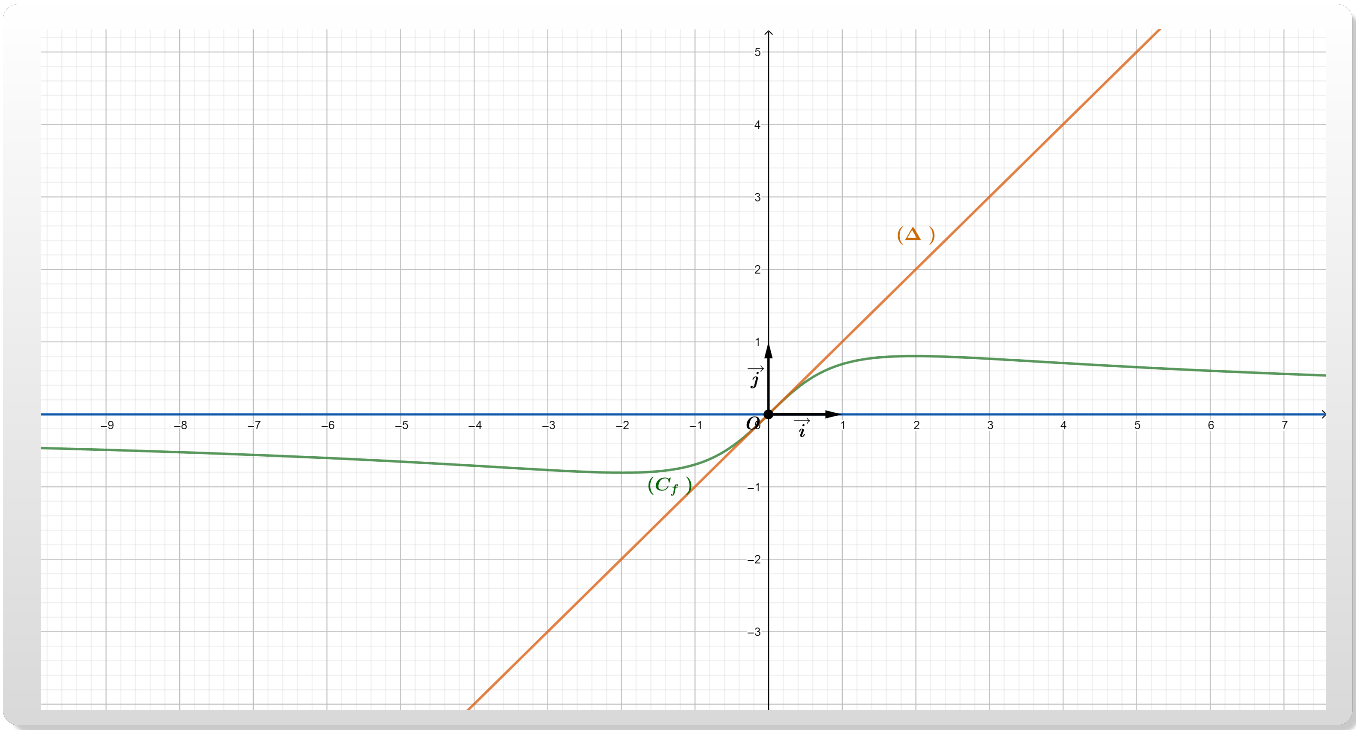
خطوات التمثيل:

1- نرسم المستقيمات المقاربة.

2- نعيّن نقط التقاطع مع حاملي محوري الإحداثيات.

3- نعيّن النقط الحدية.

4- وفي الأخير نستند إلى جدول التغيّرات.



إنشاء المنحنى (C_f)

دالة لوغاريتمية-2- من بكالوريا أجنبية بتصرف

(I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x^2-2+\ln x$$

1- ادرس تغيّرات الدّالة g.

2- أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال: $]0;+\infty[$.

ب- تحقّق من أنّ: $1.31\prec\alpha\prec 1.32$.

3- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4- برهن أنّ: $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي:

$$f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$.

2- بيّن أنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha^2\left(1+\alpha^2\right)$.

5- استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(III) • نسمّي (Γ) التمثيل البياني للدّالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\ln x$.

• النقطة A ذات الاحداثيات $(0;2)$.

• M نقطة من المنحنى (Γ) فاصلتها x.

1- بيّن أنّ المسافة AM تُعطى بـ: $AM=\sqrt{f(x)}$.

2- نعتبر الدّالة k المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- برهن أنّ للدّالتين f و k نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$.

ب- برهن أنّ المسافة AM أصغرية في نقطة P من (Γ)، يُطلب تعيين إحداثيها.

ج- برهن أنّ: $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3- هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P؟ برّر إجابتك.

بالتوفيـــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريا

حل الدالة اللوغاريتمية-2-

.I

1 دراسة تغيّرات الدّالة g

النّهايات

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(x^2-2+\ln x\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2+\ln x\right)=+\infty$$

المشتقة : الدّالة g معرّفة وقابة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$g'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$$

إشارة المشتقة واتجاه التغيّر

إنّ $g'(x) \succ 0$ على المجال $]0;+\infty[$ وبالتالي الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول التغيّرات

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

2 تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال: $]0;+\infty[$

لدينا من جدول التغيرات الدّالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \times \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) \prec 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال: $]0;+\infty[$.

التحقّق من أنّ: $1.31 \prec \alpha \prec 1.32$

لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$، إذن $1.31 \prec \alpha \prec 1.32$.

3 تعيين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4 برهان أنّ: $\ln\alpha = 2-\alpha^2$

لدينا: $g(\alpha)=0$ يكافئ:

$$\alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0$$

يكافئ:

$$\ln\alpha = 2-\alpha^2$$

.II

1 حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(x^2 + (2-\ln x)^2\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

لأنّ:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$

و

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 + (2-\ln x)^2\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

لأنّ:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

2 تبيين أنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x) \\ &= 2x - \frac{2}{x}(2-\ln x) \\ &= \frac{2x^2 - 4 + 2\ln x}{x} \\ &= \frac{2\left(x^2 - 2 + \ln x\right)}{x} \\ &= \frac{2}{x} g(x) \end{aligned}$$

بماأنّ: $\frac{2}{x} \succ 0$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3 تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4 تبيين أنّ: $f(\alpha) = \alpha^2\left(1+\alpha^2\right)$

لدينا:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2-\ln\alpha)^2 \cdots\cdots (1)$$

ومماسبق وجدنا:

$$\ln\alpha = 2 - \alpha^2 \cdots\cdots (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \left(2 - \left(2-\alpha^2\right)\right)^2$$

يكافئ:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \alpha^2\left(1+\alpha^2\right)$$

5 استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

من جدول تغيّرات الدّالة f لدينا:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$

.III

1 تبيين أنّ المسافة AM تُعطى بـ: $AM = \sqrt{f(x)}$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا: M نقطة من (Γ) معناه إحداثياتها هما: $(x;\ln x)$ ومنه المسافة تعطى بما يلي:

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (-(2-\ln x))^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2-\ln x)^2} \\ &= \sqrt{f(x)} \end{aligned}$$

2 أ- برهان أنّ للدّالتين f و k نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$

هنا نستعمل إتجاه تغيّر مركب دالتين -عُد لدروس السنة الثانية ستجد هذا بالتفصيل-

نضع من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $u(x) = \sqrt{x}$.

لاحظ أنّ: $k = u \circ f$.

نعلم أنّ الدّالة u متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ والدّالة f موجبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالتالي فإنّ لـ f و k نفس إتجاه التغيّر.

ملاحظة: يمكنك اشتقاق الدّالة k لتجد أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $k'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ وتقوم بدراسة إشارتها ومن ثمّ إتجاه التغيّر.

ب- برهان أنّ المسافة AM أصغرية في نقطة P من (Γ)، يُطلب تعيين إحداثيها

بما أنّ لـ f و k نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$ فإنّ: الدّالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي α في $x=\alpha$ وبالتالي المسافة أصغرية لمّا $x = \alpha$ إذن:

$$P(\alpha;\ln\alpha)$$

يكافئ:

$$P\left(\alpha;2-\alpha^2\right)$$

ج- برهن أنّ: $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

لدينا مايلي:

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(\alpha-0)^2 + (2-\alpha^2-2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2+\alpha^4} \\ &= \sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{1+\alpha^2} \\ &= |\alpha|\sqrt{1+\alpha^2} \\ &= \alpha\sqrt{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

3 هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P؟ برّر إجابتك.

لنبدأ أوّلا بميل المستقيم المماس لـ (Γ) في النقطة P هو:

$$h'(\alpha) = \ln'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AP) هو:

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} \\ &= \frac{2-\alpha^2-2}{\alpha-0} \\ &= \frac{-\alpha^2}{\alpha} \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

تذكّر أنّه: يتعامد مستقيمان إذا كان جداؤ ميليهما يساوي -1.

لدينا: $-\alpha \times \dfrac{1}{\alpha} = -1$ وبالتالي المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P.

دالة لوغاريتمية-3- شاملة

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = xe^x - x + 1$

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g' .

2 - احسب $g'(0)$ ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 - بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) - 1 \succeq 0$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمـايلي : $f(x) = \ln(xe^x - x + 1)$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 - احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

3 - شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

4 - احسب : $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \ln(-x))$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

5 - احسب : $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

6 - نعتبر الدّالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $u(x) = e^x + x - 2$.

أ - بيّن أنّ المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث : $0 \prec \alpha \prec 1$ ، ثمّ عيّن حصرا لـ α سعته 10^{-1} .

ب - استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$.

7 - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

8 - أ - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها .

ب - برّر لماذا المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

ج- أوجد حصرًا للعدد $f(\alpha) - \alpha$ (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}) .

د - اكتب معادلة المماس (δ) .

ه - احسب $f(1)$ و $f(-2)$.

9 - اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

10 - مثّل بيانيّا كل من المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x \mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_f) .

11 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي a عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x) = \left(2 - e^{-1}\right)x + a$.

11 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي l عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x) = x + l$.

12 - (T_n) مستقيم ذو المعادلة $y = \left(2e^n - e^{n-1}\right)x - \left(e^n - e^{n-1}\right)$.

أ - برهن أنّ جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثييها .

ب - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$f(x) = \left(2e^n - e^{n-1}\right)x - \left(e^n - e^{n-1}\right)$$

(III) h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{xe^{x-1} - xe^{-1} + e^{-1}}\right)$$

ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 - بين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $h(x) = -f(x) + 1$.

2 - أ - بيّن أنّ المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتركيب تحويلين نقطيين بسيطين يطلب تعيينهما .

ب - مثّل بيانيّا المنحنى (C_h) .

3 - نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m التالية : $x(e^x - 1) - m = 0 \ldots\ldots (E)$ حيث $m \neq -1$.

- باستعمال المنحنى (C_h) . ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

(IV) نعتبر الدّالة k المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x) = h(2x - 2) + f(\alpha)$. - عبارة $k(x)$ غير مطلوبة - .

1 - ادرس تغيّرات الدّالة k .

2 - تحقّق من أنّ $k\left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right) = 1$، ثمّ بيّن أنّ : $k'\left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'(\alpha)$.

3 - استنتج معادلة المماس (D) لمنحني الدّالة k عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{2}$.
4 - تحقّق من أنّ : $y=-2x+\alpha+3$ معادلة للمستقيم (D) .
5 - احسب $k(-1)$.

(V) p الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$p(x)=f(|x|)$$

ونسمّي (C_p) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1 - أ - احسب : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{p(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{p(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة p ؟
ب - فسّـــر النتيجة هندسيا .
2 - أ - من أجل كل x عدد حقيقي ، احسب $p(x)-p(-x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة p ؟
ب - فسّـــر النتيجة هندسيا .
3 - اكتب $p(x)$ دون رمـز القيـمة المطلقة .
4 - باستعمال المنحنى (C_f) ، مثّل بيانيّا المنحنى (C_p) مبيّنا طريقة الإنشاء .

(VI) نعتبر الدّالة q المعرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ كمايلي :

$$q(x)=k(\tan x)$$

ونسمّي (C_q) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{\pi}{2}}q(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}q(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا .
2 - أ - ادرس بطرقتين مختلفتين اتجاه تغيّر الدّالة q .
ب - شكّل جدول تغيّراتها .
3 - حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $\tan x=-1$.
4 - اكتب معادلة المماس (L) للمنحنى (C_q) في النقطة ذات الترتيبة $1-f(-4)+f(\alpha)$.

حل الدالة اللوغاريتمية-3-

الجـزء الأول

1 دراسة تغيّرات الدّالة g'

حساب المستقة الأولى g'

الدّالة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ : $g'(x)=e^x+xe^x-1$.

حساب نهايات الدّالة g'

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}g'(x)&=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+xe^x-1\right)\\&=-1\end{aligned}$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}g'(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+xe^x-1\right)\\&=+\infty\end{aligned}$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

حساب المستقة الثانية g''

الدالة g' معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ :

$$\begin{aligned}g''(x)&=e^x+e^x+xe^x\\&=e^x(x+2)\end{aligned}$$

جدول إشارة $g''(x)$

إشارة $g''(x)$ من إشارة $x+2$ لأنّ $e^x \succ 0$ ومنه إشارة $g''(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

إتجاه تغيّر الدّالة g'

- لمّا : $x \in]-\infty;-2]$ لدينا : $g''(x) \preceq 0$ ومنه الدّالة g' متناقصة .
- لمّا : $x \in [-2;+\infty[$ لدينا : $g''(x) \succeq 0$ ومنه الدّالة g' متزايدة .

جدول تغيّرات الدّالة g'

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	-1	$\searrow$	$-1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2 حساب $g'(0)$ ثمّ استنتاج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

لدينا : $g'(0) = e^0 + (0)e^0 - 1 = 0$ ومنه من جدول التغيرات تكون إشارة $g'(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

3 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) - 1 \succeq 0$

حساب نهايات الدّالة g

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^x - x + 1) = +\infty$$ لأنّ : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^x - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} (x(e^x-1)+1) = +\infty$$ لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} (e^x - 1) = +\infty$

جدول تغيّرات الدّالة g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيّرات الدّالة g لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \succeq 1$ ومنه : $g(x) - 1 \succeq 0$.

الجـزء الثاني

1 حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(xe^x - x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x(e^x-1)+1) = +\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(xe^x - x + 1) = +\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

2 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{e^x + xe^x - 1}{xe^x - x + 1} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

3 تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ لأنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $g(x) \succ 0$ ومنه جدول تغيّرات الدّالة f يكون كالتالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - \ln(-x))$ ثمّ تفسير النّتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - \ln(-x)) = \lim_{x\to-\infty}(\ln(xe^x - x + 1) - \ln(-x)) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{xe^x - x + 1}{-x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(-e^x + 1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

التفسيـــر الهندسي

المنحنى (C_f) ومنحنى الدّالة $x \mapsto \ln(-x)$ متقاربان في جوار $(-\infty)$.

5 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$ والاستنتاج بالنسبة للمنحنى (C_f)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) &= \lim_{x\to+\infty}(\ln(xe^x - x + 1) - x) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(xe^x\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right)\right) - x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(xe^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) - x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x) + \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) - x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x) + x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right) - x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x}\right)\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

6 تبيين أنّ المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث : $0 \prec \alpha \prec 1$

الدّالة u معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $u'(x) = e^x + 1$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $u'(x) \succ 0$.

وكذلك : $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + x - 2) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x + x - 2) = +\infty$

جدول تغيّرات الدّالة u

x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	
$u(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

لدينا : $u(0)=-2$ و $u(1)=e-1$

الدّالة u مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$ و $u(0)\times u(1)\prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0\prec\alpha\prec 1$.

تعيين حصرا لـ α سعته 10^{-1}

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$u(x)$	-2	-0.79	-0.57	-0.35	-0.10	0.14

إذن : $0.4\prec\alpha\prec 0.5$.

استنتاج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

7 **دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$**

لدينا : $f(x)-x=\ln\left(xe^x-x+1\right)-x$.

نضع : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $s(x)=\ln\left(xe^x-x+1\right)-x$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}s(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}s(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=+\infty$ و $s(\alpha)=f(\alpha)-\alpha$.

الدّالة s معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقة معرّفة بـ :

$$s'(x)=f'(x)-1=\frac{g'(x)}{g(x)}-1=\frac{g'(x)-g(x)}{g(x)}=\frac{e^x+xe^x-1-xe^x+x-1}{xe^x-x+1}=\frac{e^x+x-2}{xe^x-x+1}=\frac{u(x)}{g(x)}$$

إشارة $s'(x)$ من إشارة $u(x)$ لأنّ : $g(x)\succ 0$ ومنه جدول تغيّرات الدّالة s يكون كالتالي :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$s'(x)$		$-$	0	$+$	
$s(x)$	$+\infty$	↘	$s(\alpha)$	↗	$+\infty$

لدينا ممّا سبق : $f(1)=1$ يكافئ : $f(1)-1=0$ يكافئ : $\boxed{s(1)=0}$ وكذلك : $g(0)=1$ يكافئ : $\ln g(0)=\ln 1$ يكافئ : $f(0)-0=0$

ومنه : $\boxed{s(0)=0}$.

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) تُلخّص في الدول التالي :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$s(x)=f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

- $(C_f)\cap(\Delta)=\{O(0;0)\}$
- $(C_f)\cap(\Delta)=\{M(1;1)\}$

8 تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثيها

تذكير

يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1.

(δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ في النقطة ذات الفاصلة x_0 معناه : $f'(x_0)\times -1=-1$ أي : $f'(x_0)=1$ أي: $\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}=1$
يكافئ : $\frac{e^{x_0}+x_0e^{x_0}-1}{x_0e^{x_0}-x_0+1}-1=0$ يكافئ : $\frac{e^{x_0}+x_0e^{x_0}-1-x_0e^{x_0}+x_0-1}{x_0e^{x_0}-x_0+1}=0$ يكافئ : $\frac{u(x_0)}{g(x_0)}=0$ وبما أنّ : $g(x_0)\succ 0$ فإنّ :
$u(x_0)=0$ ومنه : $x_0=\alpha$.
إذن (δ) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(\alpha;f(\alpha))$.

التبرير لماذا المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

لدينا المستقيم (Δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ لأنّ جداء ميليهما يساوي -1. والمستقيم (δ) أيضا عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$-من معطيات التمرين-.
ونعلم أنّه يتوازى مستقيمان إذا كانا عموديان على نفس المستقيم.
مّا يوحي إلى أنّ المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

إيجاد حصراً للعدد $f(\alpha)-\alpha$

لدينا : $u(\alpha)=0$ يكافئ: $e^{\alpha}+\alpha-2=0$ ومنه : $\boxed{e^{\alpha}=2-\alpha}$
ولدينا : $f(\alpha)=\ln(\alpha e^{\alpha}-\alpha+1)=\ln(\alpha(2-\alpha)-\alpha+1)$ ومنه : $\boxed{f(\alpha)=\ln\left(-\alpha^2+\alpha+1\right)}$
لدينا : $0.4\prec\alpha\prec 0.5\cdots(1)$ ، بتربيع الطرفين نجد : $(0.4)^2\prec\alpha^2\prec(0.5)^2\cdots(2)$.
بضرب كل من المتراجحتين (1) و (2) في العدد -1 نجد : $-0.5\prec-\alpha\prec-0.4\cdots(3)$ و $-(0.5)^2\prec-\alpha^2\prec-(0.4)^2\cdots(4)$.
بجمع (1) مع (4) طرف بطرف نجد : $-(0.5)^2+0.4\prec-\alpha^2+\alpha\prec-(0.4)^2+0.5\cdots(5)$.
بإضافة العدد 1 للمتراجحة (5) نجد $-(0.5)^2+0.4+1\prec-\alpha^2+\alpha+1\prec-(0.4)^2+0.5+1$.
بما أنّ الدّالة $x\mapsto\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ فإنّ :

$$\ln\left(-(0.5)^2+0.4+1\right)\prec\ln\left(-\alpha^2+\alpha+1\right)\prec\ln\left(-(0.4)^2+0.5+1\right)\cdots(6)$$

بجمع (6) مع (3) طرف بطرف نجد :

$$\ln\left(-(0.5)^2+0.4+1\right)-0.5\prec\ln\left(-\alpha^2+\alpha+1\right)-\alpha\prec\ln\left(-(0.4)^2+0.5+1\right)-0.4$$

ومنه : $\boxed{-0.36\prec f(\alpha)-\alpha\prec-0.11}$

كتابة معادلة المماس (δ)

$$y_\delta=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=1(x-\alpha)+f(\alpha)=x+f(\alpha)-\alpha$$

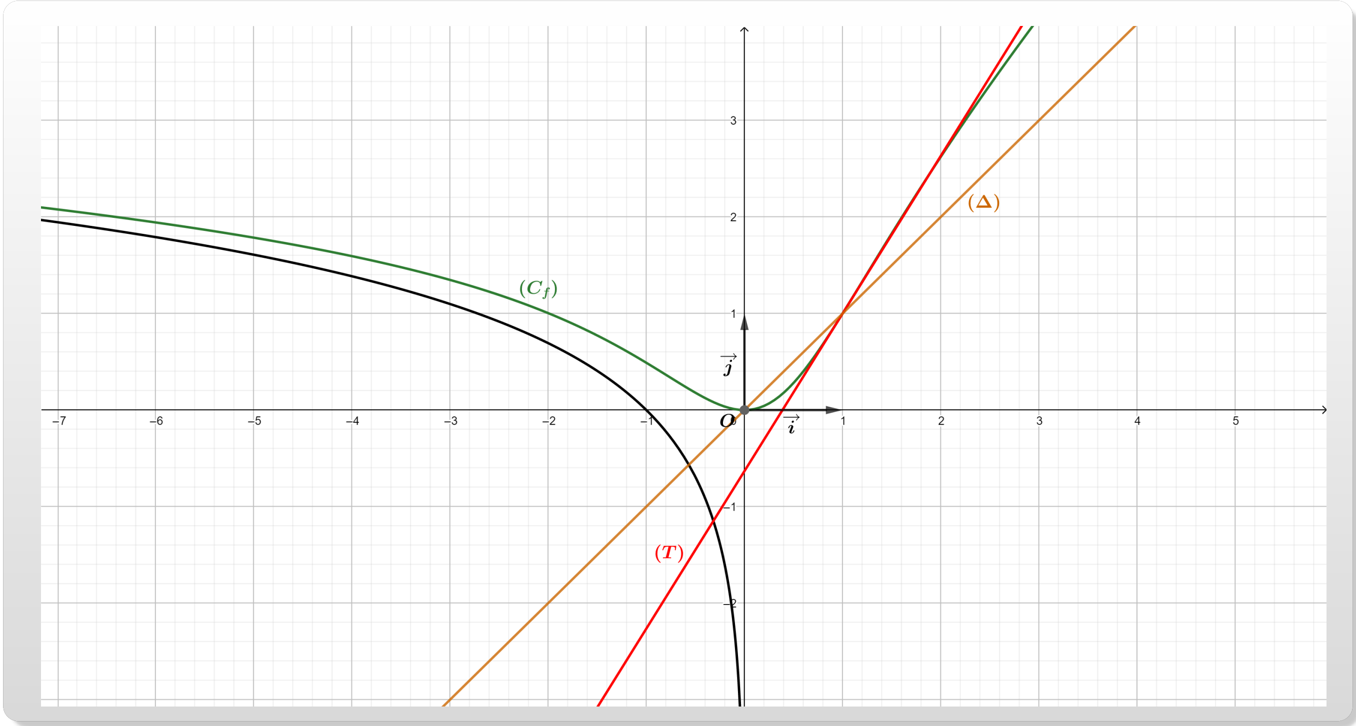
حساب $f(1)$ و $f(-2)$

- $f(1)=\ln\left(1e^1-1+1\right)=1$
- $f(-2)=\ln\left(-2e^{-2}+2+1\right)\simeq 1$

9 كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$y_T = f'(1)(x-1) + f(1) = \left(2 - e^{-1}\right)x + \left(e^{-1} - 1\right)$$

10 إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x \mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_f)



إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x \mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_f)

11 المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي a عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x) = (2 - e^{-1})x + a$

حلول المعادلة $f(x) = (2 - e^{-1})x + a$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $(2 - e^{-1})x + a$. ومنه :

- لمّا $a \prec e^{-1} - 1$ المعادلة تقبل حلّا وحيداً .
- لمّا $a = e^{-1} - 1$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو : $x = 1$.
- لمّا $a \succ e^{-1} - 1$ المعادلة تقبل حلّا وحيداً .

12 المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي l عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x) = x + l$

حلول المعادلة $f(x) = x + l$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $x + l$. ومنه :

- لمّا $l \prec f(\alpha) - \alpha$ المعادلة لاتقبل حلول .
- لمّا $l = f(\alpha) - \alpha$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو : $x = \alpha$.
- لمّا $f(\alpha) - \alpha \prec l \prec 0$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .
- لمّا $l = 0$ المعادلة تقبل حلّين هما : $x = 0$ و $x = 1$.
- لمّا $l \succ 0$ المعادلة تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .

13 البرهان أنّ جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثييها

نفرض أنّ المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة $A(x_1; y_1)$ معناه : $y_1 = (2e^n - e^{n-1})x_1 - (e^n - e^{n-1})$ يكافئ :
$y_1 = (e^n(2 - e^{-1}))x_1 - (e^n(1 - e^{-1}))$ يكافئ : $e^n\left[(2 - e^{-1})x_1 - (1 - e^{-1})\right] - y_1 = 0$ ، المتغيّر في هذه المعادلة الأخيرة هو e^n .

نعلم أنّه ينعدم كثير الحدود إذا انعدمت معاملات حدوده أي : $\begin{cases} (2 - e^{-1})x_1 - (1 - e^{-1}) = 0 \\ -y_1 = 0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1 - e^{-1}}{2 - e^{-1}} \\ y_1 = 0 \end{cases}$

ومنه جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة $A\left(\dfrac{1 - e^{-1}}{2 - e^{-1}}; 0\right)$.

المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x) = (2e^n - e^{n-1})x - (e^n - e^{n-1})$

أوّلا وقبل البدأ في هذه المناقشة يجب إيجاد قيمة n حتى يكون المستقيم (T_n) يوازي المستقيم (Δ) .

المستقيم (T_n) يوازي المستقيم (Δ) معناه : $e^n\left(2-e^{-1}\right)=1$ ومنه قيمة n حتى يتوازى المستقيمان (T_n) و (Δ) هي : $n=\ln\left(\dfrac{1}{2-e^{-1}}\right)$ إذن :

- لمّا $\dfrac{1}{2-e^{-1}} \preceq e^n \prec 0$ أي $n\in\left]-\infty;\ln\left(\dfrac{1}{2-e^{-1}}\right)\right]$ المعادلة لا تقبل حلولا .
- لمّا $\dfrac{1}{2-e^{-1}} \prec e^n \prec 1$ أي $n\in\left]\ln\left(\dfrac{1}{2-e^{-1}}\right);0\right[$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا موجبا .
- لمّا $e^n=1$ أي $n=0$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو $x=1$.
- لمّا $e^n \succ 1$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا موجبا .

الجـزء الثالث

1 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $h(x)=-f(x)+1$

$$h(x)=\ln\left(\frac{1}{xe^{x-1}-xe^{-1}+e^{-1}}\right)=\ln\left(\frac{1}{e^{-1}(xe^x-x+1)}\right)=\ln\left(\frac{e}{xe^x-x+1}\right)=\ln(e)-\ln(xe^x-x+1)=-f(x)+1$$

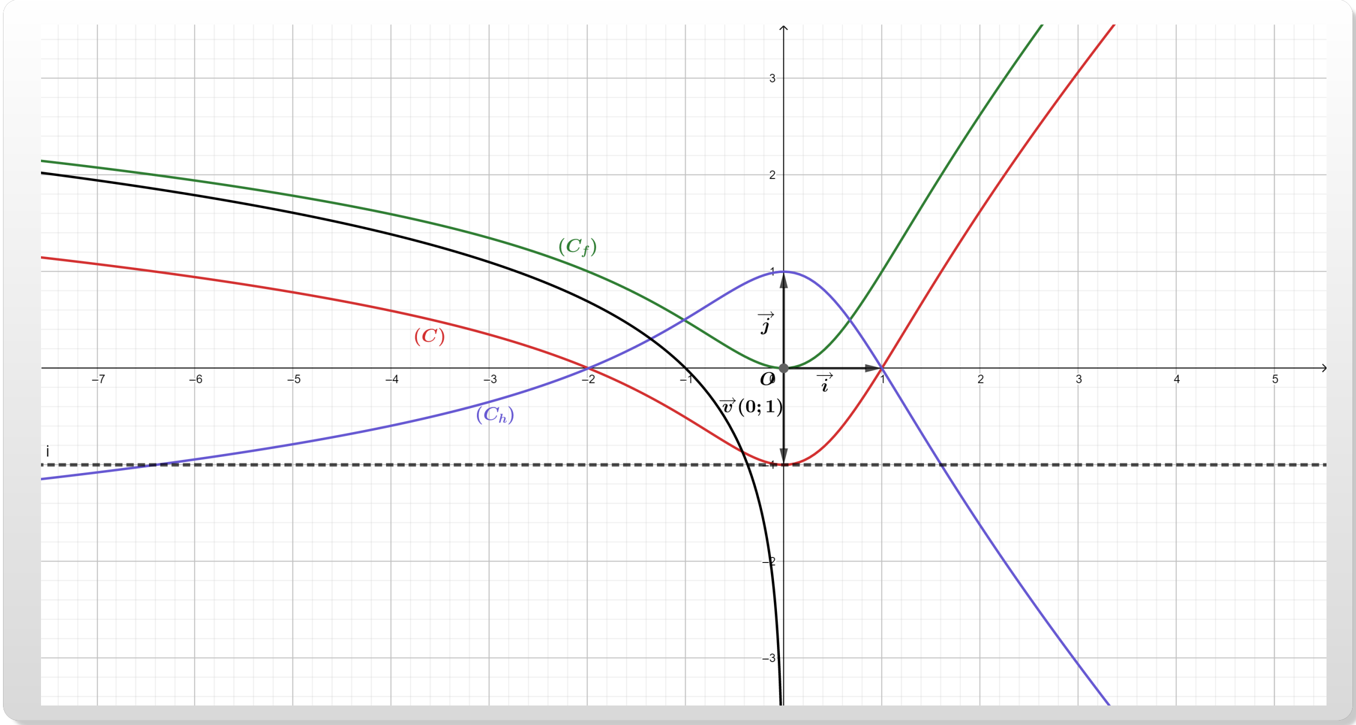
2 تبيين أنّ المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتركيب تحويلين نقطيين بسيطين يطلب تعيينهما

لدينا : $h(x)=-f(x)+1=-(f(x)-1)$ ومنه :

- منحنى الدّالة $x\mapsto f(x)-1$ هو صورة المنحنى (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{v}\,(0;-1)$.
- ومنحنى الدّالة $x\mapsto -(f(x)-1)$ هو نظير منحنى الدّالة $x\mapsto f(x)-1$ بالنسبة لمحور التراتيب .

إنشاء المنحنى (C_h)

نسمّي (C) منحنى الدّالة $x\mapsto f(x)-1$ في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.



إنشاء المنحنى (C_h)

3 المناقشة البيانية حسب قيم عدد m وإشارة حلول المعادلة (E)

من أجل $m\in\mathbb{R}-\{-1\}$ لدينا : $x(e^x-1)-m=0$ يكافئ : $xe^x-x=m$ يكافئ : $xe^x-x+1=m+1$ يكافئ : $\ln(xe^x-x+1)=\ln|m+1|$ يكافئ : $-\ln(xe^x-x+1)=-\ln|m+1|$ يكافئ : $-f(x)+1=\ln\left(\dfrac{1}{|m+1|}\right)+1$ يكافئ : $h(x)=\ln\left(\dfrac{e}{|m+1|}\right)$.

حلول المعادلة (E) بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) مع المستقيم ذو المعادلة : $y=\ln\left(\dfrac{e}{|m+1|}\right)$.

- لمّا $\ln\left(\dfrac{e}{|m+1|}\right)\prec 0$ أي : $\dfrac{e}{|m+1|}\prec e^0$ يكافئ : $\dfrac{|m+1|}{e}\succ 1$ يكافئ : $|m+1|\succ e$ يكافئ : $m+1\succ e$ أو $m+1\prec -e$ يكافئ : $m\succ e-1$ أو

- لمّا $m \prec -e-1$ أي : $m \in]-\infty;-e-1[\cup]e-1;+\infty[$ المعادلة (E) تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right)=0$ أي : $\frac{e}{|m+1|}=e^0$ يكافئ : $|m+1|=e$ يكافئ : $m=e-1$ أو $m=-e-1$ المعادلة (E) تقبل حلّين هما $x=1$ و $x=-2$.

- لمّا $1 \prec \ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) \prec 1$ يكافئ : $0 \prec \ln$ يكافئ : $1 \prec \frac{e}{|m+1|} \prec e$ يكافئ : $1 \prec |m+1| \prec e$ يكافئ : $(m+1)\in]-e;-1[\cup]1;e[$ أي : $m\in]-e-1;-2[\cup]0;e-1[$ المعادلة (E) تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right)=1$ يكافئ : $\frac{e}{|m+1|}=e$ يكافئ : $|m+1|=1$ أي : $m=0$ أو $m=-2$ المعادلة (E) تقبل حلّا مضاعفا هو $x=0$.

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right)\succ 1$ يكافئ : $\frac{e}{|m+1|}\succ e$ يكافئ : $|m+1|\prec 1$ يكافئ : $-1\prec m+1\prec 1$ يكافئ : $-2\prec m\prec 0$ أي : $m\in]-2;0[-\{-1\}$ المعادلة (E) لا تقبل حلولا .

الجزء الرابع

1 ادرس تغيّرات الدّالة k

النّهايات

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}k(x)=-\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=-\infty$.

المشتقة

الدّالة k معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$k'(x)=2h'(2x-2)=2\left(-f'(2x-2)\right)=-2f'(2x-2)$$

إشارة المشتقة

- لمّا : $(2x-2)\in]-\infty;0]$ أي : $x\in]-\infty;1]$ يكون : $k'(x)\succeq 0$ ومنه الدّالة k متزايدة .
- لمّا : $(2x-2)\in[0;+\infty[$ أي : $x\in[1;+\infty[$ يكون : $k'(x)\preceq 0$ ومنه الدّالة k متناقصة .

جدول التغيّـــرات

لدينا : $k(1)=h(2(1)-2)+f(\alpha)=h(0)+f(\alpha)=1-f(0)+f(\alpha)=f(\alpha)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2 تحقّق من أنّ $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=1$ ثمّ بيّن أنّ : $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=-2f'(\alpha)$

$$\bullet k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)+f(\alpha)=h\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)-2\right)+f(\alpha)=h(\alpha+2-2)+f(\alpha)=h(\alpha)=1-f(\alpha)+f(\alpha)=1$$

$$\bullet k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=-2f'\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)-2\right)=-2f'(\alpha+2-2)=-2f'(\alpha)$$

3 استنتاج معادلة المماس (D) لمنحنى الدّالة k عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{2}$

$$y_D=k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left(x-\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right)+k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=-2f'(\alpha)\left(x-\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right)+1=f'(\alpha)(\alpha+2-2x)+1$$

4 التحقّق من أنّ : $y=-2x+\alpha+3$ معادلة للمستقيم (D)

$$y=f'(\alpha)(\alpha+2-2x)+1=\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}(\alpha+2-2x)+1=\frac{e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1$$
$$=\frac{2-\alpha+\alpha(2-\alpha)-1}{\alpha(2-\alpha)-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1=\frac{-\alpha^2+\alpha-1}{-\alpha^2-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1=-2x+\alpha+3$$

5 حساب $k(-1)$

$$k(-1)=h(2(-1)-2)+f(\alpha)=h(-4)+f(\alpha)=1-f(-4)+f(\alpha)$$

الجزء الخامس

1 حساب : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{p(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{p(x)}{x}$ ، والاستنتاج بالنسبة للدّالة p

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(|x|)}{x}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{\ln(xe^x-x+1)}{x}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{\ln(x(e^x-1)+1)}{x(e^x-1)}\cdot(e^x-1)=0$
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{f(|x|)}{x}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{f(-x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{\ln(-xe^{-x}+x+1)}{x}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{\ln(x(-e^{-x}+1)+1)}{x(-e^{-x}+1)}\cdot(-e^{-x}+1)=0$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to 0}x(e^x-1)=\lim\limits_{x\to 0}x(-e^{-x}+1)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

بما أنّ : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{p(x)}{x}=0$ نستنتج أنّ الدّالة p قابلة للاشتقاق في الصفر .

تفسير النتيجة هندسيا

نفسّر النتيجة السابقة هندسيا بأنّ المنحنى (C_p) يقبل مماسا موازٍ لحامل محور الفواصل معادلته هي : $y=f(0)=0$.

حساب $p(x)-p(-x)$ ، والاستنتج بالنسبة للدّالة p

من أجل كل x و $-x$ ينتميان إلى $\mathbb{R}$ لدينا : $p(x)-p(-x)=f(|x|)-f(|-x|)=f(|x|)-f(|x|)=0$

نستنتج أنّ الدّالة p زوجية .

تفسير النتيجة هندسيا

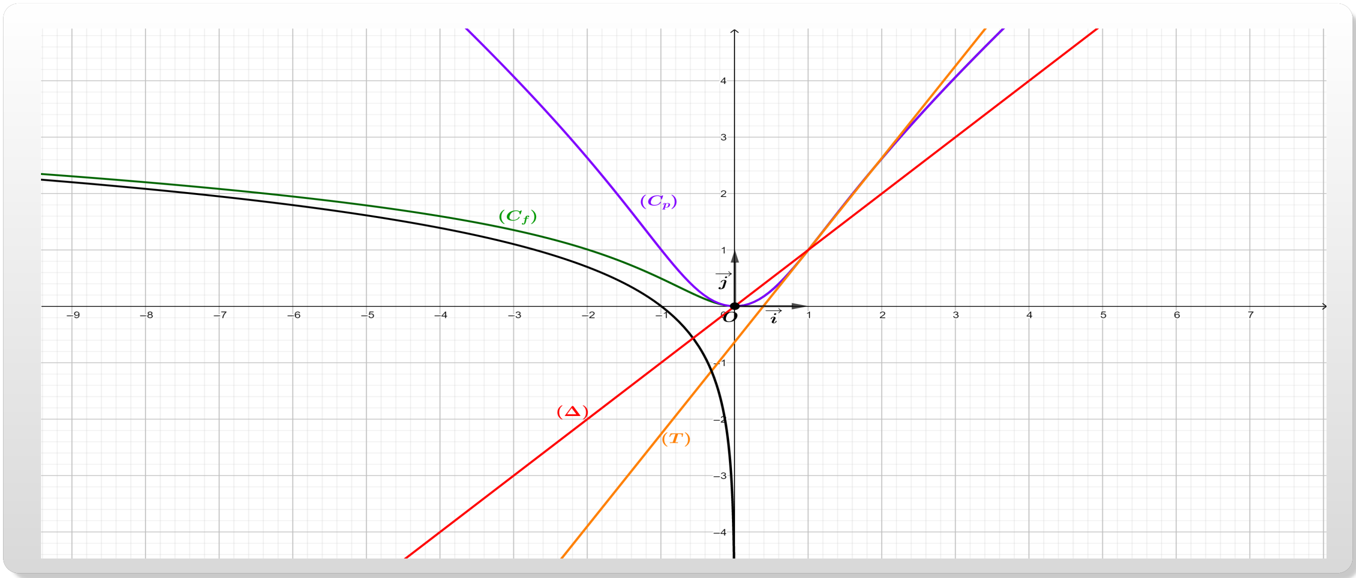
نفسّر النتيجة السابقة هندسيا بأنّ المنحنى (C_p) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) محور تناظر .

2 كتابة $p(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$p(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(x)\,;x\succeq 0 \\ f(-x)\,;x\preceq 0\end{cases}$$

3 باستعمال المنحنى (C_f) ، إنشاء المنحنى (C_p) مبيّنا طريقة الإنشاء

لمّا $x\succeq 0$: (C_p) ينطبق على (C_f) . لمّا $x\preceq 0$: (C_p) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب .



إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x\mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_p)

الجـزء السادس

1 حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} q(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} q(x)$ ثمّ تفسير النتيجتين هندسيا

تذكّر أنّ : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = -\infty$ لأنّ : $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^+$ ومنه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} q(x) = -\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = -\infty$ لأنّ : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^-$ ومنه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} q(x) = -\infty$.

التفسير الهندسي

$x = -\frac{\pi}{2}$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني (C_q) .

$x = \frac{\pi}{2}$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني (C_q) .

2 دراسة بطرقتين مختلفتين اتجاه تغيّر الدّالة q

الطريـقة 1 هنا نستعمل فقط مشتقة الدّالة k وإشارتها .

الدّالة q معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ ودالتها المشتقة هي : $q'(x) = \tan' x \cdot k'(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot k'(\tan x)$

لدينا : $k'(\tan x) = 0$ أي : $\tan x = 1$ يكافئ : $\dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$ يكافئ : $\sin x = \cos x$ يكافئ : $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$ وبما أنّ مجال الدّراسة هو $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ فإنّ : $x = \dfrac{\pi}{4}$

- لمّا $\tan x \in \left]-\infty; 1\right]$ أي : $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ لدينا : $k'(\tan x) \succeq 0$ معناه : $q'(x) \succeq 0$ ومنه الدّالة q متزايدة .
- لمّا $\tan x \in \left[1; +\infty\right[$ أي : $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ لدينا : $k'(\tan x) \preceq 0$ معناه : $q'(x) \preceq 0$ ومنه الدّالة q متناقصة .

الطريـقة 2 هنا نستعمل إتجاه تغيّر دالة مركبة .

لدينا : $q = k \circ v$ حيث v دالة معرّفة كمايلي : $v : x \mapsto \tan x$.

- الدّالة k متزايدة على المجال $\left]-\infty; 1\right]$ و $\tan x \preceq 1$ لمّا $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ والدّالة $\tan$ متزايدة على المجال $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$

(لأنّ $\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$) ومنه الدّالة q متزايدة على المجال $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

- الدّالة k متناقصة على المجال $\left[1; +\infty\right[$ و $\tan x \succeq 1$ لمّا $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ والدّالة $\tan$ متزايدة على المجال $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

(لأنّ $\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$) ومنه الدّالة q متناقصة على المجال $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

جدول التغيّرات لدينا : $f(\alpha) = k(1) = k\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = q\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ومنه :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	
$q'(x)$		$+$	0	$-$		
$q(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$	$-\infty$

3 **حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $\tan x = -1$**

لدينا : $\tan x = -1$ يكافئ : $\cos x = -\sin x$ يكافئ : $-\cos(\pi + x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ يكافئ : $\frac{\pi}{2} - x = \pi + x + 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$ أي : $x = -\frac{\pi}{4} - k\pi$ ومنه حل المعادلة $\tan x = -1$ في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هو $x = -\frac{\pi}{4}$.

4 **كتابة معادلة المماس (L)**

نفرض أنّ (L) مماس لـ (C_q) في النقطة $(x_2; 1 - f(-4) + f(\alpha))$ وكذلك : $\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

$q(x_2) = 1 - f(-4) + f(\alpha)$ يكافئ : $k(\tan x_2) = 1 - f(-4) + f(\alpha)$ يكافئ : $\tan x_2 = -1$ إذن : $x_2 = -\frac{\pi}{4}$ ومنه:

$$y_L = q'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + q\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 - f(-4) + f(\alpha) = 2x + \frac{\pi}{4} + 1 - f(-4) + f(\alpha)$$

بالتوفيــــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريـا

قال الإمام عبد الحميد ابن باديس رحمه الله تعالى :

انهض إلى العلم في جدٍّ بلا كسلٍ *** نهوض عبدٍ إلى الخيرات يبتدرُ

واصبر على نيله صبر المجدّ له *** فليس يُدركه من ليس يصطبرُ

يكفيكَ بالعلم فضلاً أنّ صاحبهُ *** بالعزّ نال العُلا والخير ينتظرُ

وآهًا له رجلا فردًا محاسنُهُ *** بالحزمِ والعزمِ هان الصّعبُ والعسرُ