دراسة دالة لوغاريتمية رقم 01 + 02

المسألة 01 :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=-x^2-2+2\ln x$.

1) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أحسب $g(1)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=-x+5-2\dfrac{\ln x}{x}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدته : $(1cm)$

1) عيّن نهاية الدالة f عند 0 وَ عند $+\infty$.

2) أحسب $f'(x)$ ، وَ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) أ) برهن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+5$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4) أ) بيّن أنّ المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ذات الفاصلة α ، حيث : $4,3<\alpha<4,4$.

ب) برّر أنّ : $\ln\alpha=\dfrac{-\alpha^2+5\alpha}{2}$.

5) بيّن أنّه يوجد مماس (T) للمنحنى (C) يكون موازياً للمستقيم (Δ) ، ثمّ أكتـب معادلته .

6) أنشئ كلا من المستقيم (Δ) ، المماس (T) وَ المنحنى (C) .

7) ناقش بيانياً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(5-m)x-2\ln x=0$.

المسألة 02 :

نعرّف على المجال $]-2;+\infty[$ الدالة f بما يلي : $f(x)=1+x\ln(x+2)$.

(C_f) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدته : $(2cm)$

1) أ) أحسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها .

ب) أحسب $f'(x)$ ثمّ $f''(x)$ وَ ذلك من أجل كل $x\in]-2;+\infty[$.

ج) أحسب نهايات الدالة f' عند -2 وَ عند $+\infty$.

د) أدرس تغيّرات الدالة f' على المجال $]-2;+\infty[$.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة : $f'(x)=0$ تقبل حلاًّ وحيداً α ينتمي إلى المجال $]-0,6;-0,5[$.

ب) إستنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x من المجال $]-2;+\infty[$.

ج) إستنتج تغيّرات الدالة f على المجال $]-2;+\infty[$.

3) x_0 عدد حقيقي من المجال $]-2;+\infty[$ ، نسمي (T_{x_0}) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

أ) عيّن الأعداد x_0 التي من أجلها يمرّ المماس (T_{x_0}) بالمبدأ O .

ب) إستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين يمرّان بالمبدأ ، ثمّ أكتب معادلة كل مماس .

4) أنشئ المماسين و المنحنى (C_f) .

5) ناقش بيانياً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx$.

❖ نأخـــذ : $\alpha\approx-0,5$ وَ $f(\alpha)\approx 0,8$.

حل المسألة رقم 01

I) لدينا : $g(x)=-x^2-2+2\ln x$.

1) حساب نهايات الدالة g :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-x^2-2)=-2 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (2\ln x)=-\infty \end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2-2+2\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(-x-\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x})=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

❖) حساب $g'(x)$: $g'(x)=-2x+\frac{2}{x}=\frac{-2x^2+2}{x}$.

نلاحظ أنّ إشارة $g'(x)$ من إشارة : $(-2x^2+2)$.

إذن : من أجل كل $x\in\left]0;1\right]$ تكون $g'(x)\geq 0$ ، و من أجل كل $\left[1;+\infty\right[$ تكون $g'(x)\leq 0$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

3) لدينا : $g(1)=-3$ ، نلاحظ أنّ الدالة g تقبل قيمة حدية كبرى هي : -3 .

إذن : من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$ ، تكون : $g(x)<0$.

II) لدينا : $f(x)=-x+5-2\frac{\ln x}{x}$.

1) تعيين نهايات الدالة f :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} +\infty \\ 0^+ \end{cases}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-x+5)=5 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-2\ln x}{x}=+\infty \end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (-x+5)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2\ln x}{x}=0 \end{cases}$.

2) ❖) حساب $f'(x)$: $f'(x)=-1-2\times\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{-x^2-2+2\ln x}{x^2}$ ، و منه : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

نلاحظ أنّه : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

❖) جدول التغيّرات :

<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$</td></tr>
</table>

3) أ) لدينا : $y=-x+5$: (Δ) ، لنحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+5)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-2\dfrac{\ln x}{x}=0$.

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $\left[f(x)-(-x+5)\right]$ ، أي : ندرس إشارة : $-2\dfrac{\ln x}{x}$.

من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$ الإشارة من إشارة $(-2\ln x)$.

❖) نعلم أنّ : $\ln x\leq 0$ من أجل كل $x\in\left]0;1\right]$ وَ $\ln x\geq 0$ من أجل كل $x\in\left[1;+\infty\right[$.

❖) إذن : الوضعية تكون كما يلي :

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$-2\ln x$</td><td>$+$</td><td></td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>الوضعية</td><td>(C) يقع فوق (Δ)</td><td>(C) يقطع (Δ)
في النقطة $A(1;4)$</td><td>(C) يقع تحت (Δ)</td></tr>
</table>

4) أ) الدالة f مستمرة و رتيبة على المجال $\left[4,3;4,4\right]$ وَ $\begin{cases}f(4,3)=0,2\\ f(4,4)=-0,07\end{cases}$ ، أي : $f(4,4)<0<f(4,3)$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $4,3<\alpha<4,4$.

و عليه : المنحني (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .

ب) تبرير أنّ : $\ln\alpha=\dfrac{-\alpha^2+5\alpha}{2}$.

لدينا : $f(\alpha)=0$ ، أي : $-\alpha+5-2\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}=0$ ، أي : $-2\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}=\alpha-5$ ، أي : $-2\ln\alpha=\alpha^2-5\alpha$ ،

أي : $\ln\alpha=\dfrac{\alpha^2-5\alpha}{-2}$ ، أي : $\ln\alpha=\dfrac{-(-\alpha^2+5\alpha)}{-2}$ ، و منه : $\ln\alpha=\dfrac{-\alpha^2+5\alpha}{2}$ ، و هو المطلوب .

5) المماس يوازي المستقيم (Δ) معناه أنّ لهما نفس معامل التوجيه الذي هو : -1 .

أي نحل المعادلة : $f'(x)=-1$ ، أي : $\dfrac{-x^2-2+2\ln x}{x^2}=-1$ ، أي : $-x^2-2+2\ln x=-x^2$ ، أي :

$-2+2\ln x=0$ ، أي : $2\ln x=2$ ، أي : $\ln x=1$ ، و منه : $x=e$.

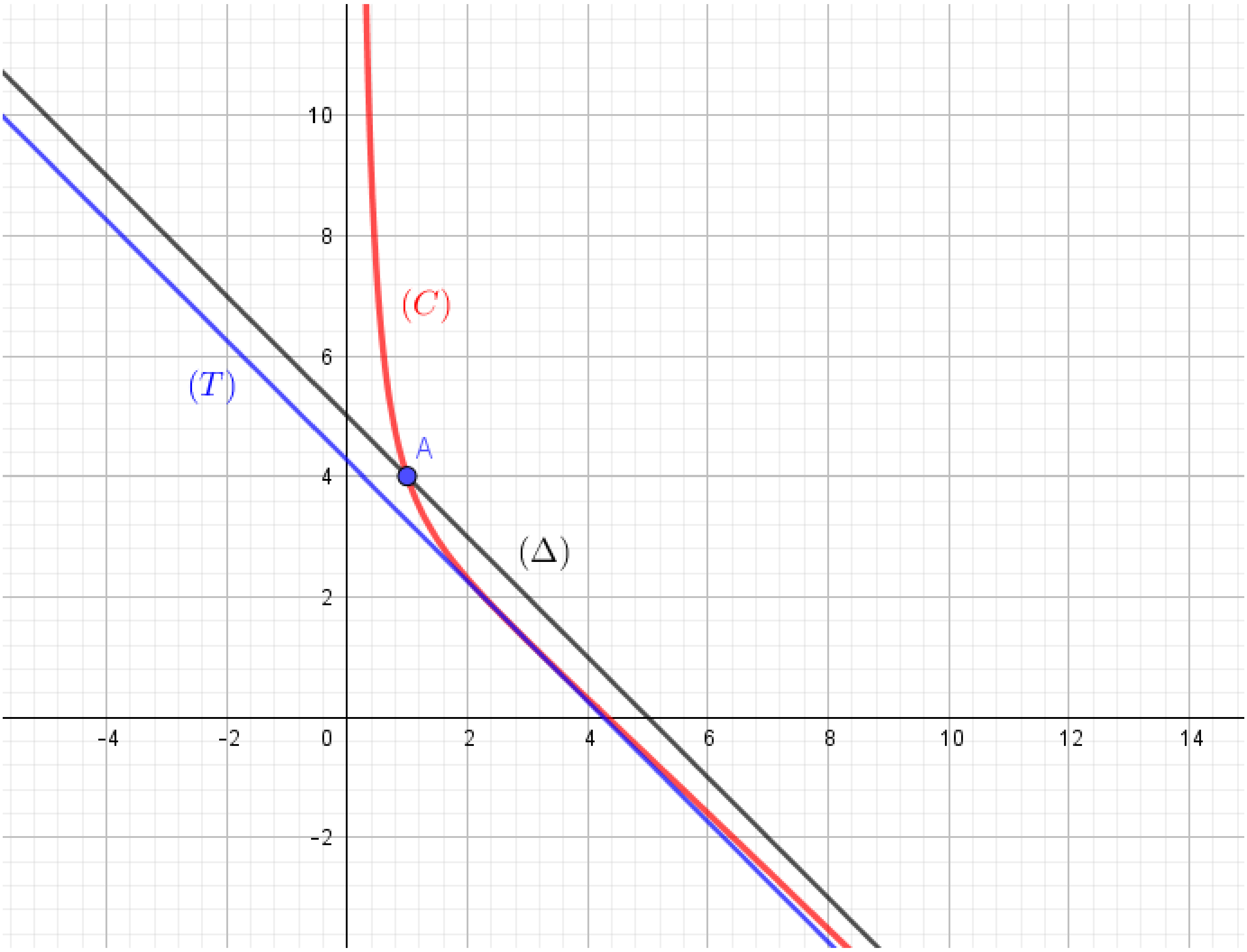
إذن : يوجد مماس للمنحني (C) وَ يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة e .

❖) كتابة معادلة المماس (T) :

لدينا : $(T): y = f'(e)(x-e)+f(e)$ ، أي : $(T): y = -(x-e)+(-e+5-2\dfrac{\ln e}{e})$ ،

أي : $(T): y = -x+e-e+5-\dfrac{2}{e}$ ، و منه : $(T): y = -x+5-\dfrac{2}{e}$.

6) الإنشــــــــاء :



7) لدينا المعادلة : $(5-m)x-2\ln x=0$ ، أي : $(5-m)x=2\ln x$ ، أي : $5-m=\dfrac{2\ln x}{x}$ ، (نضرب في (-1))

أي : $-5+m=-\dfrac{2\ln x}{x}$ ، نضيف $(-x+5)$ نجد : $-x+m=-x+5-\dfrac{2\ln x}{x}$ و منه : $f(x)=-x+m$

إذن : عدد حلول هذه المعادلة هي عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة : $y=-x+m$.

أي أنّ المناقشة تكون كما يلي :

❖) لما $m\in\left]-\infty;5-\dfrac{2}{e}\right[$ ، المعادلة لا تقبل حلول

❖) لما $m=5-\dfrac{2}{e}$ ، المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : e .

❖) لما $m\in\left]5-\dfrac{2}{e};5\right[$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين

❖) لما $m=5$ ، المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : 1 .

❖) لما $m\in\left]5;+\infty\right[$ ، المعادلة تقبل حلا وحيدا .

حل المسألة رقم 02

لدينا : $f(x)=1+x\ln(x+2)$.

1) أ) حساب نهايات الدالة f :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} x=-2\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \ln(x+2)=-\infty\end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2)=+\infty\end{cases}$.

ب) حساب $f'(x)$ وَ $f''(x)$:

❖) $f'(x)=\ln(x+2)+\dfrac{1}{x+2}\times x$ ، أي : $f'(x)=\ln(x+2)+\dfrac{x}{x+2}$.

❖) $f''(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{(x+2)-x}{(x+2)^2}$ ، أي : $f''(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{(x+2)^2}>0$.

ج) حساب نهايات الدالة f' :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f'(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \ln(x+2)=-\infty\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \left(\dfrac{x}{x+2}\right)=-\infty\end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x+2}\right)=1\end{cases}$.

د) دراسة تغيّرات الدالة f' :

❖) بما أنّ على المجال $]-2;+\infty[$ تكون $f''(x)>0$ ، إذن الدالة f' متزايدة تماما على $]-2;+\infty[$.

❖) جدول التغيّرات :

x	-2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ) الدالة f' مستمرة و رتيبة على المجال $[-0,6;-0,5]$ وَ $\begin{cases}f(-0,6)=-\ldots\\ f(-0,5)=+\ldots\end{cases}$ أي : $f(-0,6)<0<f(-0,5)$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0,6;-0,5[$.

ب) إشارة $f'(x)$:

x	-2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ج) حسب إشارة $f'(x)$ تكون : f متناقصة على $]-2;\alpha]$ وَ متزايدة على $[\alpha;+\infty[$.

❖) جدول تغيّرات الدالة f :

x	-2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) لدينا معادلة المماس (T_{x_0}) تكون : $(T_{x_0}) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

بما أنّ المماس (T_{x_0}) يمرّ بالمبدأ O فسيكون : $0 = f'(x_0)(-x_0) + f(x_0)$.

لنقوم بالتعويض و الحساب : $\left[\ln(x_0 + 2) + \dfrac{x_0}{x_0 + 2}\right](-x_0) + 1 + x_0 \ln(x_0 + 2) = 0$ ، أي :

$-x_0 \ln(x_0 + 2) - \dfrac{x_0^2}{x_0 + 2} + 1 + x_0 \ln(x_0 + 2) = 0$ ، أي : $-\dfrac{x_0^2}{x_0 + 2} + 1 = 0$ ، أي : $\dfrac{x_0^2}{x_0 + 2} = 1$ ، أي :

$x_0^2 = x_0 + 2$ ، أي : $x_0^2 - x_0 - 2 = 0$ ، و منه : $x_0 = -1$ أو $x_0 = 2$.

ب) مما سبق نستنتج أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسين يمران بالمبدأ حيث :

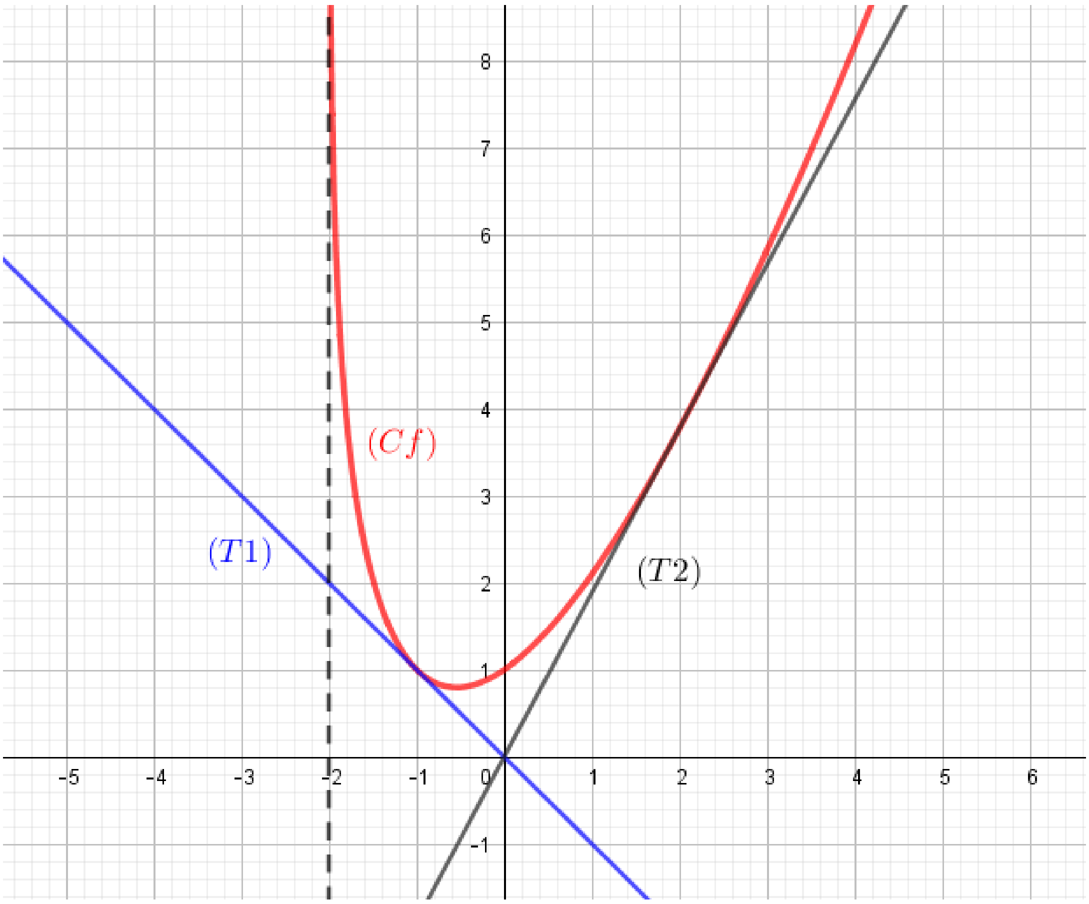
❖) المماس (T_{-1}) يمس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة -1 .

❖) المماس (T_2) يمس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

– معادلة المماس (T_{-1}) : $(T_{-1}) : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ ، و منه : $(T_{-1}) : y = -x$.

– معادلة المماس (T_2) : $(T_2) : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ ، و منه : $(T_2) : y = (\ln 4 + \dfrac{1}{2})x$.

4) الإنشـــــاء :



5) لدينا المعادلة : $f(x) = mx$. (مناقشة دورانية)

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ ، الذي يمرّ بالمبدأ O

❖) لا ننسى أنّ المماسين (T_{-1}) وَ (T_2) يمرّان أيضا بالمبدأ O .

إذن المناقشة تكون كما يلي :

❖) إذا كان : $m > \ln 4 + \frac{1}{2}$ أو $m < -1$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حلان متمايزان .

❖) إذا كان : $m = \ln 4 + \frac{1}{2}$ أو $m = -1$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حل وحيد .

❖) إذا كان : $-1 < m < \ln 4 + \frac{1}{2}$ ، فإنّ : المعادلة لا تقبل حلول .

كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 03

الجزء الأوّل :

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=-3-\ln x+\dfrac{1}{x}$.

1) أحسب نهاية الدالة g عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها .

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$ ، و شكل جدول تغيراتها .

3) أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$.

ب) تحقق أن : $0,45<\alpha<0,46$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=e^{-x}(3+\ln x)$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$ ، ثم فسر النتائج هندسيا .

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha e^{\alpha}}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) عين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل .

5) أنشئ المنحنى (C) .

6) نعتبر h الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\dfrac{|3+\ln x|}{e^{x}}$.

أ) أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب) أنشئ (C_h) المنحنى الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق .

حل المسألة رقم 03

الجزء الأوّل : $g(x) = -3 - \ln x + \dfrac{1}{x}$.

1) حساب نهايات الدالة g .

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-\ln x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (\dfrac{1}{x}) = +\infty \end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{1}{x}) = 0 \end{cases}$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

❖) حساب $g'(x)$: $g'(x) = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. نلاحظ أنّه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $g'(x) < 0$.

و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

3) أ) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]0;+\infty[$ ، و صورة هذا المجال هي $]-\infty;+\infty[$ ، و لدينا : $0 \in]-\infty;+\infty[$ ، إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;+\infty[$

ب) لدينا : $\begin{cases} g(0,45) = 0,02 \\ g(0,46) = -0,04 \end{cases}$ ، أي : $g(0,46) < 0 < g(0,45)$ ، و منه : $0,45 < \alpha < 0,46$.

ج) إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

الجزء الثّاني :

1) حساب نهايات الدالة f : لدينا : $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$.

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (e^{-x}) = 1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (\ln x) = -\infty \end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{3}{e^x} + \dfrac{\ln x}{e^x}) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{3}{e^x}) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}} = 0 \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases} \end{cases}$

❖) التفسير الهندسي : المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب هو حامل محور الفواصل بجوار $+\infty$ ، وَ يقبل مستقيم مقارب هو حامل محور التراتيب بجوار $-\infty$.

2) إتجاه تغيّر الدالة f :

❖) حساب $f'(x)$: $f'(x) = -e^{-x}(3+\ln x) + \frac{1}{x} \times e^{-x} = e^{-x}(-3-\ln x + \frac{1}{x})$ ،

و منه : $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$. إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) لنبيّن أنّ : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}}$.

❖) نعلم أنّ : $g(\alpha) = 0$ ، أي : $-3 - \ln\alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$ ، و منه : $\ln\alpha = \frac{1}{x} - 3$.

❖) لنحسب $f(\alpha)$: $f(\alpha) = e^{-\alpha}(3+\ln\alpha) = e^{-\alpha}(3 + \frac{1}{\alpha} - 3) = e^{-\alpha} \times \frac{1}{\alpha}$ ، و منه : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}}$.

❖) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $0,45 < \alpha < 0,46$ ، أي : $1,56 < e^{\alpha} < 1,58$ ، أي : $0,70 < \alpha e^{\alpha} < 0,72$ ، أي :

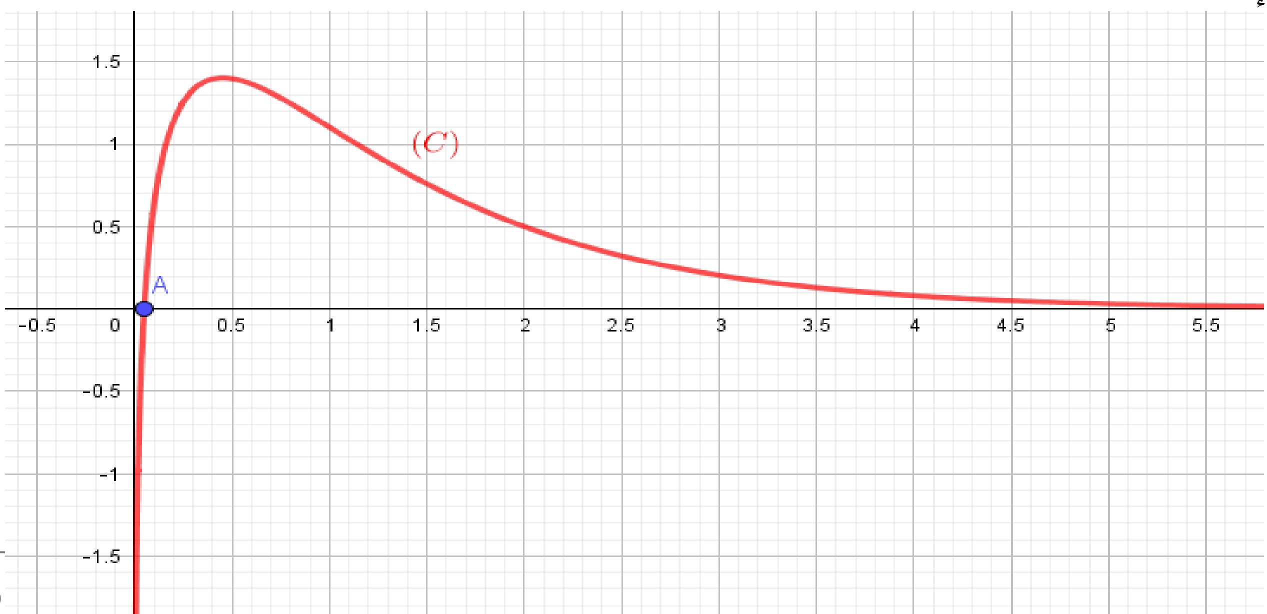
$\frac{1}{0,72} < \frac{1}{\alpha e^{\alpha}} < \frac{1}{0,70}$ ، و منه : $1,38 < f(\alpha) < 1,42$.

4) تعيين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل :

أي نحل المعادلة : $f(x) = 0$ ، أي : $e^{-x}(3+\ln x) = 0$ ، أي : $3 + \ln x = 0$ ، $(e^{-x} \neq 0)$.

أي : $\ln x = -3$ ، و منه : $x = e^{-3}$. إذن : $(C) \cap (xx') = \{A(e^{-x};0)\}$.

5) الإنشــــاء :



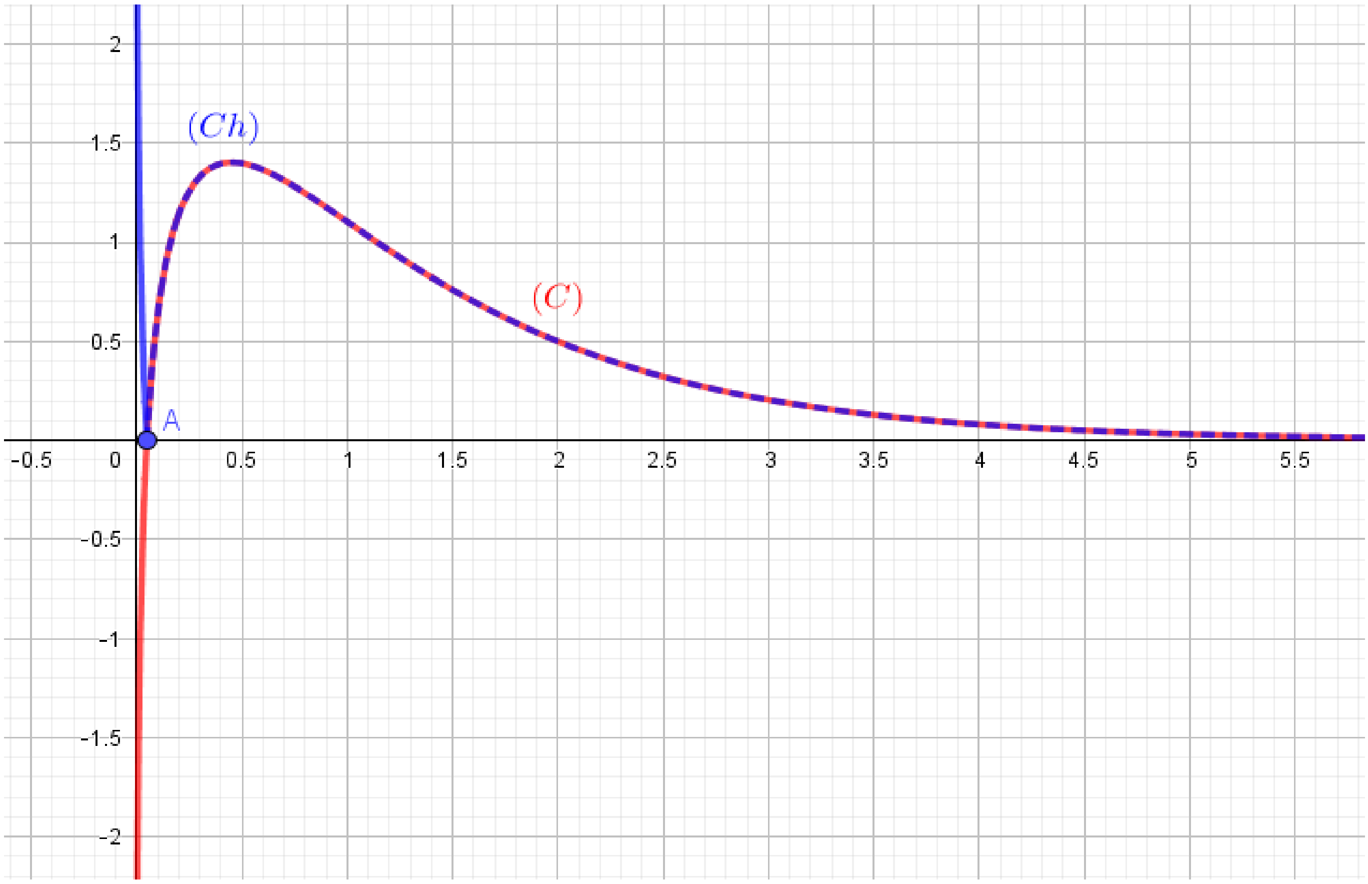
6) لدينا : $h(x)=\dfrac{|3+\ln x|}{e^x}$.

أ) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{3+\ln x}{e^x} ..... & x \geq e^{-3} \\ h(x)=-\dfrac{3+\ln x}{e^x} ..... & x < e^{-3} \end{cases}$$ ، و منه : $$\begin{cases} h(x)=f(x) ..... & x \geq e^{-3} \\ h(x)=-f(x) ..... & x < e^{-3} \end{cases}$$.

ب) إذن المنحني (C_h) ينطبق على (C) في المجال $\left[e^{-3};+\infty\right[$ ، و المنحني (C_h) يناظر المنحني (C) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل في المجال $\left]-\infty;e^{-3}\right[$.

ج) الإنشــــاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 04

الجزء الأوّل :

نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x\ln x-x-1$.

1) أحسب نهايات الدالة g عند 0 و $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $3{,}5<\alpha<3{,}6$.

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1-\dfrac{\ln x}{x+1}$.

(C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و التجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب كلا من : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا .

2) بيّن أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f وَ شكل جدول تغيراتها .

3) بيّن أنّ : $f(\alpha)=1-\dfrac{1}{\alpha}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) و الذي يمسه في النقطة ذات الفاصلة 1 .

5) أنشئ (T) و المنحني (C_f) . (الوحدة $2cm$) .

الجزء الثالث :

نعتبر المستقيمات (D_m) المعرفة بالمعادلة : $y=mx+\dfrac{3}{2}$.

1) بين أن المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A(0;\dfrac{3}{2})$.

2) ناقش بيانيا و حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx+\dfrac{3}{2}$.

الجزء الرابع :

لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=-\dfrac{\ln(x-1)}{x}$.

1) تحقق من أن : $h(x)+1=f(x-1)$.

2) إستنتج أن المنحني (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بواسطة تحويل يطلب تحديده .

الجزء الخامس :

نفرض k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $k(x)=1-\dfrac{\ln|x|}{|x|+1}$.

1) بين أن الدالة k زوجية .

2) إشرح كيف يتم رسم المنحنى (C_k) إنطلاقا من (C_f) .

3) أرسم المنحنى (C_k) في نفس المعلم السابق .

حل المسألة رقم 04

الجزء الأوّل : $g(x)=x\ln x-x-1$.

1) حساب نهايات الدالة g :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-1$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(x\ln x)=0$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x-1-\dfrac{1}{x})=+\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

❖) حساب $g'(x)$: $g'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}\times x-1=\ln x+1-1$ ، و منه : $g'(x)=\ln x$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $[3,5;3,6]$ و $\begin{cases} g(3,5)=-0,11 \\ g(3,6)=0,01 \end{cases}$ ، أي : $g(3,5)<0<g(3,6)$

إذن : حسب مبرهن القيم المتوسطة، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $3,5<\alpha<3,6$.

ب) إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثّاني : $f(x)=1-\dfrac{\ln x}{x+1}$.

1) حساب نهايات الدالة f :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(-\ln x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(x+1)=1$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل حامل محور التراتيب كمقارب بجوار $+\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}})=1$ ، علماً أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y=1$.

2) حساب $f'(x)$: $f'(x)=-\dfrac{\frac{1}{x}(x+1)-\ln x}{(x+1)^2}=-\dfrac{\frac{x+1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}=-\dfrac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2}$ ، أي :

$f'(x)=-\dfrac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}=\dfrac{x\ln x-x-1}{x(x+1)^2}$ ، و منه : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، لأنّ : $x(x+1)^2 > 0$ من أجل كل $x \in]0;+\infty[$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

3) لنبيّن أنّ : $f(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$.

❖) نعلم أنّ : $g(\alpha) = 0$ ، أي : $\alpha \ln\alpha - \alpha - 1 = 0$ ، أي : $\alpha \ln\alpha = \alpha + 1$ ، و منه : $\ln\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha}$.

❖) لنحسب $f(\alpha)$: $f(\alpha) = 1 - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha+1} = 1 - \dfrac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\alpha+1} = 1 - \dfrac{\alpha+1}{\alpha} \times \dfrac{1}{\alpha+1}$ ، و منه : $f(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$

❖) حصر $f(\alpha)$: لدينا : $3,5 < \alpha < 3,6$ ، أي : $\dfrac{1}{3,6} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{3,5}$ ، أي : $-\dfrac{1}{3,5} < -\dfrac{1}{\alpha} < -\dfrac{1}{3,6}$ ، أي :

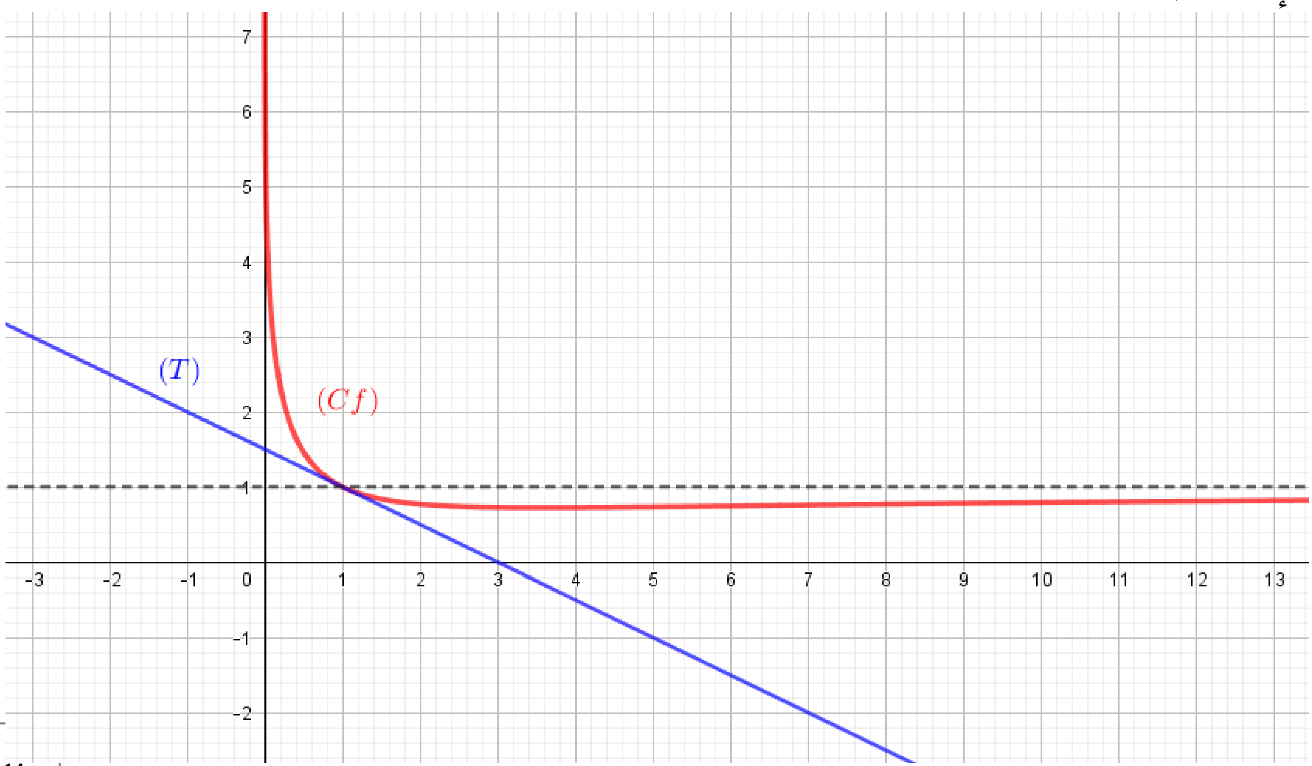
$1 - \dfrac{1}{3,5} < 1 - \dfrac{1}{\alpha} < 1 - \dfrac{1}{3,6}$ ، و منه : $0,71 < f(\alpha) < 0,72$.

4) كتابة معادلة المماس (T) :

$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ، أي : $(T) : y = -\dfrac{1}{2}(x-1) + 1$ ، أي :

$(T) : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} + 1$ ، و منه : $(T) : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

5) الإنشـــــاء :



الجزء الثالث : $(D_m): y = mx + \frac{3}{2}$.

1) بالتعويض نجد : $y = m(0) + \frac{3}{2}$ ، أي : $y = \frac{3}{2}$ ، إذن : $A \in (D_m)$.

2) لدينا المعادلة : $y = mx + \frac{3}{2}$.

عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع (D_m) ، حيث هذا الأخير يمر بالنقطة الثابتة A .

- المناقشة تكون كما يلي :

❖) إذا كان : $m \geq 0$ أو $m = -\frac{1}{2}$ ، فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

❖) إذا كان : $-\frac{1}{2} < m < 0$ ، فإنّ المعادلة تقبل حلين متمايزين .

❖) إذا كان : $m < -\frac{1}{2}$ ، فإنّ المعادلة لا تقبل حلول .

الجزء الرابع : $h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{x}$.

1) لدينا : $h(x)+1 = -\frac{\ln(x-1)}{x} + 1$ ، أي : $h(x)+1 = 1 - \frac{\ln(x-1)}{x}$ ، هذا من جهة .

و من جهة أخرى لدينا : $f(x-1) = 1 - \frac{\ln(x-1)}{(x-1)+1}$ ، أي : $f(x-1) = 1 - \frac{\ln(x-1)}{x}$.

إذن : $f(x-1) = h(x)+1$.

2) لدينا : $f(x-1) = h(x)+1$ و منه : $h(x) = f(x-1) - 1$.

إذن : المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بواسطة الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{1}{-1}$.

الجزء الخامس : $k(x) = 1 - \frac{\ln|x|}{|x|+1}$.

1) بيان أنّ الدالة k زوجية :

❖) الصفر مركز $\mathbb{R}^*$.

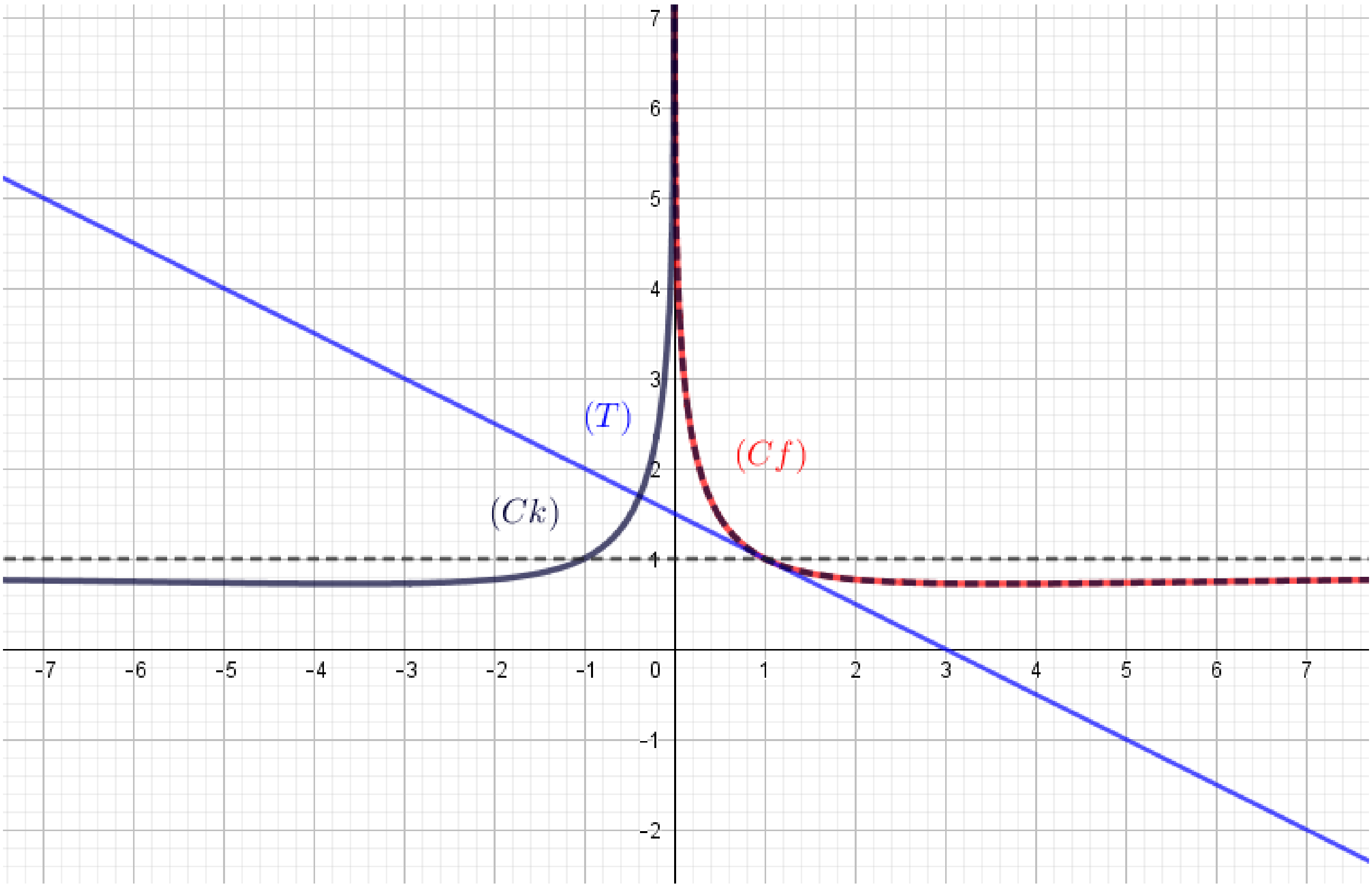
❖) $k(-x) = 1 - \frac{\ln|-x|}{|-x|+1} = 1 - \frac{\ln|x|}{|x|+1} = k(x)$ ، لأنّ : $|-x| = |x|$.

إذن : الدالة k زوجية .

2) لما يكون : $x > 0$ ، فإنّ : $|x| = x$ ، إذن : $k(x) = 1 - \frac{\ln x}{x+1}$ ، أي : $k(x) = f(x)$.

أي نقول أنّ المنحني (C_k) ينطبق على (C_f) في المجال $]0;+\infty[$ ، ثم نتمّم إنشاء المنحني (C_k) بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

3) الإنشـــــــاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 05

الجزء الأوّل :

نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x+1+\ln x$.

1) أحسب نهاية الدالة g عند 0 و $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

3) أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين $0,2$ وَ $0,3$.

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x\ln x+\dfrac{1-x^2}{2}$.

1) أحسب كلا من : $h'(x)$ و $h''(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة h' ، ثم عين إشارة $h'(x)$.

3) إستنتج تغيرات ثم إشارة الدالة h .

الجزء الثالث :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1};......(x>0) \end{cases}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدته $(4\,\text{cm})$.

1) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟ . فسر النتيجة هندسيا .

2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3) عيّن f' الدالة المشتقة للدالة f وَ ادرس إشارتها ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) بين أن : $f(\alpha)=-\alpha$.

الجزء الرابع :

نضع من أجل كل $x>0$: $\varphi(x)=f(x)-\ln x$.

1) أحسب نهاية $\varphi(x)$ عند $+\infty$ ، ثم أدرس إشارة $\varphi(x)$ على $]0;+\infty[$ وَ فسر النتائج هندسياً.

2) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

3) أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (T) .

4) أنشئ منحنى الدالة : $x\mapsto \ln x$ ، ثم أنشئ المماس (T) و المنحنى (C) .

5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=f(m)$.

حل المسألة رقم 05

الجزء الأول : $g(x)=x+1+\ln x$.

1) حساب نهايات الدالة g :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(x+1)=1$ وَ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(\ln x)=-\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$.

2) إتجاه تغيّر الدالة g :

❖) حساب $g'(x)$: $g'(x)=1+\dfrac{1}{x}$ ، نلاحظ أنه من أجل $x\in\left]0;+\infty\right[$ تكون : $g'(x)>0$.

أي : الدالة g متزايدة تماما على $\left]0;+\infty\right[$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $\left[0,2;0,3\right]$ وَ $\begin{cases} g(0,2)=-\dots \\ g(0,3)=+\dots \end{cases}$ ، أي : $g(0,2)<0<g(0,3)$

و منه : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين $0,2$ وَ $0,3$.

ب) إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الجزء الثاني : $h(x)=x\ln x+\dfrac{1-x^2}{2}$.

حساب : $h'(x)$ وَ $h''(x)$:

❖) $h'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}\times x-\dfrac{2x}{2}$ ، و منه : $h'(x)=\ln x+1-x$.

❖) $h''(x)=\dfrac{1}{x}-1$ ، و منه : $h''(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

2) نلخص إتجاه تغيّر الدالة h' في الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

❖) نلاحظ أنّ الدالة h' تقبل قيمة حدية كبرى هي 0 ، و منه :

$h'(x)\le 0$ على $\left]0;+\infty\right[$.

إذن الدالة h متناقصة على المجال $\left]0;+\infty\right[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$		$+$ ↘	0	↘ $-$	

$h(1)=0$

❖) إشارة $h(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الجزء الثالث : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1};......(x>0)\end{cases}$.

1) حساب : $\begin{cases}-\infty \\ 1\end{cases}$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[\dfrac{\dfrac{x\ln x}{x+1}}{x}\right]=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[\dfrac{\ln x}{x+1}\right]=-\infty$.

إذن : نقول أنّ الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0 .

❖) التفسير الهندسي : المنحني (C) يقبل مماساً موازياً لحامل محور التراتيب عند المبدأ O .

2) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x\ln x}{x+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x+1}\times\ln x\right]=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$.

3) من أجل كل $x>0$ تكون :

$f'(x)=\dfrac{(\ln x-\frac{1}{x}\times x)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\dfrac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{x\ln x+\ln x+x+1-x\ln x}{(x+1)^2}=\dfrac{\ln x+x+1}{(x+1)^2}$ ، و منه : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) لنبيّن أنّ : $f(\alpha)=-\alpha$.

نعلم أنّ : $g(\alpha)=0$ ، أي : $\alpha+1+\ln\alpha=0$ ، و منه : $\ln\alpha=-\alpha-1$.

❖) لنحسب $f(\alpha)$: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha\ln\alpha}{\alpha+1}=\dfrac{\alpha(-\alpha-1)}{\alpha+1}=\dfrac{-\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1}$ ، و منه : $f(\alpha)=-\alpha$.

الجزء الرابع :

لدينا من أجل كل $x>0$: $\varphi(x)=f(x)-\ln x$.

1) أ) حساب نهاية $\varphi(x)$ عند $+\infty$:

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x\ln x}{x+1}-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x\ln x-x\ln x-\ln x}{x+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\ln x}{x+1}$ ، أي :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\dfrac{-\ln x}{x(1+\dfrac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\ln x}{x}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=0$ ، إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

❖) التفسير الهندسي : المنحني الممثل للدالة $x\mapsto\ln x$ وَ المنحني (C) يكونان متقاربان بجوار $+\infty$.

ب) إشارة $\varphi(x)$: نلاحظ أنّ إشارة $\varphi(x)$ من إشارة $\dfrac{-\ln x}{x+1}$.

سنلخص الإشارة و الوضعية في الجدول التالي : (التفسير الهندسي لإشارة $\varphi(x)$) .

ملاحظة : (Γ) هو المنحني الممثل للدالة $x\mapsto\ln x$.

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C) يقع فوق (Γ)	(C) يقطع (Γ) في النقطة $A(1;0)$	(C) يقع تحت (Γ)

2) كتابة معادلة المماس (T) :

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي : $(T): y=\dfrac{1}{2}(x-1)+0$ ، و منه : $(T): y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

3) دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (T) :

أي : ندرس إشارة الفرق : $f(x)-(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2})$.

$f(x)-(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2})=\dfrac{x\ln x}{x+1}-\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{x\ln x}{x+1}-\dfrac{(x-1)(x+1)}{2(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}\left[x\ln x-\dfrac{x^2-1}{2}\right]$ ،

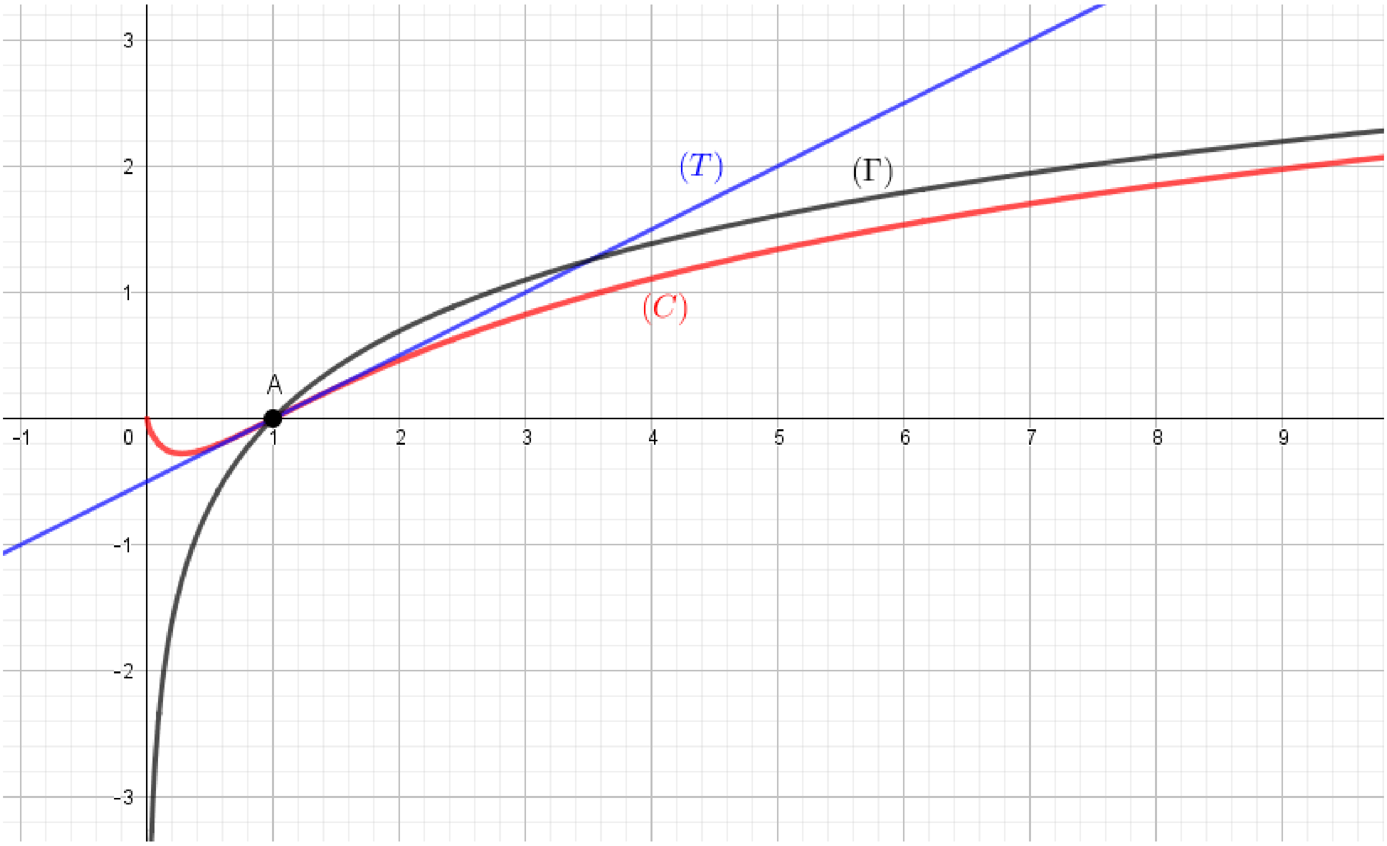
أي : $f(x)-(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{x+1}\left[x\ln x+\dfrac{1-x^2}{2}\right]$ ، و منه : $f(x)-(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{x+1}\times h(x)$.

إذن : نستنتج أنّ إشارة الفرق من إشارة $h(x)$.

نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C) يقع فوق (T)	(C) يخترق (T) في النقطة $A(1;0)$	(C) يقع تحت (T)	

4) الإنشـــــــاء :



5) لدينا المعادلة : $f(x)=f(m)$.

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل الذي معادلته : $y=f(m)$. إذن المناقشة تكون كما يلي :

❖ إذا كان : $m\in\left[0;\alpha\right[\cup\left]\alpha;1\right]$ ، فإنّ المعادلة تقبل حلين متمايزين .

❖ إذا كان : $m=\alpha$ أو $m>1$ ، فإنّ المعادلة تقبل حلا واحداً .

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 06 (رائعة و بأفكار جديدة)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=2-x-\ln(x-1)^2$.

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) عيّن نهايتي الدالة g عند 1 وَ عند $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3) أحسب $g(2)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]1;+\infty[$.

4) بيّن أنّ المعادلة $|g(x)|=1$ على المجال $]1;+\infty[$ تقبل حلان α وَ β ،
حيث : $1,70<\alpha<1,71$ وَ $2,37<\beta<2,38$.

5) أ) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_g) عند النقطة ذات الترتيبة 1 ، ثم جد حصراً للعدد $\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$.

ب) أنشئ كلاًّ من (Δ) و المنحني (C_g) .

ج) m عدد حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $2-2\ln(x-1)=\dfrac{-2}{\alpha-1}x+m$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\left[x-1+2\ln(x-1)\right]\left[x-3+2\ln(x-1)\right]$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ يكون : $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$.

2) عيّن نهايتي الدالة f عند 1 وَ عند $+\infty$.

3) أ) أحسب $f'(x)$ و هذا من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

4) أ) جد إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل .

ب) أنشئ المنحني (C_f) في المعلم السابق .

5) لتكن h هي الدالة المعرّفة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ بـ : $h(x)=(\cos x+2\ln(\cos x))(-2+\cos x+2\ln(\cos x))$

أ) بيّن أنّ : $h=f\circ u$ ، حيث u دالة يطلب تعيين عبارتها .

ب) عيّن نهاية الدالة h عند $\dfrac{\pi}{2}$ ، وَ فسّر النتيجة هندسياً ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر الدالة h .

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة h ، ثمّ أنشئ (Γ) منحنى الدالة h .

حــل مختصر للدالة اللوغاريتمية رقم 06

الجزء الأوّل : $g(x)=2-x-\ln(x-1)^2$

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}(2-x)=1\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}-\ln(x-1)^2=+\infty\end{cases}$.

المستقيم ذو المعادلة : $x=1$ مقارب موازي لحامل محور التراتيب لـلمنحنى (C_g) بجوار $+\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(x-1)^2=-\infty\end{cases}$.

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

❖) الدالة المشتقة : $g'(x)=-1-\dfrac{2}{x-1}$ ، أي : $g'(x)=\dfrac{-x-1}{x-1}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل $x>1$ تكون : $g'(x)<0$ ، و منه : الدالة g متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

❖) جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

3) حساب $g(2)$:

$g(2)=0$ ، سنلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	1		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

4) لدينا : $|g(x)|=1$ تكافئ : $g(x)=1$ ، أو $g(x)=-1$.

❖) على المجال $[1;2]$ ، الدالة g مستمرة و رتيبة ، و صورة هذا المجال هي $[0;+\infty[$ ، وَ $1\in[0;+\infty[$ ،

إذن المعادلة : $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1;2[$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة).

❖) على المجال $[2;+\infty[$: الدالة g مستمرة و رتيبة ، و صورة هذا المجال هي $]-\infty;0]$ ، وَ $-1\in]-\infty;0]$ ،

إذن المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا β من المجال $]2;+\infty[$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة).

❖) نحسب : $\begin{cases}g(1,70)=....\\ g(1,71)=....\end{cases}$ و منه : $1,70<\alpha<1,71$ ، $\begin{cases}g(2,37)=....\\ g(2,38)=....\end{cases}$ و منه : $2,37<\beta<2,38$.

5) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الترتيبة 1 ، أي عند النقطة $A(\alpha;1)$:

$(\Delta): y = g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$ ، أي : $(\Delta): y = \dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}(x-\alpha)+1$ ،

و منه : $(\Delta): y = \dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}x + \dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$

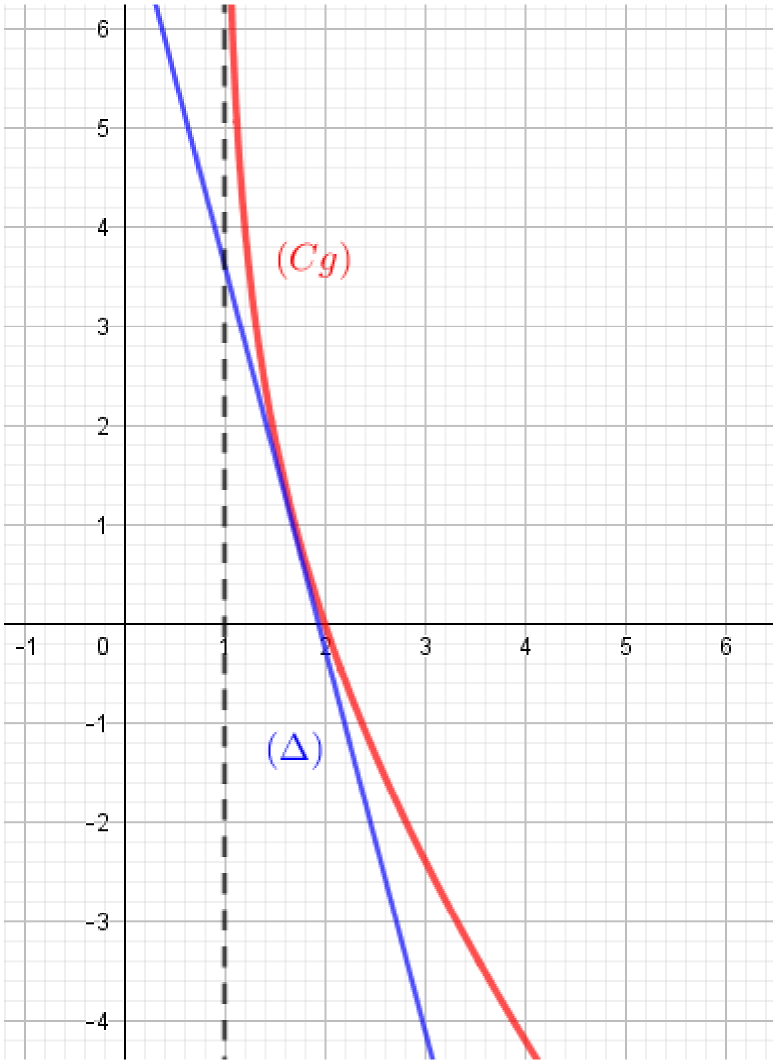
❖) حصر العدد $\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$:

لدينا : $1,70 < \alpha < 1,71$ ، أي : $2,89 < \alpha^2 < 2,92$ ، أي : $4,59 < \alpha^2+\alpha < 4,63.....(1)$.

لدينا : $1,70 < \alpha < 1,71$ ، أي : $0,70 < \alpha-1 < 0,71$ ، أي : $\dfrac{1}{0,71} < \dfrac{1}{\alpha-1} < \dfrac{1}{0,70}.....(2)$.

بضرب (1) في (2) نجد : $\dfrac{4,59}{0,71} < \dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1} < \dfrac{4,63}{0,70}$ ، و منه : $6,46 < \dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1} < 6,61$.

ب) إنشاء (Δ) و المنحني (C_g) :



ج) المناقشة البيانية :

لدينا من أجل كل $x>1$: $2-2\ln(x-1) = \dfrac{-2}{\alpha-1}x+m$ ،

أي : $2 - x - 2\ln(x-1) = \dfrac{-2}{\alpha-1}x - x + m$

أي : $g(x)=(\frac{-2}{\alpha-1}-1)x+m$ ، و منه : $g(x)=(\frac{-\alpha-1}{\alpha-1})x+m$.

و لدينا : $(\Delta): y=\frac{-\alpha-1}{\alpha-1}x+\underbrace{\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1}_{m}$ ، و منه المناقشة تكون كالتالي :

❖) إذا كان : $m>\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة تقبل حلين متمايزين .

❖) إذا كان : $m=\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة تقبل حل وحيد .

❖) إذا كان : $m<\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول .

الجزء الثاني : $f(x)=\left[x-1+2\ln(x-1)\right]\left[x-3+2\ln(x-1)\right]$.

1) نعلم أنّ :

$\left[g(x)\right]^2-1=\left[g(x)-1\right]\left[g(x)+1\right]=\left[2-x-\ln(x-1)^2-1\right]\left[2-x-\ln(x-1)^2+1\right]$ ،

و منه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$ فإنّ : $\left[g(x)\right]^2-1=\left[1-x-2\ln(x-1)\right]\left[3-x-2\ln(x-1)\right]$

و بحكم : $(-a)\times(-b)=a\times b$ ، أي : $\left[g(x)\right]^2-1=\left[x-1+2\ln(x-1)\right]\left[x-3+2\ln(x-1)\right]$.

و عليه : $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$.

2) حساب النهايات : (نستعمل الشكل : $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$) .

❖) $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1}\left[g(x)\right]^2-1=+\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1}g(x)=+\infty$.

❖) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\right]^2-1=+\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

3) أ) حساب $f'(x)$ من أجل كل عددي حقيقي من $]1;+\infty[$: (نستعمل الشكل : $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$)

$f'(x)=2\times g(x)\times g'(x)$ ، و منه : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)\times g'(x)$.

x	1		2		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)\times g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ب) الدالة f متناقصة على المجال $]1;2]$ ، و متزايدة على المجال $[2;+\infty[$.

❖) جدول التغيرات :

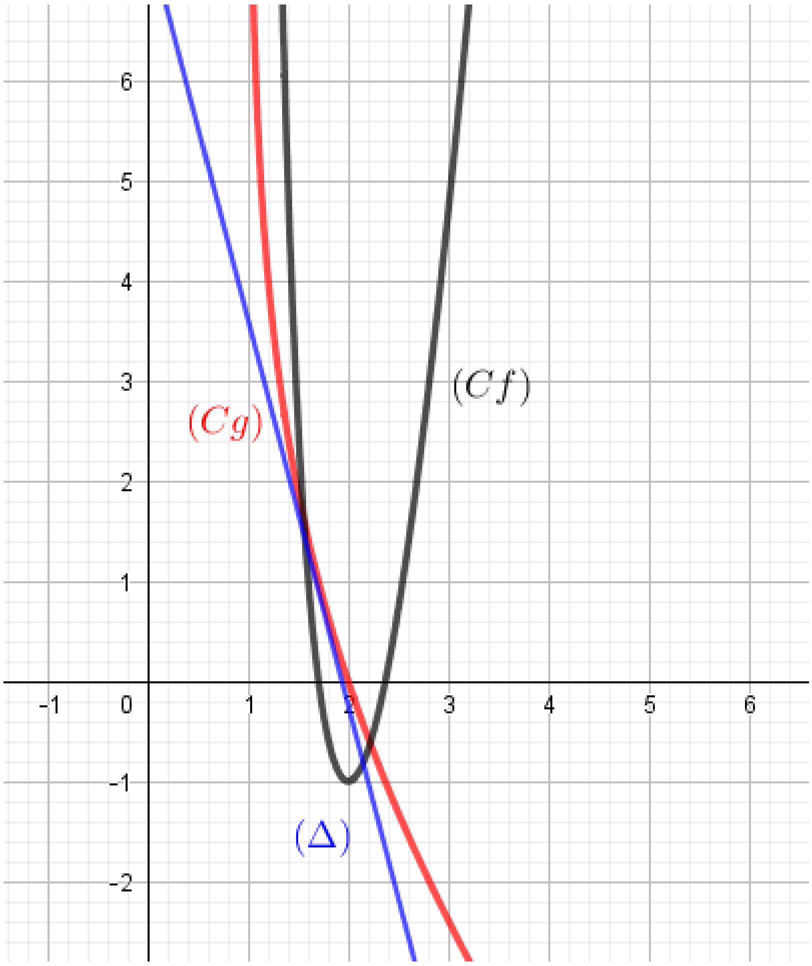
x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

4) نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل :

❖) نحل المعادلة $f(x)=0$ ، أي : $\left[g(x)\right]^2-1=0$ ، أي : $\left[g(x)\right]^2=1$ ، و منه : $\begin{cases} g(x)=1 \\ g(x)=-1 \end{cases}$

و عليه : $x=\alpha$ ، أو $x=\beta$. إذن : (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين : $A(\alpha;0)$ وَ $B(\beta;0)$.

❖) الإنشـاء :



5) لدينا : $h(x)=(\cos x+2\ln\cos x)(-2+\cos x+2\ln\cos x)$.

أ) نلاحظ أنّ : $h(x)=f(1+\cos x)$ ، و منه : $h=f\circ u$ ، حيث : $u(x)=1+\cos x$.

ب)

❖) حساب النهاية : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} h(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(1+\cos x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty \end{cases}$.

❖) التفسير الهندسي : المنحني (Γ) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب معادلته : $x=\frac{\pi}{2}$.

❖) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة h : لدينا $h(x)=f(1+\cos x)$.

- من أجل كل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، يكون : $0<\cos x\le 1$ ، أي : $1<1+\cos x\le 2$ ، ومنه : $1+\cos x\in\left]1;2\right]$

و الدالة f متناقصة على $]1;2]$.

- و من جهة أخرى لدينا الدالة $x \mapsto 1+\cos x$ متناقصة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

و منه : الدالة h متزايدة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، و ذلك حسب مبرهنة إتجاه تغيّر دالة مركبة .

ج) جدول التغيرات للدالة h :

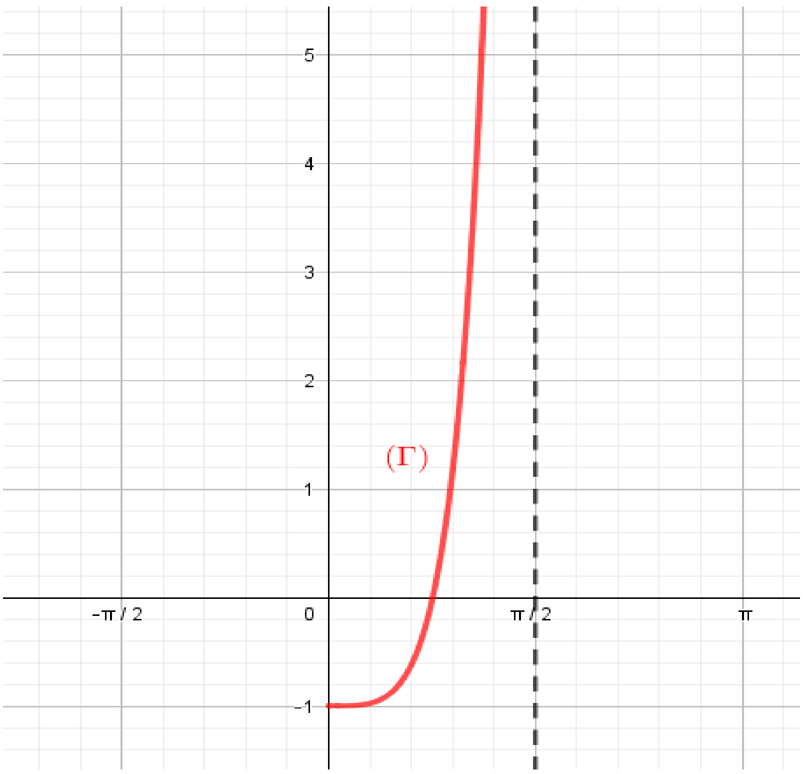
❖) $h(0)=f(1+\cos(0))$ ،

أي :

$h(0)=f(2)=-1$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	-1 ↗	$+\infty$ ‖

❖) الإنشــاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 07 + 08

المسألة رقم 07 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+1+2\ln(\frac{x+2}{x+1})$.

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها ، ثمّ فسّر النتائج هندسياً .

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3) بيّن أنّ النقطة $K(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ هي مركز التناظر للمنحني (C_f) .

4) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، و شكل جدول تغيّراتها .

5) برهن على وجود مماسين للمنحني (C_f) معامل توجيه كل منهما $\frac{2}{3}$.

6) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحني (C_f) .

7) نفرض العدد الحقيقي m ، حيث : $m>0$ و المعادلة : $2\ln(\frac{mx+m}{x+2})=x+1$.

❖ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول هذه المعادلة .

المسألة رقم 08 :

n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر الدالة f_n المعرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f_n(x)=x^n\ln(1+x)$.

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. و حدته : $2cm$.

1) نعتبر الدالة h_n المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $h_n(x)=n\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}$.

أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة h_n .

ب) أحسب $h_n(0)$ ، ثمّ عيّن إشارة $h_n(x)$ من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$.

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ تكون : $f_1'(x)=h_1(x)$ وَ $f_n'(x)=x^{n-1}\times h_n(x)$.

ب) نفرض n فردي ، بيّن أنّ : $f_n'(x)$ وَ $h_n(x)$ من نفس الإشارة .

❖ شكّل عندئذ جدول تغيّرات الدالة f_n في حالة n فردي ، مع حساب النهايات عند -1 وَ $+\infty$.

ج) نفرض n زوجي ، شكل جدول تغيرات الدالة f_n ، مع حساب النهايات عند -1 وَ $+\infty$.

3) أ) حدّد وضعية المنحنيين (C_1) وَ (C_2) .

ب) أنشئ كلاًّ من (C_1) وَ (C_2) .

حل المسألة رقم 07

لدينا : $f(x)=x+1+2\ln(\frac{x+2}{x+1})$.

1) حساب نهايات الدالة f و تفسير النتائج هندسياً :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\ln(\frac{x+2}{x+1})=0 \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{x+2}{x+1})=1\\ \lim\limits_{x\to1}2\ln(x)=0\end{cases}$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(\frac{x+2}{x+1})=0 \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+2}{x+1})=1\\ \lim\limits_{x\to1}2\ln(x)=0\end{cases}$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} 2\ln(\frac{x+2}{x+1})=-\infty \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}(\frac{x+2}{x+1})=0^+\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}2\ln(x)=-\infty\end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} 2\ln(\frac{x+2}{x+1})=+\infty \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(\frac{x+2}{x+1})=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)=+\infty\end{cases}$.

❖) التفسير الهندسي :

المنحنى (C_f) يقبل مستقيمان موازيان لحامل محور الفواصل معادلتهما : $x=-2$ وَ $x=-1$ بجواري $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب .

2) أ) نحسب : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}2\ln(\frac{x+2}{x+1})=0$.

إذن : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجواري $-\infty$ وَ $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-(x+1)=2\ln(\frac{x+2}{x+1})$.

❖) نقارن بين : $(\frac{x+2}{x+1})$ وَ 1 ، أي : $\frac{1}{x+1}=\frac{x+2-x-1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}-1$.

نعلم أنّ :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{1}{x+1}$	$-$	‖	$+$

إذن الوضعية تكون كما يلي :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$\dfrac{1}{x+1}$	$-$			$+$
$2\ln(\dfrac{x+2}{x+1})$	$-$			$+$
الوضعية	(C_f) **يقع تحت** (Δ)			(C_f) **يقع فوق** (Δ)

3) **لنبيّن أنّ النقطة** K **هي مركز التناظر للمنحني** (C_f) :

❖) **أوّلاً : العدد** $-\dfrac{3}{2}$ **هو مركز** D_f .

❖) **ثانياً : لنبيّن أنّ :** $f(2a-x)+f(x)=2b$ ، **حيث :** $a=-\dfrac{3}{2}$ وَ $b=-\dfrac{1}{2}$ ، **أي :** $f(-3-x)+f(x)=-1$

أي : $f(-3-x)+f(x)=(-3-x)+1+2\ln(\dfrac{-3-x+2}{-3-x+1})+x+1+2\ln(\dfrac{x+2}{x+1})$ ، **أي :**

$f(-3-x)+f(x)=-1+2\ln(\dfrac{-x-1}{-x-2})+2\ln(\dfrac{x+2}{x+1})$ ، **أي :**

$f(-3-x)+f(x)=-1+2\left[\ln(\dfrac{-x-1}{-x-2}\times\dfrac{x+2}{x+1})\right]$ ، **أي :** $f(-3-x)+f(x)=-1+2\left[\ln(1)\right]$ ،

أي : $f(-3-x)+f(x)=-1+2\times 0$ ، **و منه :** $f(-3-x)+f(x)=-1$ ، **و هو المطلوب .**

إذن : النقطة $K(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2})$ **هي مركز التناظر للمنحني** (C_f) .

4) **دراسة إتجاه تغيّر الدالة** f :

❖) **نحسب** $f'(x)$: $f'(x)=1+2\times\dfrac{\dfrac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2}}{\dfrac{x+2}{x+1}}=1+2\times\dfrac{-1}{(x+1)^2}\times\dfrac{x+1}{x+2}$ ، **أي :**

$f'(x)=1-\dfrac{2}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(x+1)(x+2)-2}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x^2+2x+x+2-2}{(x+1)(x+2)}$ ،

و منه : $f'(x)=\dfrac{x^2+3x}{(x+1)(x+2)}$. **إشارة** $f'(x)$ **من إشارة البسط لأنّ :** $(x+1)(x+2)>0$.

نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
(x^2+3x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

❖) جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖		‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

❖) $f(0)=1+2\ln 2$ ❖) $f(-3)=-2-4\ln 2$

5) معامل التوجيه هو : $\frac{2}{3}$ ، أي نحل المعادلة : $f'(x)=\frac{2}{3}$.

أي : $\frac{x^2+3x}{(x+1)(x+2)}=\frac{2}{3}$ ، أي : $3x^2+9x=2(x+1)(x+2)$ ، أي : $3x^2+9x=2x^2+2x+4x+4$

و منه : $x^2+3x-4=0$ ، إذن : $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-4 \end{cases}$ ، و عليه يوجد مماسين معامل توجيه كل منهما هو $\frac{2}{3}$.

❖) لنكتب معادلة كل منهما :

1) المماس الأوّل عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي : $(T_1): y=\frac{2}{3}(x-1)+2+2\ln(\frac{3}{2})$ ،

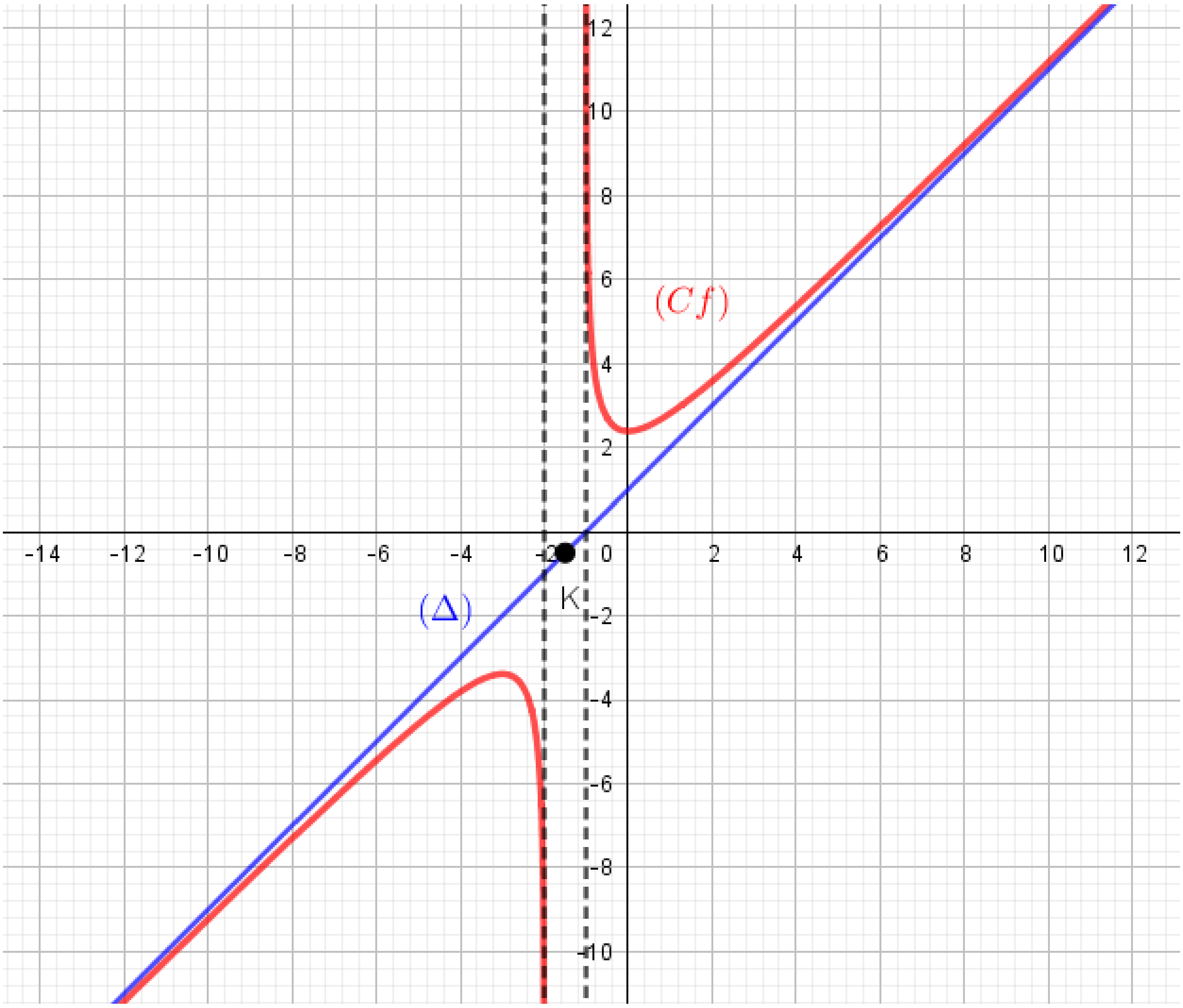
أي : $(T_1): y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+2+2\ln(\frac{3}{2})$ ، ومنه : $(T_1): y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}+2\ln(\frac{3}{2})$.

2) المماس الأوّل عند النقطة ذات الفاصلة -4 :

$(T_2): y=f'(-4)(x+4)+f(-4)$ ، أي : $(T_2): y=\frac{2}{3}(x+4)-3+2\ln(\frac{2}{3})$ ،

أي : $(T_2): y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}-3+2\ln(\frac{2}{3})$ ، و منه : $(T_2): y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}+2\ln(\frac{2}{3})$.

6) الإنشـــــاء :



7) لدينا من أجل كل $m>0$ وَ المعادلة : $2\ln(\dfrac{mx+m}{x+2})=x+1$.

أي : $2\ln\left[\dfrac{m(x+1)}{x+2}\right]=x+1$ ، أي : $2\ln m+2\ln(\dfrac{x+1}{x+2})=x+1$ ، أي : $2\ln m=x+1-2\ln(\dfrac{x+1}{x+2})$

نعلم أنّ : $\ln\dfrac{b}{a}=-\ln\dfrac{a}{b}$ ، و منه : $2\ln m=x+1+2\ln(\dfrac{x+2}{x+1})$.

إذن المعادلة تصبح من الشكل : $f(x)=2\ln m$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=2\ln m$. و عليه فإنّ المناقشة تكون كما يلي :

❖) إذا كان : $2\ln m<-2-4\ln 2$ ، أي : $\ln m<-1-2\ln 2$ ، أي : $m<e^{-1-2\ln 2}$.
فإنّ : المعادلة تقبل حلين سالبين .

❖) إذا كان : $2\ln m=-2-4\ln 2$ ، أي : $m=e^{-1-2\ln 2}$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد سالب هو -3 .

❖) إذا كان : $-2-4\ln 2<2\ln m<1+2\ln 2$ ، أي : $e^{-1-2\ln 2}<m<e^{\frac{1+2\ln 2}{2}}$ ، فإنّ : المعادلة لا تقبل حلول .

❖) إذا كان : $2\ln m=1+2\ln 2$ ، أي : $m=e^{\frac{1+2\ln 2}{2}}$ ، فإنّ : المعادلة تقبلا حل واحد معدوم .

❖) إذا كان : $2\ln m>1+2\ln 2$ ، أي : $m>e^{\frac{1+2\ln 2}{2}}$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حلين موجبين .

حل المسألة رقم 08

لدينا : $f_n(x)=x^n\ln(1+x)$.

1) لدينا : $h_n(x)=n\ln(1+x)+\dfrac{x}{x+1}$.

أ) دراسة إتجاه تغيّر الدالة h_n :

❖) لنحسب $h_n'(x)$: $h_n'(x)=n\times\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}$ ، و منه : $h_n'(x)=\dfrac{n}{1+x}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل $x\in\left]-1;+\infty\right[$ و من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $h_n'(x)>0$.

إذن الدالة h_n متزايدة تماماً على $\left]-1;+\infty\right[$.

ب) $h_n(0)=0$ ، إذن : نلخص إشارة $h_n(x)$ في الجدول التالي :

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2) أ) $f_1(x)=x.\ln(1+x)$ وَ $h_1(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x}{x+1}$.

❖) حساب $f_1'(x)$: $f_1'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\times x=\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$ ، و منه : $f_1'(x)=h_1'(x)$.

❖) حساب $f_n'(x)$: $f_n'(x)=n.x^{n-1}\times\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\times x^n$ ، نعلم أنّ : $x^n=x\times x^{n-1}$ ، أي تصبح :

$f_n'(x)=x^{n-1}\left[n\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}\right]$ ، و منه : $f_n'(x)=x^{n-1}\times h_n(x)$. و هو المطلوب

ب) في حالة n فردي يكون : $(n-1)$ زوجياً ، و منه يكون : $x^{n-1}\geq 0$ ،

و بالتالي تكون إشارة $f_n'(x)$ من إشارة $h_n(x)$.

❖) جدول التغيّرات في حالة n فردي :

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f_n(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(x^n)=-1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(1+x)=-\infty\end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty\end{cases}$.

ج) في حالة n زوجي يكون : $(n-1)$ فردياً ، أي إشارة x^{n-1} تكون كما يلي :

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}	‖	$-$	0	$+$	

و بالتالي :

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}	‖	$-$	0	$+$	
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n{}'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

❖) جدول التغيّرات في حالة n زوجي :

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f_n(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} (x^n) = 1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(1+x) = -\infty \end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^n) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases}$.

3) أ) دراسة وضعية المنحنيين (C_1) وَ (C_2) :

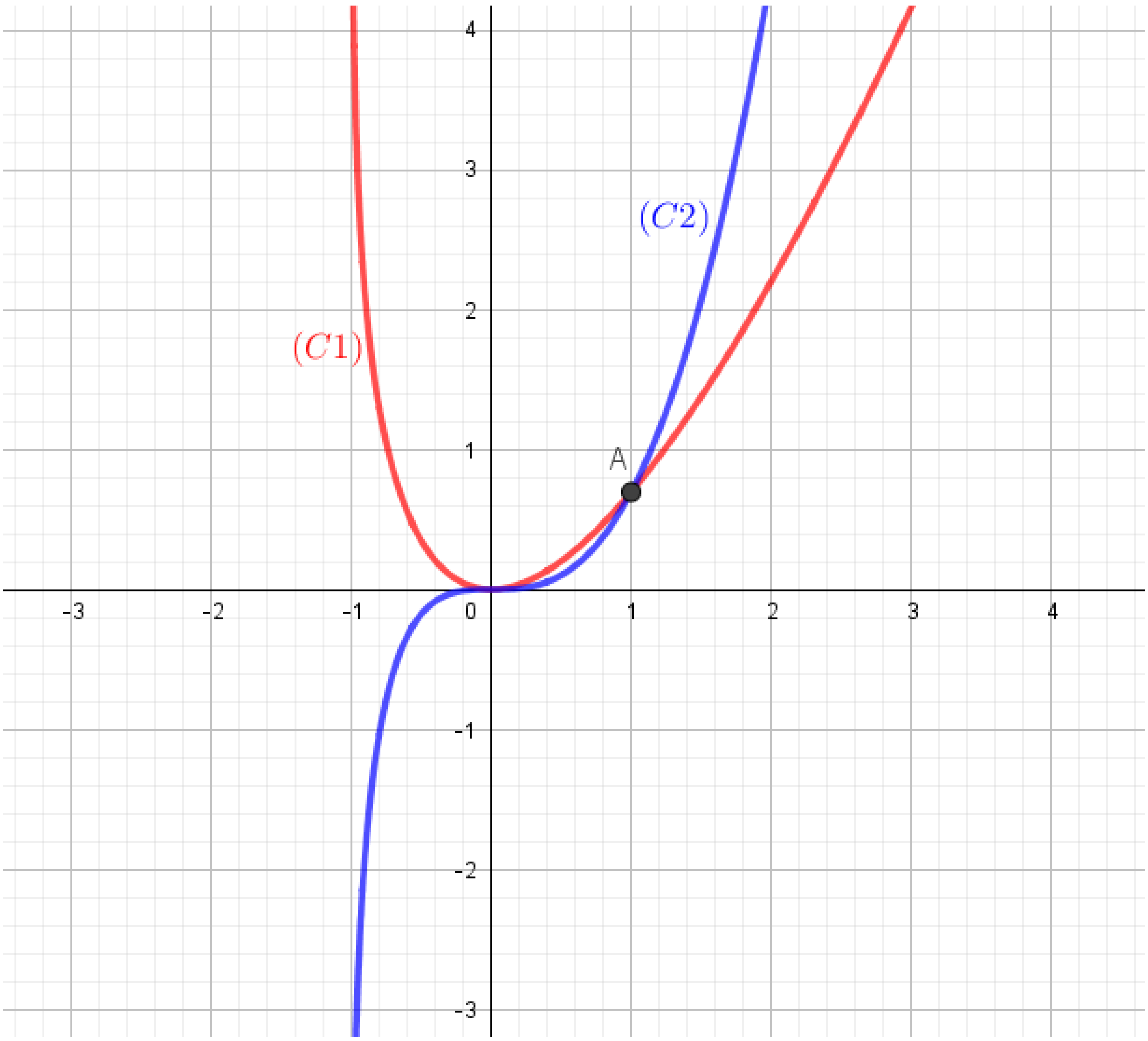
أي ندرس إشارة الفرق : $f_1(x) - f_2(x)$ ، حيث : $f_1(x) = x\ln(1+x)$ وَ $f_2(x) = x^2\ln(1+x)$.

❖) $f_1(x) - f_2(x) = x\ln(1+x) - x^2\ln(1+x)$ ، و منه : $f_1(x) - f_2(x) = x\ln(1+x)(1-x)$.

توضيح : (أخرجنا $(x\ln(1+x))$ كعامل مشترك) . إذن الوضعية تكون كما يلي :

x	-1		0		1		$+\infty$
x	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(1+x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)-f_2(x)$	‖	$+$		$+$		$-$	
الوضعية	‖	(C_1) يقع فوق (C_2)	(C_1) يمس (C_1) في النقطة $O(0,0)$	(C_1) يقع فوق (C_2)	(C_1) يقطع (C_1) في النقطة $A(1;\ln 2)$	(C_1) يقع تحت (C_2)	

ب) الإنشـــــــــاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 09

الجزء الأوّل :

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}-1$.

1) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0,36;0,38]$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x\ln(x+2)-x\ln x-x$.

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند 0 بقيم كبرى .

2) علماً أنّ : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$ ، أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\dfrac{x+2}{x})$. (ممكن وضع : $h=\dfrac{1}{x}$)

3) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

4) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=-x+2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

5) أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f وَ شكل جدول تغيّراتها .

ب) بيّن أنّ : $f(\alpha)=2.\dfrac{\alpha}{\alpha+2}$ ، ثمّ أعط حصراً للعدد $f(\alpha)$.

6) عيّن القيمة المضبوطة لفاصلة نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل .

7) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحني (C_f) .

حل مختصر للمسألة رقم 09

الجزء الأوّل : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}-1$.

1) حساب نهايات الدالة g :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln(x+2)=\ln 2$ وَ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -\ln x=+\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-1$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln(x+2)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\dfrac{x+2}{x})=0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x+2}=0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

❖) حساب $g'(x)$:

$$g'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}-\frac{-2}{(x+2)^2}=\frac{x-x-2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)^2}=-\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)^2}$$ ، أي :

$$g'(x)=\frac{-2(x+2)}{x(x+2)^2}+\frac{2x}{x(x+2)^2}=\frac{-2x-4+2x}{x(x+2)^2}=\frac{-4}{x(x+2)^2}$$.

نلاحظ أنّه من أجل كل $x\in\left]0,+\infty\right[$ تكون : $g'(x)<0$ ، و منه الدالة g متناقصة تماماً على $\left]0,+\infty\right[$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	-1

3) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ فهي مستمرة و رتيبة على $\left[0,36;0,38\right]$

وَ $\begin{cases} f(0,36)=0,03 \\ f(0,38)=-0,005 \end{cases}$ أي : $f(0,38)<0<f(0,36)$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة

$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $\left[0,36;0,38\right]$.

4) إشارة $g(x)$: سنلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

الجزء الثاني : $f(x)=x\ln(x+2)-x\ln x-x$.

1) حساب نهاية الدالة f عند 0 بقيم كبرى :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=0$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[x\ln(x+2)\right]=0$ وَ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x=0$.

2) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\dfrac{x+2}{x})$.

لنضع : $h=\dfrac{1}{x}$ ، أي : $x=\dfrac{1}{h}$ ، أي : $\begin{matrix} x\to+\infty \\ y\to 0\end{matrix}$

ملاحظة : $\ln(\frac{x+2}{x}) = \ln(1+\frac{2}{x})$.

❖) $\lim_{x\to+\infty} x.\ln(\frac{x+2}{x}) = \lim_{x\to+\infty} x.\ln(1+\frac{2}{x}) = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}.\ln(1+2h) = \lim_{h\to0}\frac{\ln(1+2h)}{h}$ ، **أي :**

$\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+2h)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\ln(1+2h)}{2h}\times 2 = 2$ ، **لأنّ :** $\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+2h)}{2h} = 1$.

و منه : $\lim_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = 2$.

3) **إستنتاج نهاية الدالة** f **عند** $+\infty$:

❖) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln(x+2) - x\ln x - x\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+2)-\ln x\right] - x$ ، **أي :**

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left[x.\ln(\frac{x+2}{x}) - x\right] = -\infty$.

4) **نحسب :** $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+2)\right]$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+2)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln(\frac{x+2}{x}) - x + x - 2\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln(\frac{x+2}{x}) - 2\right] = 0$$

❖) **لدينا مما سبق :** $\lim_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = 2$.

إذن : المستقيم (Δ) **مقارب مائل للمنحني** (C_f) **بجوار** $+\infty$.

5) **أ) دراسة إتجاه تغيّر الدالة** f **و تشكيل جدول تغيّراتها :**

❖) **حساب** $f'(x)$: $f'(x) = \ln(x+2) + \frac{1}{x+2}\times x - (\ln x + \frac{1}{x}\times x) - 1$ ، **أي :**

$f'(x) = \ln(x+2) - \ln x + \frac{x}{x+2} - 1 - 1$ ، **أي :** $f'(x) = \ln(x+2) - \ln x + \frac{x-x-2}{x+2} - 1$

أي : $f'(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} - 1$ ، **و منه :** $f'(x) = g(x)$.

إذن : إشارة $f'(x)$ **من إشارة** $g(x)$.

❖) **جدول التغيرات :**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

ب) لنبيّن أنّ : $f(\alpha) = 2.\frac{\alpha}{\alpha+2}$.

❖) **لدينا :** $g(\alpha) = 0$ ، **أي :** $\ln(\alpha+2) - \ln\alpha - \frac{2}{\alpha+2} - 1 = 0$ ،

و منه : $\ln(\frac{\alpha+2}{\alpha}) = \frac{2}{\alpha+2}+1$.

❖) لنحسب $f(\alpha)$: $f(\alpha) = \alpha\ln(\alpha+2) - \alpha\ln\alpha - \alpha$ ، أي : $f(\alpha) = \alpha\ln(\frac{\alpha+2}{\alpha}) - \alpha$ ،

نعوض الآن : $f(\alpha) = \alpha(\frac{2}{\alpha+2}+1) - \alpha$ ، أي : $f(\alpha) = \alpha\left[(\frac{\alpha+2}{\alpha}+1)-1\right]$ ،

أي : $f(\alpha) = \alpha.\frac{2}{\alpha+2}$ ، و منه : $f(\alpha) = 2.\frac{\alpha}{\alpha+2}$ و هو المطلوب .

❖) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $0,38 < \alpha < 0,36....(1)$ ، أي : $2,38 < \alpha+2 < 2,36$ ، أي : $\frac{1}{2,38} < \frac{1}{\alpha+2} < \frac{1}{2,36}$ ،

أي : $\frac{2}{2,38}....(2) < \frac{2}{\alpha+2} < \frac{2}{2,36}$. نضرب (1) في (2) نجد : $0,30 < f(\alpha) < 0,32$.

6) إيجاد نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل :

أي نحل المعادلة : $f(x) = 0$

$x\ln(x+2) - x\ln x - x = 0$ ، أي : $x\left[\ln(x+2) - \ln x - 1\right] = 0$ ، أي : $x\left[\ln(\frac{x+2}{x}) - 1\right] = 0$

أي : $\ln(\frac{x+2}{x}) - 1 = 0$ ، أي : $\ln(\frac{x+2}{x}) = 1$ ، أي : $\frac{x+2}{x} = e$ ، أي : $1+\frac{2}{x} = e$ ، أي :

$\frac{2}{x} = e-1$ ، و منه : $x = \frac{2}{e-1}$. إذن : $(C_f)\cap(xx') = \{A(\frac{2}{e-1};0)\}$.

7) الإنشـــــاء :